Vassilij S. Vladimirov (1923), eminente matematico, membro dell'Accademia delle Scienze dell'URSS, Vice direttore dell'Istituto Steklov, è Titolare della Sezione della fisica matematica di questo Istituto.

È autore di 6 monografie e di 150 articoli e opere scientifiche. Premio di Stato (1953), Medaglia d'oro Ljapunov (Accademia delle Scienze dell'URSS), Medaglia d'oro Bertrano Bolzano (Accademia delle Scienze della Cecoslovacchia), Eroe del Lavoro Socialista (massima onorificenza dell'URSS).

L'accademico Vassilij S. Vladimirov è membro dell'Accademia delle Scienze della Sassonia.

Il presente libro è stato pubblicato negli USA, nella Repubblica Democratica Tedesca, Ungheria, Romania, ecc., due ristampe in Giappone.

In lingua italiana è stata tradotta la sua opera **Le distribuzioni nella fisica matematica** (Edizioni Mir, Mosca, 1981).

Vassilij S. Vladimirov

Equazioni della fisica matematica

Edizioni Mir

Titolo originale: Vladimirov, *Uravnenija matematičeskoj fisiki*
I edizione: 1987

Traduzione dal russo
di Ernest Kozlov

© Nauka, Mosca, 1981
© Traduzione italiana, Edizioni Mir, Mosca, 1987

ISBN 5-03-001093-9

Indice

Al lettore italiano p. 10

Prefazione alla quarta edizione 12

I. Impostazione dei problemi al contorno della fisica matematica

§ 1. Concetti e proposizioni della teoria degli insiemi, della teoria delle funzioni e della teoria degli operatori 15

1. Insiemi puntiformi in R^n (15). 2. Classi di funzioni $C^p(G)$ e $C^p(\bar{G})$ (17). 3. Spazio delle funzioni continue $C(T)$ (18). 4. Integrale di Lebesgue (19). 5. Integrali di Lebesgue dipendenti da un parametro (25). 6. Integrali di tipo potenziale (25). 7. Spazio delle funzioni $\mathscr{L}_2(G)$ (28). 8. Sistemi ortonormali (30). 9. Sistemi ortonormali completi (33). 10. Operatori e funzionali lineari (35). 11. Equazioni lineari (38). 12. Operatori hermitiani (40).

§ 2. Equazioni fondamentali della fisica matematica 42

1. Equazione di vibrazioni (42). 2. Equazione di diffusione (45). 3. Equazione stazionaria (47). 4. Equazione di trasporto (48). 5. Equazioni della dinamica dei fluidi (49). 6. Equazioni di Maxwell (49). 7. Equazione di Schrödinger (50). 8. Equazione di Klein-Gordon-Fock ed equazione di Dirac (51).

§ 3. Classificazione delle equazioni differenziali quasi-lineari del secondo ordine 52

1. Classificazione delle equazioni puntuali (52). 2. Espressione dell'operatore di Laplace in coordinate sferiche e cilindriche (54). 3. Superfici caratteristiche (caratteristiche) (55). 4. Forma canonica delle equazioni a due variabili indipendenti (56). 5. Esempio: equazione di Tricomi (61).

§ 4. Impostazione dei problemi al contorno fondamentali per equazioni differenziali lineari del secondo ordine 62

1. Classificazione dei problemi al contorno (62). 2. Problema di Cauchy (64). 3. Il ruolo delle caratteristiche nell'impostazione del problema di Cauchy (65). 4. Problema al contorno per le equazioni di tipo ellittico (66). 5. Problema misto (67). 6. Altri problemi al contorno (68). 7. Correttezza delle impostazioni dei problemi della fisica matematica (69). 8. Teorema di Cauchy-Kovalevskaja (71). 9. Esempio di Hadamard (72). 10. Soluzioni classiche e generalizzate (72).

II. Funzioni generalizzate

§ 5. Funzioni fondamentali e generalizzate 74

1. Introduzione (74). 2. Spazio delle funzioni fondamentali $\mathscr{D}$ (76). 3. Spazio delle funzioni generalizzate $\mathscr{D}'$ (79). 4. Completezza dello spazio delle funzioni generalizzate $\mathscr{D}'$ (80). 5. Supporto di una

funzione generalizzata (83). 6. Funzioni generalizzate regolari (84). 7. Funzioni generalizzate singolari (86). 8. Formule di Sochotskij (88). 9. Sostituzione lineare delle variabili nelle funzioni generalizzate (89). 10. Moltiplicazione delle funzioni generalizzate (90). 11. Esercizi (91).

§ 6. Derivazione delle funzioni generalizzate 92
1. Derivate della funzione generalizzata (92). 2. Proprietà delle derivate generalizzate (93). 3. Primitiva di una funzione generalizzata (95). 4. Esempi, $n = 1$ (97). 5. Esempi, $n \geqslant 2$ (102). 6. Esercizi (109).

§ 7. Prodotto diretto e convoluzione delle funzioni generalizzate 110
1. Definizione del prodotto diretto (110). 2. Commutatività del prodotto diretto (113). 3. Altre proprietà del prodotto diretto (115). 4. Convoluzione delle funzioni generalizzate (116). 5. Proprietà della convoluzione (120). 6. Esistenza della convoluzione (121). 7. Algebra di convoluzione $\mathscr{D}'_+$ delle funzioni generalizzate (123). 8. Equazioni nell'algebra di convoluzione $\mathscr{D}'_+$ (125). 9. Regolarizzazione delle funzioni generalizzate (127). 10. Esempi di convoluzioni. Potenziale di Newton (128). 11. Esercizi (130).

§ 8. Funzioni generalizzate di crescita lenta 132
1. Spazio delle funzioni fondamentali $\mathscr{S}$ (132). 2. Spazio delle funzioni generalizzate di crescita lenta $\mathscr{S}'$ (133). 3. Esempi di funzioni generalizzate di crescita lenta (134). 4. Struttura delle funzioni generalizzate a supporto puntiforme (135). 5. Prodotto diretto delle funzioni generalizzate di crescita lenta (137). 6. Convoluzione delle funzioni generalizzate di crescita lenta (138).

§ 9. Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate di crescita lenta 140
1. Trasformazione di Fourier delle funzioni fondamentali appartenenti a $\mathscr{S}$ (140). 2. Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate appartenenti a $\mathscr{S}'$ (141). 3. Proprietà della trasformazione di Fourier (143). 4. Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate a supporto compatto (145). 5. Trasformazione di Fourier della convoluzione (146). 6. Esempi, $n = 1$ (147). 8. Esempi $n \geqslant 2$ (150). 8. Esercizi (154).

§ 10. Trasformazione di Laplace delle funzioni generalizzate (calcolo operazionale) 155
1. Trasformazione di Laplace delle funzioni localmente integrabili (155). 2. Trasformazione di Laplace delle funzioni generalizzate (155). 3. Proprietà della trasformazione di Laplace (158). 4. Trasformazione di Laplace inversa (160). 5. Esempi ed applicazioni (163). 6. Esercizi (166).

III. Soluzione fondamentale e problema di Cauchy

§ 11. Soluzioni fondamentali degli operatori lineari differenziali 168
1. Soluzioni generalizzate delle equazioni differenziali lineari (168). 2. Soluzioni fondamentali (169). 3. Equazioni con secondo membro (171). 4. Metodo di discesa (172). 5. Soluzione fondamentale di un operatore differenziale lineare con derivate ordinarie (175). 6. Soluzione fondamentale dell'operatore di conduzione termica (175). 7. Soluzione fondamentale dell'operatore d'onda (176). 8. Soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace (178). 9. Soluzione fondamentale del'operatore di Helmholtz (179). 10. Soluzione fondamentale dell'operatore di Cauchy-Riemann (180). 11. Soluzione fondamentale dell'operatore di trasporto (180). 12. Esercizi (182).

§ 12. Potenziale d'onda 183
1. Proprietà della soluzione fondamentale dell'operatore d'onda (183). 2. Informazioni supplementari concernenti le convoluzioni (185). 3. Potenziale d'onda (188). 4. Potenziali d'onda di superficie (190).

§ 13. Problema di Cauchy per l'equazione d'onda 194
1. Problema di Cauchy per l'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti (194). 2. Impostazione del problema di Cauchy generalizzato per l'equazione d'onda (196). 3. Soluzione del problema di Cauchy generalizzato (197). 4. Soluzione del problema di Cauchy classico (199). 5. Esercizi (200).

§ 14. Propagazione delle onde 201
1. Sovrapposizione delle onde e regioni d'influenza (201). 2. Propagazione delle onde nello spazio (202). 3. Propagazione delle onde in un piano (204). 4. Propagazione delle onde lungo una retta (206). 5. Metodo delle onde in propagazione (209). 6. Metodo delle riflessioni. Corda semiinfinita (211). 7. Metodo delle riflessioni. Corda finita (214). 8. Equazioni d'onda non lineari (216).

§ 15. Metodo di Riemann 217
1. Soluzione del problema di Goursat (217). 2. Formula di Green (221). 3. Funzione di Riemann (222). 4. Problema di Cauchy (224).

§ 16. Problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica 228
1. Potenziale termico (229). 2. Potenziale termico di superficie (231). 3. Impostazione del problema di Cauchy generalizzato per l'equazione di conduzione termica (233). 4. Soluzione del problema di Cauchy (234). 5. Esercizi (235).

IV. Equazioni integrali

§ 17. Metodo delle approssimazioni successive 238
1. Equazioni integrali con nucleo continuo (238). 2. Nuclei iterati. Risolvente (241). 3. Equazioni integrali di Volterra (244). 4. Equazioni integrali con nucleo polare (246). 5. Esercizi (250).

§ 18. Teoremi di Fredholm 251
1. Equazioni integrali con nucleo degenere (251). 2. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo degenere (253). 3. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo continuo (256). 4. Corollari dei teoremi di Fredholm (260). 5. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo polare (261). 6. Esercizi (263).

§ 19. Equazioni integrali con nucleo hermitiano 264
1. Operatori integrali con nucleo continuo hermitiano (264). 2. Lemma di Arzelà-Ascoli (265). 3. Equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano (266). 4. Equazioni integrali con nucleo polare hermitiano (268).

§ 20. Teorema di Hilbert-Schmidt e suoi corollari 269
1. Teorema di Hilbert-Schmidt per un nucleo continuo hermitiano (269). 2. Sviluppo bilineare dei nuclei iterati (272). 3. Sviluppo bilineare di un nucleo continuo hermitiano (273). 4. Soluzione di un'equazione integrale non omogenea con nucleo continuo hermitiano (275). 5. Nuclei definiti positivi (277). 6. Estensione della teoria di Hilbert-Schmidt alle equazioni integrali con nucleo polare hermitiano (278). 7. Teorema di Jentsch (279). 8. Metodo di Kellogg (281). 9. Teorema di Mercer (284).

V. Problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico

§ 21. Problemi agli autovalori 286
1. Impostazione del problema agli autovalori (286). 2. Formule di Green (287). 3. Proprietà dell'operatore L (288). 4. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni dell'operatore L (290). 5. Significato fisico degli autovalori e delle autofunzioni (293).

§ 22. Problema di Sturm-Liouville 294
1. Funzione di Green (294). 2. Riduzione del problema di Sturm-Liouville ad un'equazione integrale (297). 3. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni (298). 4. Determinazione degli autovalori e delle autofunzioni (300).

§ 23. Funzioni di Bessel 301
1. Definizione e proprietà semplici delle funzioni di Bessel (302). 2. Proprietà di ortogonalità (303). 3. Relazioni ricorrenti per le funzioni di Bessel (305). 4. Radici delle funzioni di Bessel (306). 5. Problema al contorno agli autovalori per l'equazione di Bessel (308). 6. Problema al contorno non omogeneo per l'equazione di Bessel (309). 7. Completezza del sistema di funzioni di Bessel (310). 8. Altre funzioni cilindriche (312). 9. Esercizi (313).

§ 24. Funzioni armoniche 314
1. Formula di Green (314). 2. Estensione delle formule di Green (316). 3. Teorema della media (318). 4. Principio del massimo (319). 5. Corollari del principio del massimo (320). 6. Eliminazione delle singolarità di una funzione armonica (321). 7. Funzioni armoniche generalizzate (322). 8. Altre proprietà delle funzioni armoniche (323). 9. Un analogo del teorema di Liouville (324). 10. Comportamento di una funzione armonica all'infinito (325). 11. Esercizi (326).

§ 25. Funzioni sferiche 327
1. Definizione di funzioni sferiche (327). 2. Equazione differenziale per le funzioni sferiche (328). 3. Polinomi di Legendre (329). 4. Funzione generatrice (331). 5. Funzioni di Legendre associate (333). 6. Funzioni sferiche (334). 7. Formula di Laplace (336). 8. Funzioni solide (337). 9. Esercizi (338).

§ 26. Metodo di Fourier per il problema agli autovalori 338
1. Schema generale del metodo di Fourier (338). 2. Esempi (340).

§ 27. Potenziale newtoniano 344
1. Potenziale di volume (344). 2. Potenziali di semplice strato e di doppio strato (345). 3. Significato fisico dei potenziali newtoniani (348). 4. Superfici di Ljapunov (348). 5. Proprietà dei potenziali di semplice strato e di doppio strato su una superficie S (352). 6. Discontinuità del potenziale di doppio strato (354). 7. Discontinuità della derivata normale del potenziale di semplice strato (356). 8. Esercizi (357).

§ 28. Problemi al contorno per le equazioni di Laplace e di Poisson nello spazio 358
1. Impostazione dei principali problemi al contorno (358). 2. Teoremi di unicità della soluzione dei problemi al contorno (359). 3. Riduzione dei problemi al contorno ad equazioni integrali (361). 4. Studio delle equazioni integrali (363). 5. Soluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann per una sfera (366).

§ 29. Funzione di Green del problema di Dirichlet 368
1. Definizione e proprietà della funzione di Green (368). 2. Esempi di costruzione della funzione di Green (metodo delle riflessioni) (370). 3. Soluzione di un problema al contorno mediante la funzio-

ne di Green (373). 4. Formula di Poisson (373). 5. Riduzione di un problema al contorno ad un'equazione integrale (374). 6. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni (377). 7. Esercizi (379).

§ 30. Equazioni di Helmholtz 380
1. Condizioni di Sommerfeld per la radiazione (380). 2. Equazione di Helmholtz omogenea (381). 3. Potenziali (383). 4. Principio d'assorbimento limite (385). 5. Principio d'ampiezza limite (386). 6. Problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz (387). 7. Problemi al contorno esterni per una sfera (388). 8. Esercizi (389).

§ 31. Problemi al contorno per l'equazione di Laplace in un piano 390
1. Impostazione ed unicità delle soluzioni dei problemi al contorno principali (390). 2. Potenziale logaritmico (391). 3. Risolvibilità dei problemi al contorno (394). 4. Soluzione dei problemi al contorno per un cerchio (397). 5. Funzione di Green del problema di Dirichlet (398). 6. Soluzione del problema di Dirichlet per una regione a connessione semplice (400). 7. Esercizi (401).

VI. Problemi misti

§ 32. Metodo di Fourier 403
1. Equazione iperbolica omogenea (404). 2. Equazione iperbolica non omogenea (405). 3. Equazione parabolica (408). 4. Equazione di Schrödinger (408). 5. Equazione ellittica (409). 6. Esempi (410). 7. Esercizi (416).

§ 33. Problema misto per un'equazione di tipo iperbolico 416
1. Soluzione classica. Integrale dell'energia (416). 2. Unicità e dipendenza continua della soluzione classica (418). 3. Funzioni continue in $\mathscr{L}_2(G)$ (421). 4. Soluzione generalizzata (423). 5. Unicità e dipendenza continua della soluzione generalizzata (426). 6. Esistenza di una soluzione generalizzata (427). 7. Esistenza della soluzione classica (430).

§ 34. Problema misto per un'equazione di tipo parabolico 432
1. Soluzione classica. Principio del massimo (433). 2. Unicità e dipendenza continua della soluzione classica (434). 3. Soluzione generalizzata (436). 4. Esistenza della soluzione generalizzata (437). 5. Esistenza della soluzione classica (438).

Bibliografia 439

Indice analitico 443

Indice dei nomi 447

Al lettore italiano

L'idea di scrivere questo libro mi è venuta all'inizio degli anni sessanta quando sono stato invitato dall'Istituto fisico-tecnico di Mosca per tenere un corso di conferenze sulle Equazioni della fisica matematica agli studenti del terzo anno. Inoltre, mi è stato chiesto che nel Corso fosse trattata la teoria della funzione delta di Dirac e le sue applicazioni ai problemi della fisica matematica. Tenendo conto del livello elevato di preparazione matematica degli studenti, è stato deciso di esporre il Corso in base alla teoria delle funzioni generalizzate, cioè in base alla teoria che estende in modo essenziale i limiti dell'analisi matematica classica e che penetra profondamente in molte sezioni della matematica, della fisica e della tecnica. Un elemento importante di questo concetto è la nozione della soluzione generalizzata che risale ai tempi di Eulero. Come risultato, nel 1967 la Casa editrice Nauka ha pubblicato la prima edizione di questo libro che è un'esposizione estesa del corso di lezioni. Il libro è stato pubblicato tre volte ed ogni edizione nuova veniva rielaborata ed aggiornata. Attualmente la Casa editrice Nauka sta preparando la quinta ristampa del libro.

Attualmente questo libro viene largamente utilizzato nell'insegnamento del Corso di equazioni della fisica matematica nelle Scuole superiori dell'Unione Sovietica ed all'estero. Esso è bene accetto anche dagli aspiranti, nella preparazione agli esami, per il grado scientifico superiore. Diverse edizioni di questo libro sono state tradotte negli USA, in Giappone, RDT, Ungheria, Romania. Il libro è stato anche tradotto in inglese nella Casa editrice Mir.

Supplemento essenziale a questo libro è il Manuale di problemi delle equazioni della fisica matematica (Mosca, Nauka, 1974, 1982) scritto da un gruppo di professori e di insegnanti dell'Istituto fisico-tecnico di Mosca e tradotto nella Casa editrice Mir in francese ed inglese. Il manuale è stato anche tradotto in Polonia, Ungheria e Romania. I lettori, il cui intento è di studiare più profondamente la teoria delle distribuzioni ed alcune sue applicazioni nella fisica matematica, possono ricorrere ad un'altra mia monografia, *Le distribuzioni nella fisica matematica* (Edizioni Mir, 1981).

Mi fa piacere che questo è il secondo mio libro tradotto in italiano il che, spero, contribuirà all'ulteriore rafforzamento dei legami tra i matematici sovietici ed italiani.

Sono riconoscente al traduttore Ernest Kozlov per il suo grande impegno nel tradurre questo libro in italiano.

10 Febbraio del 1987

L'Autore

Prefazione alla quarta edizione

L'obbiettivo della fisica matematica è la costruzione e lo studio di modelli matematici dei fenomeni fisici. *La fisica matematica, dai tempi di Newton, si è sviluppata parallelamente allo sviluppo della fisica e della matematica. Alla fine del XVII secolo furono scoperti il calcolo differenziale ed integrale (Isaac Newton e Gottfried Leibniz) e furono enunciate le leggi fondamentali della meccanica classica e la legge della gravitazione universale (Newton). Nel XVIII secolo, con lo studio delle vibrazioni delle corde e dei perni, cominciarono a prendere forma i metodi della fisica matematica, nonché le soluzioni dei problemi legati all'acustica ed all'idrodinamica; nello stesso periodo si posero le basi della meccanica analitica (Jean D'Alembert, Leonard Eulero, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange, Pierre Laplace). Nel XIX secolo la fisica matematica riceve un nuovo impeto in relazione ai problemi della conduzione termica, della diffusione, dell'elasticità, dell'ottica, dell'elettrodinamica, dei processi ondulatori non lineari, ecc.; si creano le teorie del potenziale e della stabilità di moto (Jean Fourier, Siméon Poisson, Karl Gauss, Augustin Cauchy, M.V. Ostrogradskij, Peter Dirichlet, Georg Riemann, S.V. Kovalevskaja, Sir George Stokes, Henri Poincaré, A.M. Ljapunov, V.A. Steklov, David Hilbert). Nel XX secolo diventano parte della fisica matematica i problemi della fisica quantistica e della teoria della relatività, nonché i nuovi problemi della dinamica dei gas, del trasporto di particelle e della fisica del plasma.*

Molti problemi della fisica matematica classica si riducono ai problemi al contorno per le equazioni differenziali (*integrodifferenziali*), equazioni della fisica matematica. *I principali mezzi matematici utilizzati nello studio di questi problemi sono: la teoria delle equazioni differenziali (ivi compresi i rami relativi, quali la teoria delle equazioni integrali ed il calcolo variazionale), la teoria delle funzioni, l'analisi funzionale, la teoria delle probabilità, i metodi approssimati ed il calcolo numerico.*

Lo studio dei modelli matematici della fisica quantistica ha richiesto di utilizzare nuovi rami di matematica quali la teoria delle funzioni generalizzate, la teoria di più variabili complesse e quella dei metodi topologici ed algebrici.

Con l'invenzione dei calcolatori elettronici si è allargata sostanzialmente la classe dei modelli matematici che permettono un'analisi dettagliata con la possibilità reale di realizzare esperimenti di calcolo. In quest'interazione intensa tra la fisica teorica e la matematica moderna si creano classi di modelli qualitativamente nuovi per la fisica matematica moderna.

Tra i problemi della fisica matematica, occupa un posto particolare la classe dei problemi correttamente posti, *cioè dei problemi per cui la soluzione esiste ed è una funzione continua dei dati. Benché queste richieste sembrino assolutamente naturali, è tuttavia* necessario dimostrarle nel quadro del modello matematico adottato. *La dimostrazione di correttezza è il primo passo per lo sviluppo di un modello matematico: il modello non è contraddittorio (esiste una soluzione), esso descrive univocamente il processo fisico studiato (la soluzione è unica), il modello è poco sensibile a piccoli errori dei risultati di misure delle quantità fisiche (la soluzione è una funzione continua dei dati).*

Questo libro esamina prima di tutto i problemi al contorno correttamente posti per le equazioni differenziali della matematica fisica classica. Ma, a differenza dei metodi tradizionali d'esposizione, nel libro è vastamente utilizzato il concetto di soluzione generalizzata. *Le soluzioni generalizzate appaiono quando vengono studiate le relazioni integrali del tipo bilancio locale e tenendo conto di queste soluzioni, si arriva alle* impostazioni generalizzate di problemi al contorno.

Una definizione esatta della soluzione generalizzata si basa sul concetto di variabile generalizzata *e, in generale,* di funzione generalizzata. *La teoria delle funzioni generalizzate è un mezzo valido per lo studio dei problemi al contorno lineari della fisica matematica sia nella impostazione generalizzata che in quella classica, perciò un capitolo speciale di questo libro è dedicato all'esposizione della teoria delle funzioni generalizzate.*

Alcune sezioni del libro utilizzano il linguaggio dell'analisi funzionale (ad un livello elementare) il che, da una parte, aiuta il lettore a leggere la letteratura scientifica moderna, e, d'altra parte, riduce considerevolmente l'esposizione.

Il materiale è esposto come segue. Il capitolo I contiene l'impostazione e la classificazione dei principali problemi al contorno della fisica matematica e sono inoltre riportati nuovi fatti della teoria delle equazioni differenziali. Nel capitolo II vengono considerati gli elementi della teoria delle funzioni generalizzate, ivi compresa la trasformazione di Laplace delle funzioni generalizzate (calcolo delle operazioni). Nel capitolo III vengono costruite soluzioni fondamentali per gli operatori differenziali a coefficienti costanti e vengono studiati i problemi di Cauchy generalizzato e classico per l'equazione d'onda e per l'equazione di conduzione termica. Una particolarità dell'esposizione è che, nell'impostazione generalizzata del problema di Cauchy, le condizioni iniziali vengono incluse nelle sorgenti d'azione istantanea, il che permette di costruire la sua soluzione nella forma di una convoluzione della sorgente con una soluzione fondamentale appropriatamente scelta.

Un paragrafo speciale è dedicato al problema di Cauchy per equazioni iperboliche a due variabili (metodo di Riemann). Il capitolo IV contiene la teoria delle equazioni integrali con nucleo polare. Sono dimostrati i teoremi di Fredholm, di Hilbert-Schmidt, di Jentsch, di Kellog e di Mercer.

Nel capitolo V vengono studiati i problemi degli autovalori per le equazioni ellittiche, ivi compreso il problema di Sturm-Liouville, nonché i problemi al contorno per le equazioni di Poisson e Helmholtz nello spazio e per l'equazione di Laplace nel piano. Viene esposta la teoria elementare delle funzioni armoniche, nonché delle funzioni di Bessel e delle funzioni sferiche. Nel capitolo VI vengono considerati i problemi misti per le equazioni iperboliche e paraboliche nelle impostazioni classica e generalizzata. Viene formulato e dimostrato il metodo di Fourier.

Molti paragrafi del libro contengono problemi ed esercizi. Alcuni problemi vengono formulati nella forma di teoremi e rappresentano una sostanziale aggiunta al materiale principale. Per gli esercizi viene consigliato il libro Problemi relativi alle equazioni della fisica matematica *di V.P. Michajlov, A.A. Vašarin, Ch.Ch. Karimova, Ju.V. Sidorov, M.I. Šabunin, Nauka, Mosca,* 1974.

Questo libro è una versione ampliata delle lezioni concernenti le equazioni della fisica matematica che l'autore ha tenuto per molti anni agli studenti dell'Istituto fisico-tecnico di Mosca. Esso è destinato agli studenti, ai laureati di matematica e di fisica, agli ingegneri che hanno frequentato corsi concernenti l'analisi vettoriale ed hanno una preparazione matematica molto buona.

Colgo l'occasione di esprimere la mia sincera gratitudine a tutti coloro che mi hanno aiutato con commenti costruttivi a perfezionare questo libro. Ringrazio in modo particolare N.N. Bogoljubov, S.L. Sobolev, V.P. Michajlov, L.D. Kudriavtsev, B.M. Stepanov, Ch.Ch. Karimova, Ju.N. Drožžinov, V.A. Iljin, I.A. Kiprianov, V.V. Žarinov, Ju.P. Krivenkov e V.D. Čarušnikov.

Sono anche molto grato a N.Ja. Vladimirova per il suo aiuto alla preparazione del manoscritto ed alla lettura delle bozze.

V.S. Vladimiro

I. Impostazione dei problemi al contorno della fisica matematica

§ 1. *Concetti e proposizioni della teoria degli insiemi, della teoria delle funzioni e della teoria degli operatori*

Sia A un insieme arbitrario. Se l'elemento a è contenuto (non è contenuto) nell'insieme A, scriviamo $a \in A$ ($a \overline{\in} A$). Sia B un altro insieme. Indichiamo con $A \subset B$ l'*inclusione* di A in B, con $A = B$ l'*identità* di A e B, con $A \cup B$ l'*unione* di A e B, con $A \cap B$ l'*intersezione* di A e B, con $A \setminus B$ il *complemento* di B rispetto ad A (fig. 1), con $A \times B$ il *prodotto* di A e B (l'insieme di coppie (a, b), $a \in A$, $b \in B$), e con $\varnothing$ un insieme *vuoto*.

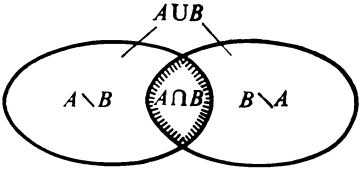


Fig. 1.

1. Insiemi puntiformi in R^n. Indichiamo con R^n uno spazio euclideo reale di n dimensioni, e con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y, ξ e così via i suoi punti, dove x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sono le coordinate del punto x. Con i simboli (x, y) e $|x|$ denotiamo rispettivamente il *prodotto scalare* e la *lunghezza* (*norma*) in R^n

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$
$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Quindi, il numero $|x - y|$ è la distanza euclidea tra i punti x ed y.

L'insieme di punti x appartenenti a R^n che soddisfano la disuguaglianza $|x - x_0| < R$ si dice *sfera aperta* di raggio R con il centro al punto x_0. Denotiamo questa sfera con $U(x_0; R)$; $U_R = U(0; R)$.

La successione di punti $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})$, $k = 1, 2, \ldots$, è detta *convergente* verso il punto x in R^n, $x_k \to x$, $k \to \infty$, se $|x_k - x| \to 0$, $k \to \infty$. La successione x_k, $k = 1, 2, \ldots$, si dice *convergente in se stessa* in R^n, se $|x_k - x_p| \to 0$, $k \to \infty$, $p \to \infty$.

La seguente proposizione esprime la completezza dello spazio R^n (*principio di convergenza di Cauchy*). *Affinché una successione di punti converga in R^n, è necessario e sufficiente che essa sia convergente in se stessa in R^n.*

Un insieme si dice *limitato* in R^n se esiste una sfera contenente quest'insieme.

La seguente proposizione esprime la compattezza dello spazio R^n (*teorema di Bolzano-Weierstrass*). *È possibile scegliere una successione convergente in ogni insieme limitato infinito in* R^n.

Un punto x_0 si dice punto *interno* di un insieme se esiste una sfera $U(x_0; \varepsilon)$ appartenente a quest'insieme. Un insieme è detto *aperto* se tutti i suoi punti sono interni. Un insieme si dice *connesso* se due suoi punti arbitrari si possono congiungere mediante una curva regolare a tratti appartenente a quest'insieme. Un insieme aperto connesso rappresenta *una regione*. Il punto x_0 è detto *punto limite* di un insieme A se esiste una successione x_k, $k = 1, 2, \ldots$ tale che $x_k \in A$, $x_k \neq x_0$, $x_k \to x_0$, $k \to \infty$. Se aggiungiamo all'insieme A tutti i suoi punti limite, l'insieme risultante si dice *chiusura* di A ed è denotato con $\bar{A}$; è chiaro che $A \subset \bar{A}$. Se un insieme coincide con la sua chiusura, esso si dice *chiuso*. Un insieme limitato chiuso si chiama *compatto*. È detto *intorno* di A ogni insieme aperto contenente A; si dice *intorno* ε, A_ε, di un insieme A l'unione di sfere $U(x; \varepsilon)$ in cui x percorre A: $A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} U(x; \varepsilon)$.

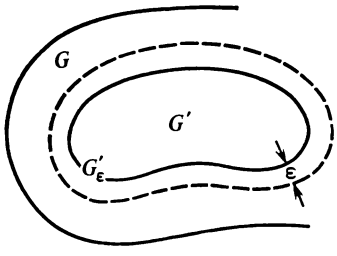


Fig. 2.

La funzione $\chi_A(x)$, uguale a 1 per $x \in A$ ed uguale a 0 per $x \notin A$, si chiama *funzione caratteristica* dell'insieme A.

È valida la seguente proposizione concernente il ricoprimento (*lemma di Heine-Borel*). *Se il compatto* K *è ricoperto da un sistema di sfere aperte, da questo ricoprimento si può scegliere un sottosistema finito che ricopre* K.

Sia G una regione. I punti di chiusura $\bar{G}$ non appartenenti a G formano un insieme chiuso S detto *frontiera* di G, di modo che $S = \bar{G} \setminus G$. Per esempio, funge da frontiera della sfera aperta $U(x_0; R)$ la sfera $|x - x_0| = R$. Indichiamo questa sfera con $S(x_0; R)$; $S_R = S(0; R)$.

Diremo che la superficie S appartiene *alla classe* C^p, $p \geqslant 1$, se, nell'intorno di ogni punto $x_0 \in S$, essa è rappresentata dall'equazione $\omega_{x_0}(x) = 0$, dove grad $\omega_{x_0}(x) \neq 0$ e la funzione $\omega_{x_0}(x)$ è continua insieme con tutte le derivate, fino all'ordine p incluso, nell'intorno menzionato. La superficie S è detta *superficie regolare a tratti* se è costituita da un numero finito di superficie di classe C^1.

In seguito considereremo soltanto le regioni con le frontiere regolari a tratti; con $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_x$ denotiamo il vettore unitario lungo la normale esterna alla frontiera S nel punto $x \in S$. Supponiamo che il punto x_0 appartenga alla superficie regolare a tratti S. Si dice *intorno del punto* x_0, *sulla superficie* S, la parte connessa dell'insieme $S \cap U(x_0; R)$ che contiene il punto x_0.

Una regione limitata G' è detta sottoregione che si trova rigorosamente nella regione G se $\overline{G'} \subset G$; in questo caso si scrive $G' \Subset G$. In virtù del lemma di Heine-Borel esiste un numero $\varepsilon > 0$ tale che $G'_\varepsilon \Subset G$ (fig. 2).

2. Classi di funzioni $C^p(G)$ e $C^p(\overline{G})$. Sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ un vettore intero con componenti non negative α_j detto multiindice. Denotiamo con $D^\alpha f(x)$ la derivata della funzione $f(x)$ di ordine $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(x) = f(x);$$

$$D = (D_1, D_2, \ldots, D_n), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Per le derivate di ordine inferiore utilizzeremo a volte anche le seguenti notazioni: f_{x_i}, $f_{x_i x_j}$ ecc. Utilizzeremo anche le seguenti notazioni abbreviate:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$$

Un insieme di funzioni (complesse) f continue insieme con le derivate $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \leqslant p$ $(0 \leqslant p < \infty)$, forma, nella regione G *una classe di funzioni* $C^p(G)$. Le funzioni f di classe $C^p(G)$ le cui derivate $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \leqslant p$, ammettono un prolungamento continuo nella chiusura $\overline{G}$, formano *una classe di funzioni* $C^p(\overline{G})$. Qui il valore di $D^\alpha f(x)$, $x \in S$, $|\alpha| \leqslant p$, è sottinteso come $\lim D^\alpha f(x')$ per $x' \to x$, $x' \in G$. Denotiamo con $C^\infty(G)$ la classe di funzioni appartenenti a $C^p(G)$, per tutti i valori di p; in modo analogo è anche definita la classe di funzioni $C^\infty(\overline{G})$.

Quindi, la classe $C^0(G)$ è composta da tutte le funzioni continue in G, mentre la classe $C^0(\overline{G})$ può essere identificata come l'insieme di tutte le funzioni continue su $\overline{G}$. Per abbreviare la scrittura denotiamo $C(G) = C^0(G)$, $C(\overline{G}) = C^0(\overline{G})$. A volte ometteremo l'argomento G o $\overline{G}$ associato alla classe C^p.

Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia data su un insieme contenente la regione G. In questo caso il fatto che f appartenga alla classe $C^p(\overline{G})$ significa che la *restrizione* f su G appartiene a $C^p(\overline{G})$. Per esempio, la funzione $H(x)$ che è nulla per $x < 0$, è uguale a 1/2 per $x = 0$ ed a 1 per $x > 0$ ed appartiene alle classi $C^\infty(x \leqslant 0)$ e $C^\infty(x \geqslant 0)$. Inoltre, se H è considerata come una funzione di classe $C^\infty(x \leqslant 0)$, il suo valore, per $x = 0$, dev'essere preso uguale a zero, e se H è una funzione di classe $C^\infty(x \geqslant 0)$, il suo valore in 0 dev'essere preso uguale a 1 (conformemente alle definizioni).

Le classi di funzioni introdotte rappresentano *insiemi lineari*, cioè se le funzioni f e g appartengono ad una di queste classi, ogni

combinazione lineare $\lambda f + \mu g$, dove λ e μ sono numeri complessi arbitrari, appartiene anche a questa classe.

La funzione f è detta *continua a tratti* in R^n se esiste un numero finito o numerabile di regioni G_k, $k = 1, 2, \ldots$, senza punti in comune con le frontiere regolari a tratti tali che, ogni sfera sia coperta da un numero finito di regioni chiuse $\{\bar{G}_k\}$ e $f \in C(\bar{G}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$

Una funzione continua a tratti si dice *finita* se si annulla all'esterno di una certa sfera.

Sia $\varphi \in C(R^n)$. Si dice *supporto* della funzione continua φ la chiusura dell'insieme di tutti i punti dove $\varphi(x) \neq 0$; il supporto φ è denotato con supp φ.

Quindi, la funzione $\varphi(x)$ è finita se e solo se supp φ è limitato.

3. Spazio delle funzioni continue $C(T)$. Sia T un insieme chiuso, per esempio, la chiusura $\bar{G}$ o la frontiera S della regione G. Denotiamo con $C(T)$ la classe di funzioni continue e limitate su T. Diamo alla classe $C(T)$ *una norma*, ponendo

$$\| f \|_C = \sup_{x \in T} | f(x) |, \quad f \in C(T). \tag{1}$$

La norma (1) possiede le seguenti tre proprietà caratteristiche di una norma:

a) $\| f \|_C \geqslant 0$; $\| f \|_C = 0$, se e solo se $f = 0$;

b) $\| \lambda f \|_C = | \lambda | \, \| f \|_C$, dove λ è un qualunque numero complesso;

c) $\| f + g \|_C \leqslant \| f \|_C + \| g \|_C$ (disuguaglianza del triangolo).

In generale, ogni insieme lineare che ha una norma con le proprietà a)-c), si dice *spazio normato lineare*. Quindi possiamo dire che $C(T)$ è uno spazio normato lineare.

La successione di funzioni f_k, $k = 1, 2, \ldots$, appartenenti a $C(T)$ si dice *convergente* alla funzione $f \in C(T)$ *nello spazio* $C(T)$, $f_k \to f$, $k \to \infty$ in $C(T)$, se $\| f_k - f \|_C \to 0$, $k \to \infty$. Evidentemente, il fatto che $f_k \to f$, $k \to \infty$ in $C(T)$ è equivalente alla *convergenza uniforme* della successione delle funzioni $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, alla funzione $f(x)$ sull'insieme T:

$$f_k(x) \overset{x \in T}{\rightrightarrows} f(x), \quad k \to \infty.$$

La successione di funzioni f_k, $k = 1, 2, \ldots$, in $C(T)$ si dice *convergente in se stessa* in $C(T)$, se $\| f_k - f_p \|_C \to 0$, $k \to \infty$, $p \to \infty$.

La seguente proposizione esprime la proprietà di completezza dello spazio $C(T)$ (*teorema di Cauchy*). *Perché una successione di funzioni in* $C(T)$ *converga in* $C(T)$, *è necessario e sufficiente che essa sia convergente in se stessa in* $C(T)$.

Sono valide le seguenti proposizioni.

Teorema di Weierstrass. *Se G è una regione limitata e $f \in C^p(\overline{G})$, per $\varepsilon > 0$ qualsiasi esiste un polinomio P tale che*

$$\| D^\alpha f - D^\alpha P \|_C < \varepsilon \quad \text{per tutti gli} \quad |\alpha| \leqslant p.$$

Lemma di Dini [1]. *Se una successione monotona di funzioni continue su un compatto K è convergente, in ogni punto, ad una funzione continua su K, essa converge uniformemente su K.*

La serie composta delle funzioni $u_k \in C(T)$ è detta *regolarmente convergente su T*, se la serie di valori assoluti di $|u_k(x)|$ converge in $C(T)$, cioè converge uniformemente su T.

Un insieme $\mathscr{M} \subset C(T)$ si dice *equicontinuo*, se per qualsiasi $\varepsilon > 0$ esiste un numero δ_ε tale che, per tutte le $f \in \mathscr{M}$, ha luogo la disuguaglianza $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, non appena $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$, $x_1, x_2 \in T$.

Una funzione $f \in C(T)$ è detta *continua su T secondo Hölder*, se esistono numeri $C > 0$ ed α, $0 < \alpha \leqslant 1$, tali che, per tutti gli $x_1 \in T$ e $x_2 \in T$, è verificata la disuguaglianza

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C |x_1 - x_2|^\alpha;$$

se $\alpha = 1$ la funzione $f(x)$ è detta *continua secondo Lipschitz su T*.

Supponiamo che le funzioni $f(x)$ e $\omega(x)$ siano assegnate negli intorni di un punto x_0 (finito o all'infinito). Scriveremo

$$f(x) = O[\omega(x)] \quad \text{o} \quad f(x) = o[\omega(x)], \quad x \to x_0,$$

se il rapporto $f(x)/\omega(x)$ è limitato o tende a 0 per $x \to x_0$ rispettivamente.

4. Integrale di Lebesgue. Si dice che un insieme $A \subset R^n$ ha *misura zero* se, per qualsiasi $\varepsilon > 0$, esso può essere coperto con sfere di volume totale inferiore a ε.

Da questa definizione segue che ogni sottoinsieme di un insieme con misura zero ha anche misura zero e l'unione di un numero di misure zero non superiore a quello numerabile ha anch'essa misura zero. Per esempio, ogni insieme numerabile ed ogni superficie regolare a tratti hanno misura zero.

Si dice che una certa proprietà è verificata *quasi ovunque* (*q.o.*) *in una regione $G \subset R^n$*, se l'insieme di punti della regione G che non possiedono questa proprietà, ha misura zero. In questo caso invece di dire « quasi ovunque in R^n » diremo semplicemente « quasi ovunque ».

Assumiamo che tutte le funzioni siano date in tutto lo spazio R^n e siano finite q.o.

La funzione f è detta *misurabile*, se essa coincide q.o. con il limite di una successione di funzioni continue a tratti convergente q.o.

Questa definizione implica che, se le funzioni f e g sono misurabili, lo sono anche le funzioni $f + g$, fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$,

[1] Si veda V. I. Smirnov [2], cap. I.

$|f|$ e f/g, se $g \neq 0$; ogni funzione coincidente q.o. con il limite di una successione di funzioni misurabili convergenti q.o., è misurabile anch'essa.

Un insieme $A \subset R^n$ è detto *misurabile*, se la sua funzione caratteristica $\chi_A(x)$ (si veda il § 1.1) [1] è misurabile.

Le funzioni non misurabili (ed anche gli insiemi) sono molto irregolari e nessuna di queste funzioni è costruita in una forma esplicita; solo teoricamente si può dimostrare la loro esistenza utilizzando il cosiddetto assioma di scelta. Ciò significa che *tutte le funzioni e tutti gli insiemi che possiamo incontrare saranno misurabili. Perciò in seguito supporremo, senza fare ogni volta una riserva, che tutti gli insiemi considerati sono misurabili e tutte le funzioni sono misurabili e finite q.o.*

Sia $f(x)$ una funzione continua a tratti finita. Denotiamo con $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ un elemento di volume in R^n, di modo che l'integrale di Riemann n-multiplo della funzione f in R^n sarà brevemente scritto nella forma

$$\int f(x)\, dx = \int_{R^n} \int \cdots \int f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Supponiamo che una funzione (reale) $f(x)$ coincida q.o. con il limite di una successione non decrescente di funzioni continue a tratti $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ dotata di una successione limitata di integrali (di Riemann) $\int f_k(x)\, dx$, $k = 1, 2, \ldots$ Il limite della successione limitata non decrescente di questi integrali si dice *integrale di Lebesgue della funzione* $f(x)$ ed è denotato con il simbolo $\int f(x)\, dx$, di modo che

$$\int f(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\, dx.$$

Denotiamo con $\mathcal{L}^+$ la classe di queste funzioni.

Affinché questa definizione sia corretta, si deve dimostrare che l'*integrale di Lebesgue della funzione* $f \in \mathcal{L}^+$ *non dipende dalla successione* $\{f_k\}$.

Dimostriamo prima di tutto che se $f \in \mathcal{L}^+, f(x) \geqslant 0$ *q.o. e* $\{f_k\}$ *è una successione che definisce l'integrale di Lebesgue della funzione* f, *si ha*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\, dx \geqslant 0. \tag{2}$$

Per dimostrare la (2) prendiamo un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Supponiamo che i numeri positivi R e M siano tali che $f_1(x) = 0$, $|x| > R$ e $f_1(x) \geqslant -M$, $x \in \overline{U}_R$, di modo che

$$f_k(x) \geqslant 0,\quad |x| > R,\quad f_k(x) \geqslant -M,\quad x \in \overline{U}_R,\quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

[1] La nota di tipo § 1.2 significa: il numero 2 del § 1.

Denotiamo con A l'insieme di tutti i punti della sfera $\overline{U}_R$, sui quali è discontinua almeno una delle funzioni $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, o $f_k(x) \not\to f(x)$, $k \to \infty$. L'insieme A ha misura zero e, quindi, può essere coperto con sfere $U(x_j; r_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, di volume totale inferiore ad ε. Dunque, sul compatto $K = \overline{U}_R \setminus \bigcup_j U(x_j; r_j)$ le funzioni $f_k(x)$ sono continue e $f_k(x) \to f(x) \geqslant 0$, $k \to \infty$, e quindi, per ogni punto x di K, esistono numeri N_x e r_x tali che $f_{N_x}(x') > -\varepsilon$, $x' \in U(x; r_x) \cap K$. Dunque, il compatto K è ricoperto con un sistema di sfere aperte $U(x; r_x)$, $x \in K$. Conformemente al lemma di Heine-Borel, estraiamo da questo ricoprimento un ricoprimento finito, e sia N_0 il maggiore dei corrispondenti numeri N_x. Visto che le funzioni $f_k(x)$ non decrescono, in virtù della scelta del numero N_0, si ha

$$f_{N_0}(x) \geqslant f_{N_x}(x) \geqslant -\varepsilon, \quad x \in K \subset \overline{U}_R.$$

Da ciò e dalla (3) per tutti i $k > N_0$ abbiamo

$$\int f_k(x)\,dx \geqslant \int f_{N_0}(x)\,dx \geqslant \int\limits_{U_R} f_{N_0}(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant -\varepsilon \int\limits_{U_R} dx - M \sum_j \int\limits_{U(x_j; r_j)} dx \geqslant -\varepsilon \left(\int\limits_{U_R} dx + M \right),$$

il che, data l'arbitrarietà di ε, implica la disuguaglianza richiesta.

Sia ora $\{g_j\}$ un'altra successione che definisce l'integrale di Lebesgue della funzione $f \in \mathcal{L}^+$. Allora, dalla disuguaglianza $\lim\limits_{k\to\infty} [f_k(x) - g_j(x)] = f(x) - g_j(x) \geqslant 0$ (q.o.), segue, in virtù della (2), la disuguaglianza

$$\lim_{k\to\infty} \int [f_k(x) - g_j(x)]\,dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x) - \int g_j(x)\,dx \geqslant 0, \; j = 1, 2, \ldots$$

e quindi si ha

$$\lim_{j\to\infty} \int g_j(x)\,dx \leqslant \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\,dx.$$

Cambiando i ruoli delle successioni $\{f_k\}$ e $\{g_j\}$ otteniamo la disuguaglianza inversa e, quindi, è valida l'uguaglianza richiesta

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int g_j(x)\,dx.$$

Una funzione reale $f(x)$ è detta *integrabile secondo Lebesgue* (*sommabile*), se essa può essere rappresentata nella forma di una differenza di due funzioni della classe $\mathcal{L}^+$:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad f_j \in \mathcal{L}^+, \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

Il numero

$$\int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

si dice *integrale di Lebesgue della funzione f*. Denotiamo la classe di funzioni integrabili secondo Lebesgue con $\mathcal{L}$. Tutte le funzioni della classe $\mathcal{L}$ sono misurabili e finite ovunque.

Per giustificare questa definizione si deve dimostrare che l'*integrale di Lebesgue della funzione* $f \in \mathcal{L}$ *non dipende dalla rappresentazione* (4).

Infatti, se

$$f_1 - f_2 = f = g_1 - g_2, \quad f_j \in \mathcal{L}^+, \quad g_j \in \mathcal{L}^+,$$

si ha $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$. Da questo e dall'additività dell'integrale di Lebesgue per le funzioni della classe $\mathcal{L}^+$ segue l'uguaglianza richiesta

$$\int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx = \int g_1(x)\,dx - \int g_2(x)\,dx.$$

Una funzione a valori complessi $f(x)$ è detta *integrabile secondo Lebesgue*, cioè $f \in \mathcal{L}$, se $\operatorname{Re} f \in \mathcal{L}$ ed $\operatorname{Im} f \in \mathcal{L}$; il numero

$$\int \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int \operatorname{Im} f(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

si dice *integrale di Lebesgue della funzione f*.

Diremo che una funzione $f(x)$ è *integrabile secondo Lebesgue su un insieme misurabile* A, $f \in \mathcal{L}(A)$, *se* $f\chi_A \in \mathcal{L}$; il numero

$$\int f(x)\,\chi_A(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

si dice *integrale di Lebesgue della funzione f rispetto all'insieme A*

Una funzione $f(x)$ è detta *integrabile localmente secondo Lebesgue in una regione G*, cioè $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(G)$, se $f \in \mathcal{L}(G')$ per tutti i $G' \Subset G$ misurabili. Introduciamo la seguente notazione: $\mathcal{L}_{\text{loc}}(R^n) = \mathcal{L}_{\text{loc}}$.

Conformemente a queste definizioni ogni funzione finita continua a tratti è integrabile secondo Lebesgue ed i suoi integrali di Riemann e di Lebesgue coincidono. D'altra parte, esistono funzioni integrabili secondo Lebesgue e non integrabili secondo Riemann, per esempio, la funzione di Dirichlet:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irrazionale,} \\ 1, & x \text{ razionale.} \end{cases}$$

L'integrale di Lebesgue della funzione $f_0(x)$ è nullo ($f_0 \in \mathcal{L}^+$).

Si può dimostrare che *se le funzioni* $f(x)$ *e* $|f(x)|$ *sono integrabili secondo Riemann* (*possibilmente, in un senso improprio*), *esse sono anche integrabili secondo Lebesgue ed i loro integrali coincidono in entrambi i sensi.*

Tenendo conto di questo fatto, d'ora in poi chiameremo le *funzioni integrabili secondo Lebesgue* semplicemente *funzioni integrabili.*

L'integrale di Lebesgue ha le seguenti proprietà principali (alcune di queste proprietà seguono direttamente dalle definizioni, le di-

mostrazioni di altre proprietà si possono trovare, per esempio, nei libri di F. Riesz e B. Szökefalvi-Nagy [1], cap. II e di A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin [1], cap. V).

a) *Se* $f \in \mathcal{L}$, $\int |f(x)|\,dx = 0$, *si ha* $f(x) = 0$ *quasi ovunque, e viceversa.*

b) *Se* $f \in \mathcal{L}$, $|f| \in \mathcal{L}$; *se* f *è misurabile e* $|f| \in \mathcal{L}$, *si ha* $f \in \mathcal{L}$. *In entrambi i casi è valida la disuguaglianza*

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \leqslant \int |f(x)|\,dx.$$

c) *Se* $g \in \mathcal{L}$, f *è misurabile e* $|f(x)| \leqslant g(x)$ *q.o., si ha* $f \in \mathcal{L}$ *ed è verificata la disuguaglianza*

$$\int |f(x)|\,dx \leqslant \int g(x)\,dx.$$

Ne segue che ogni funzione limitata (misurabile) è integrabile secondo Lebesgue su ogni insieme limitato (misurabile). In particolare, se A è un insieme limitato (misurabile), l'integrale di Lebesgue

$$\int_A dx = \int \chi_A(x)\,dx$$

esiste e si dice *misura di Lebesgue dell'insieme* A. È evidente che la misura di Lebesgue di una regione limitata con contorno regolare a tratti coincide con il suo volume.

d) *L'integrale di Lebesgue è lineare (additivo) rispetto alla funzione integranda*: se $f \in \mathcal{L}$, $g \in \mathcal{L}$ e λ e μ sono numeri complessi, si ha $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}$ ed è valida l'uguaglianza

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx.$$

e) Continuità assoluta dell'integrale di Lebesgue: *se* $f \in \mathcal{L}(G)$, *per qualsiasi* $\varepsilon > 0$, *esiste una regione* $G' \Subset G$ *tale* (fig. 2) *che*

$$\int_{G \setminus G'} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

f) Passaggio al limite sotto il segno dell'integrale di Lebesgue.

Teorema di Lebesgue. *Supponiamo che una successione di funzioni (misurabili)* $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ *converga q.o. alla funzione* $f(x)$. *Se esiste una funzione* $g \in \mathcal{L}$ *tale che* $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ *q.o.*, $k = 1, 2, \ldots$, *si ha* $f \in \mathcal{L}$ *e*

$$\lim_{k \to \infty} \int f_k(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Teorema di B. Levi. *Se una successione non-decrescente (q.o.)* $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ *di funzioni di* $\mathcal{L}$ *converge q.o. alla funzione* $f(x)$

e la successione di integrali $\int f_k(x)\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$ *è limitata, si ha* $f \in \mathcal{L}$ *ed inoltre*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

g) Sostituzione di variabili nell'integrale di Lebesgue. Supponiamo che la trasformazione $x = x(y)$ sia di classe $C^1(\bar{G})$, cioè

$$x_k = x_k(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad x_k \in C^1(G)$$

trasformi in modo biunivoco la regione G nella regione G_1 e sia $D(x/y)$ lo jacobiano di questa trasformazione.

Affinché $f(x)$ *appartenga a* $\mathcal{L}(G)$, *è necessario e sufficiente che* $f[x(y)]\,D(x/y)$ *appartenga a* $\mathcal{L}(G_1)$. *Con questa condizione è valida l'uguaglianza*

$$\int_G f(x)\,dx = \int_{G_1} f[x(y)] \left| D\left(\frac{x}{y}\right) \right| dy.$$

h) Teorema di Fubini (cambiamento dell'ordine d'integrazione nell'integrale di Lebesgue). *Se una funzione* $f(x, y)$ *definita in* R^{n+m}, $x \in R^n$ ed $y \in R^m$, *è misurabile ed esiste anche l'integrale di Lebesgue reiterato della funzione* $|f(x, y)|$

$$\int [|f(x, y)|\,dx]\,dy < \infty$$

si ha $f \in \mathcal{L}$. *Inversamente, se* $f \in \mathcal{L}$, *gli integrali di Lebesgue*

$$\int f(x, y)\,dx, \quad \int f(x, y)\,dy$$

esistono q.o., sono integrabili secondo Lebesgue e sono verificate le uguaglianze

$$\int \left[\int f(x, y)\,dy\right] dx = \int f(x, y)\,dx\,dy = \int \left[\int f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Osserviamo che, se la funzione $f(x, y)$ non è integrabile, gli integrali reiterati possono anche non esistere o possono non essere uguali, per esempio:

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy\right] dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\right] dy = -\frac{\pi}{4}.$$

Nota. L'integrale di Lebesgue su una superficie regolare a tratti S è costruito in modo analogo. In questo caso, per le funzioni $f(x, y)$ definite su $R^n \times S$, è valido il corrispondente teorema di Fubini.

5. Integrali di Lebesgue dipendenti da un parametro. Le condizioni per cui ha luogo la continuità rispetto ad un parametro ed è possibile la derivazione sotto il segno d'integrale, sono meno restrittive per l'integrale di Lebesgue che per l'integrale di Riemann.

Dal teorema di Lebesgue, concernente il passaggio al limite sotto il segno d'integrale di Lebesgue (si veda il § 1.4, f), segue direttamente la seguente affermazione.

Supponiamo che una funzione $f(x, y)$ *data su* $R^n \times A$, $A \subset R^m$, *sia continua in* y *sull'insieme* A *per quasi tutti gli* $x \in R^n$, *e che esista una funzione integrabile* $g(x)$ *tale che, per ogni* $y \in A$, *si abbia* $|f(x, y)| \leqslant g(x)$ *quasi ovunque. In questo caso l'integrale* $\int f(x, y)\,dx$ *è una funzione continua su* A.

È valido il seguente

Teorema (della derivazione sotto il segno d'integrale di Lebesgue). *Supponiamo che una funzione* $f(x, t)$ *assegnata su* $R^n \times (a, b)$ *abbia in* (a, b) *derivata continua (rispetto a* t*)* $f_t(x, t)$ *per quasi tutti gli* $x \in R^n$ *e che esista una funzione integrabile* $g(x)$ *tale che, per qualunque* $t \in (a, b)$, *si abbia* $|f_t(x, t)| \leqslant g(x)$ *quasi ovunque; supponiamo, inoltre, che, per un certo* $t_0 \in (a, b)$, *esista l'integrale* $\int f(x, t_0)\,dx$. *In questo caso la funzione* $\int f(x, t)\,dx$ *appartiene a* $C^1(a, b)$ *ed è valida l'uguaglianza*

$$\frac{d}{dt}\int f(x, t)\,dx = \int \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\,dx. \tag{5}$$

Dimostrazione. In virtù dell'affermazione precedente la funzione $\int f_\tau(x, \tau)\,dx$ è continua rispetto a τ in (a, b). Inoltre, utilizzando il teorema di Fubini (si veda il § 1.4, h), per tutti $t \in (a, b)$ abbiamo

$$\int_{t_0}^{t}\left[\int \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial \tau}\,dx\right]d\tau = \int\left[\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial \tau}\,d\tau\right]dx =$$

$$= \int f(x, t)\,dx - \int f(x, t_0)\,dx,$$

da cui, derivando rispetto a t, si ottiene l'uguaglianza (5) e tutte le altre affermazioni del teorema.

6. Integrali di tipo potenziale. Supponiamo che una funzione $\rho(y)$ sia integrabile (in modo assoluto) su una regione limitata $G \subset R^n$ e si annulli all'esterno di G. L'integrale

$$I(x) = \int_G \frac{\rho(y)\,dy}{|x-y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < n,$$

è detto *integrale di tipo potenziale*. Questi integrali s'incontrano spesso nella fisica matematica.

Dimostriamo prima la validità della disuguaglianza

$$\int_{U_R} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \leqslant C_\alpha R^{n-\alpha}, \quad x \in R^n. \tag{6}$$

Infatti, se $|x| \geqslant 2R$, si ha $|x-y| \geqslant |x| - |y| > R$ per tutti gli $|y| < R$ e, di conseguenza,

$$\int_{U_R} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \leqslant \frac{1}{R^\alpha} \int_{U_R} dy = \frac{\sigma_n}{n} R^{n-\alpha};$$

se, invece, $|x| < 2R$, si ha $|x-y| \leqslant |x| + |y| < 3R$ e

$$\int_{U_R} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = \int_{U(R;x)} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} \leqslant \int_{U_{3R}} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} = \frac{\sigma_n}{n-\alpha} (3R)^{n-\alpha}.$$

Qui σ_n è l'area di superficie di una sfera unitaria in R^n. La stima (6) è dimostrata.

Dalla (6) segue che per tutti gli $R > 0$ esiste l'integrale reiterato

$$\int_G |\rho(y)| \left[\int_{U_R} \frac{dx}{|x-y|^\alpha} \right] dy \leqslant C_\alpha R^{n-\alpha} \int_G |\rho(y)|\, dy.$$

Ma in questo caso, secondo il teorema di Fubini (si veda il § 1.4, h), *l'integrale $I(x)$ esiste quasi ovunque e rappresenta una funzione localmente integrabile in R^n* (si veda il § 1.4).

All'esterno della regione $\overline{G}$ l'integrale $I(x)$, in virtù del § 1.5, è una funzione infinitamente derivabile e tutte le sue derivate sono ottenute per derivazione sotto il segno d'integrale

$$D^\beta I(x) = \int_G \rho(y)\, D_x^\beta \frac{1}{|x-y|^\alpha}\, dy, \quad x \in R^n \setminus \overline{G}.$$

Dimostriamo che, per tutti i β, si ha

$$D^\beta I(x) = O(|x|^{-\alpha-|\beta|}), \quad |x| \to \infty. \tag{7}$$

Infatti, siano $G \subset U_R$ e $|x| > R$; allora si ha $|x-y| \geqslant |x| - |y| \geqslant |x| - R$ per tutti gli $y \in G$. Tenendo conto della stima

$$\left| D_x^\beta \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right| \leqslant \frac{K_\beta}{|x-y|^{\alpha+|\beta|}},$$

per $|x| > R$ si ottiene

$$|D^\beta I(x)| \leqslant K_\beta \int_G \frac{|\rho(y)|\, dy}{|x-y|^{\alpha+|\beta|}} \leqslant \frac{K_\beta}{(|x|-R)^{\alpha+|\beta|}} \int_G |\rho(x)|\, dy,$$

da cui segue la (7) (si veda il § 1.3).

Teorema. *Sia una funzione* ρ *limitata e sia* $|\rho(y)| \leqslant M$ *q.o. in* G. *In questo caso l'integrale* $I \in C^p(R^n)$, *dove* p *è il più grande numero intero per cui* $\alpha + p < n$. *Le corrispondenti derivate della funzione* $I(x)$ *si ottengono per derivazione sotto il segno d'integrale.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $I(x)$ è una funzione continua in R^n. Fissiamo $x_0 \in R^n$ e scegliamo un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si ha allora

$$|I(x_0) - I(x)| \leqslant \int_G |\rho(y)| \left| \frac{1}{|x_0 - y|^\alpha} - \frac{1}{|x - y|^\alpha} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{U(x_0;\eta)} \left[\frac{1}{|x_0 - y|^\alpha} + \frac{1}{|x - y|^\alpha} \right] dy +$$

$$+ M \int_{G \setminus U(x_0;\eta)} \left| \frac{1}{|x_0 - y|^\alpha} - \frac{1}{|x - y|^\alpha} \right| dy .$$

Il primo termine del secondo membro, in virtù della stima (6), non è superiore a $2MC_\alpha \eta^{n-\alpha}$ e perciò può essere reso inferiore ad $\varepsilon/2$ per un η sufficientemente piccolo. Nel secondo termine la funzione integranda è uniformemente continua in (x, y), nella regione $|x - x_0| \leqslant \eta/2$, $|y - x_0| \geqslant \eta$, $y \in \bar{G}$ e si annulla per $x = x_0$. Quest'integrale può perciò essere reso inferiore ad $\varepsilon/2$ per tutti gli $x \in U(x_0; \delta)$ se δ è sufficientemente piccolo, ed inoltre $\delta \leqslant \eta/2$. Abbiamo dunque trovato un numero δ tale che $|I(x_0) - I(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ per tutti gli $|x - x_0| < \delta$. Ciò significa che la funzione $I(x)$ è continua in un punto (arbitrario) $x_0 \in R^n$, cioè si ha $I \in C(R^n)$.

Sia $\alpha + 1 < n$. Deriviamo l'espressione integranda in $I(x)$ rispetto a x_i, $i = 1, \ldots, n$ e consideriamo le funzioni

$$I_i(x) = \int_G \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - y|^\alpha} dy = \alpha \int_G \rho(y) \frac{y_i - x_i}{|x - y|^{\alpha+2}} dy .$$

In virtù della stima

$$\left| \frac{y_i - x_i}{|x - y|^{\alpha+2}} \right| \leqslant \frac{1}{|x - y|^{\alpha+1}} ,$$

un ragionamento assolutamente analogo a quello che abbiamo appena fatto per l'integrale $I(x)$, dimostra che le funzioni $I_i(x)$ sono continue in R^n.

Dimostriamo che

$$I_{x_i}(x) = I_i(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Per ciò applichiamo lo stesso ragionamento utilizzato per la dimostrazione del teorema del § 1.5. Abbiamo

$$\int_{x_i^0}^{\xi_i} I_i(x)\,dx_i = \int_{x_i^0}^{\xi_i} \left[\int_G \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^\alpha}\,dy \right] dx_i =$$

$$= \int_G \rho(y) \left[\int_{x_i^0}^{\xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^\alpha}\,dx_i \right] dy =$$

$$= I(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi_i, \ldots, x_n) - I(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, \ldots, x_n),$$

da cui, derivando rispetto a ξ_i, otteniamo l'uguaglianza (8). L'inversione dell'ordine d'integrazione nelle uguaglianze precedenti è giustificata dall'esistenza dell'integrale reiterato

$$\alpha \int_{x_i^0}^{\xi_i} \left[\int_G \frac{|\rho(y)|\,dy}{|x-y|^{1+\alpha}} \right] dx_i \leqslant M\alpha |\xi_i - x_i^0| C_{\alpha+1} R^{n-\alpha-1}$$

in virtù del teorema di Fubini (si veda il § 1.4, h). Qui abbiamo utilizzato la stima (6) supponendo che $G \subset U_R$.

Dunque, abbiamo dimostrato che $I \in C^1(R^n)$ ed è possibile una volta la derivazione sotto il segno d'integrale in $I(x)$. Se, invece, $\alpha + 2 < n$, applicando alle funzioni $I_i(x)$ i ragionamenti precedenti, stabiliamo che $I \in C^2(R^n)$ ed è possibile derivare due volte sotto il segno d'integrale in $I(x)$ ecc. Il teorema è dimostrato.

Supponiamo che le funzioni $\mathscr{H}(x, y)$, $\mathscr{H}_1(x, y)$ e $\mathscr{H}_2(x, y)$ siano continue su $\overline{G} \times \overline{G}$. Analogamente a quanto detto prima si dimostra che gli integrali

$$\int_G \frac{\mathscr{H}(x, y)}{|x-y|^\alpha}\,dy \quad \text{e} \quad \int_G \frac{\mathscr{H}_1(x, y')\,\mathscr{H}_2(y', y)}{|x-y'|^{\alpha_1}|y'-y|^{\alpha_2}}\,dy'$$

sono continui su $\overline{G}$ e su $\overline{G} \times \overline{G}$ se $\alpha < n$ ed $\alpha_1 + \alpha_2 < n$, rispettivamente.

Osservazione. Il ragionamento valido per l'integrale $I(x)$ può essere applicato senza modifiche sostanziali ad un integrale di tipo potenziale della forma

$$\int_S \frac{\rho(y)}{|x-y|^\alpha}\,dS_y, \qquad 0 < \alpha < n-1,$$

dove S è una superficie regolare a tratti limitata e ρ una funzione limitata su S.

7. Spazio delle funzioni $\mathscr{L}_2(G)$. L'insieme di tutte le funzioni f per le quali la funzione $|f(x)|^2$ è integrabile sulla regione G, sarà denotato con $\mathscr{L}_2(G)$.

L'insieme di funzioni $\mathscr{L}_2(G)$ è lineare.

Infatti, se $f \in \mathscr{L}_2(G)$ e $g \in \mathscr{L}_2(G)$, dalla disuguaglianza

$$|\lambda f + \mu g|^2 \leqslant 2|\lambda|^2 |f|^2 + 2|\mu|^2 |g|^2$$

deriva che una qualsiasi combinazione lineare $\lambda f + \mu g$ appartiene anch'essa a $\mathscr{L}_2(G)$.

Stabiliamo un'importante disuguaglianza (*disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij*): se f e g appartengono a $\mathscr{L}_2(G)$, si ha

$$\left|\int_G f(x)\, g(x)\, dx\right| \leqslant \sqrt{\int_G |f(x)|^2\, dx}\, \sqrt{\int_G |g(x)^2|\, dx}.$$

Infatti, visto che f e g appartengono a $\mathscr{L}_2(G)$, per tutte le λ reali si ha $|f| + \lambda |g| \in \mathscr{L}_2(G)$, e di conseguenza

$$0 \leqslant \int_G [|f(x)| + \lambda |g(x)|]^2\, dx =$$

$$= \int_G |f(x)|^2\, dx + 2\lambda \int_G |f(x)\, g(x)|\, dx + \lambda^2 \int_G |g(x)|^2\, dx.$$

Quindi, il discriminante di questa forma quadratica è non positivo, cioè

$$\left[\int_G |f(x)\, g(x)|\, dx\right]^2 - \int_G |f(x)|^2\, dx \int_G |g(x)|^2\, dx \leqslant 0,$$

da cui deriva la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij richiesta.

Notiamo l'analogo discreto della disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij. Denotiamo con l_2 l'insieme di successioni di numeri complessi $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, \ldots\}$, per le quali $\|\boldsymbol{a}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. Se $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in l_2$ e $\boldsymbol{b} = \{b_k\} \in l_2$, si ha

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2}\, \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2}.$$

Se $f \in \mathscr{L}_2(G)$ e G è una regione limitata, la funzione $f(x)$ è integrabile su G.

Infatti, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij per $g \equiv 1$, si ottiene

$$\int_G |f(x)|\, dx \leqslant \sqrt{\int_G |f(x)|^2\, dx}\, \sqrt{\int_G dx} < \infty. \tag{9}$$

Sull'insieme di funzioni $\mathscr{L}_2(G)$ introduciamo il prodotto scalare e la norma conformemente alle formule

$$(f, g) = \int_G f(x)\, \overline{g}(x)\, dx,$$

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_G |f(x)|^2\, dx},$$

trasformando $\mathscr{L}_2(G)$ in uno spazio normato (lineare). Qui $\overline{g}(x)$ è la complessa coniugata di $g(x)$.

Evidentemente, il prodotto scalare introdotto ha le seguenti proprietà:

$$(f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (\lambda f + \mu g, h) = \lambda (f, h) + \mu (g, h).$$

Inoltre, in termini di norma e di prodotto scalare la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij assume la forma

$$| (f, g) | \leqslant \| f \| \| g \|, \quad f, g \in \mathscr{L}_2(G).$$

Da questa disuguaglianza segue la seguente *disuguaglianza di Minkowski*:

$$\| f + g \| \leqslant \| f \| + \| g \|, \quad f, g \in \mathscr{L}_2(G). \tag{10}$$

Infatti,

$$\| f + g \|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) \leqslant$$
$$\leqslant \| f \|^2 + | (f, g) | + | (g, f) | + \| g \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \| f \|^2 + \| f \| \| g \| + \| g \| \| f \| + \| g \|^2 = (\| f \| + \| g \|)^2.$$

Dunque, vediamo che la norma $\| \ \|$ soddisfa le condizioni a)-c) del § 1.3.

La successione di funzioni f_k, $k = 1, 2, \ldots$, appartenente a $\mathscr{L}_2(G)$ è detta *convergente* ad una funzione $f \in \mathscr{L}_2(G)$ *nello spazio* $\mathscr{L}_2(G)$ (o convergente *in media* in G), se $\| f_k - f \| \to 0$, $k \to \infty$; scriveremo allora

$$f_k \to f, \quad k \to \infty \quad \text{in} \quad \mathscr{L}_2(G).$$

La seguente proposizione esprime la proprietà di completezza dello spazio $\mathscr{L}_2(G)$ (teorema di Riesz-Fischer[1]): *se una successione di funzioni* f_k, $k = 1, 2, \ldots$ *appartenente a* $\mathscr{L}_2(G)$ *converge in se stessa in* $\mathscr{L}_2(G)$, *cioè* $\| f_k - f_p \| \to 0$, $k \to \infty$, $p \to \infty$, *esiste una funzione* $f \in \mathscr{L}_2(G)$ *tale che* $\| f_k - f \| \to 0$, $k \to \infty$; *inoltre, la funzione* f *è unica a meno dei valori su un insieme di misura zero.*

Lo spazio $\mathscr{L}_2(G)$ appartiene alla classe dei cosiddetti *spazi di Hilbert.*

Un insieme di funzioni $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}_2(G)$ è detto *denso* in $\mathscr{L}_2$ se, per ogni $f \in \mathscr{L}_2(G)$, esiste una successione di funzioni appartenenti a $\mathscr{M}$ convergente a f in $\mathscr{L}_2(G)$. Per esempio, l'insieme $C(G)$ è denso in $\mathscr{L}_2(G)$, il che implica che l'insieme di polinomi è denso in $\mathscr{L}_2(G)$, se G è una regione limitata (in virtù del teorema di Weierstrass (si veda il § 1.3)).

8. Sistemi ortonormali. Le funzioni f e g appartenenti a $\mathscr{L}_2(G)$ sono dette *ortogonali* se $(f, g) = 0$; una funzione f appartenente a $\mathscr{L}_2(G)$ è detta *normalizzata* se $\| f \| = 1$. Un sistema di funzioni

[1] Si veda F. Riesz e B. Szökefalvi-Nagy [1], cap II.

$\{\varphi_k\}$ appartenente a $\mathcal{L}_2(G)$ è detta *ortonormale* in $\mathcal{L}_2(G)$, se $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}$, dove δ_{ki} è il simbolo di Kronecker: $\delta_{ki} = 0$, $k \neq i$, $\delta_{ii} = 1$.

Un esempio di un sistema ortonormale in $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$ è il sistema trigonometrico

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Un sistema numerabile o finito di funzioni $\{\varphi_k\}$ è detto *linearmente indipendente* se, per ogni insieme finito di numeri $\{c_k\}$, $\sum_k |c_k| \neq 0$, non è valida l'identità $\sum_k c_k \varphi_k(x) \equiv 0$.

Ogni sistema ortonormale $\{\varphi_k\}$ *consiste di funzioni linearmente indipendenti.*

Infatti, in caso contrario, se si ha a che fare con un insieme di numeri (complessi) $\{c_k\}$ dei quali solo un numero finito differisce da zero, avremmo l'uguaglianza $\sum_k c_k \varphi_k = 0$ da cui, in virtù dell'ortonormalità del sistema $\{\varphi_k\}$, otterremmo

$$0 = \left(\sum_k c_k \varphi_k, \varphi_i\right) = \sum_k (c_k \varphi_k, \varphi_i) = \sum_k c_k (\varphi_k, \varphi_i) = c_i.$$

Ogni sistema $\psi_1, \psi_2, \ldots$ di funzioni linearmente indipendenti appartenente a $\mathcal{L}_2(G)$ può essere trasformato in un sistema ortonormale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ mediante il seguente *processo di ortogonalizzazione di Schmidt*:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|}, \quad \ldots, \\ \varphi_k &= \frac{\psi_k - (\psi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - \ldots - (\psi_k, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_k - (\psi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - \ldots - (\psi_k, \varphi_1)\varphi_1\|}, \quad \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Esempio. Se nello spazio $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ il sistema di potenze $1, x, x^2, \ldots$, viene ortogonalizzato secondo il processo di Schmidt si ottiene il sistema di polinomi di Legendre normalizzati.

Supponiamo che un sistema di funzioni φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, sia ortonormale in $\mathcal{L}_2(G)$ e che $f \in \mathcal{L}_2(G)$. I numeri (f, φ_k) sono detti *coefficienti di Fourier* e la serie formale

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k \tag{12}$$

è detta *serie di Fourier* della funzione f in termini del sistema ortonormale $\{\varphi_k\}$.

Se un sistema di funzioni φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *è ortonormale in* $\mathcal{L}_2(G)$, *per ogni* $f \in \mathcal{L}_2(G)$ *e per qualunque numero (complesso)* $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $N = 1, 2, \ldots$, *è valida l'uguaglianza*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |(f, \varphi_k) - a_k|^2. \tag{13}$$

Infatti, introducendo le notazioni

$$f_N = f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\,\varphi_k, \quad c_k = (f, \varphi_k) - a_k, \tag{14}$$

si ottiene per $i = 1, 2, \ldots, N$

$$(f_N, \varphi_i) = \left(f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\,\varphi_k, \varphi_i\right) = (f, \varphi_i) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\,(\varphi_k, \varphi_i) = 0.$$

Di conseguenza

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| f_N + \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|^2 =$$

$$= \left(f_N + \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k,\ f_N + \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k\right) = (f_N, f_N) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (f_N, c_k \varphi_k) + \sum_{k=1}^{N} (c_k \varphi_k, f_N) + \sum_{k,\, i=1}^{N} (c_k \varphi_k, c_i \varphi_i) =$$

$$= \|f_N\|^2 + \sum_{k,\, i=1}^{N} c_k \bar{c}_i\, (\varphi_k, \varphi_i) = \|f_N\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2,$$

da cui, in virtù della (14), segue l'uguaglianza (13).

Dall'uguaglianza (13) segue la disuguaglianza

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\,\varphi_k \right\|^2 \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\|^2. \tag{15}$$

Poi, ponendo nella (13) $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, si ottiene l'uguaglianza

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\,\varphi_k \right\|^2 = \|f^2\| - \sum_{k=1}^{N} |(f, \varphi_k)|^2. \tag{16}$$

Dall'uguaglianza (16) segue la disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{17}$$

detta *disuguaglianza di Bessel.*

Dalla disuguaglianza di Bessel e dal teorema di Riesz-Fischer (si veda il § 1.7) segue che *la serie di Fourier* (12) *converge in* $\mathcal{L}_2(G)$ *ad una funzione* f_1 (*non necessariamente a* f!) *appartenente a* $\mathcal{L}_2(G)$.

Inoltre, dall'uguaglianza (16) e dal teorema di Riesz-Fischer (si veda il § 1.7) deriva la seguente proposizione: *affinché la serie di Fourier* (12) *converga alla funzione* f *in* $\mathcal{L}_2(G)$, *è necessario e sufficiente che sia verificata l'uguaglianza di Parseval-Steklov* (*equazione di chiusura*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = \|f\|^2. \tag{18}$$

9. Sistemi ortonormali completi. Supponiamo che un sistema di funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sia ortonormale in $\mathcal{L}_2(G)$. Se per qualunque $f \in \mathcal{L}_2(G)$ la sua serie di Fourier in termini di $\{\varphi_k\}$ converge a f in $\mathcal{L}_2(G)$. Questo sistema è detto *completo (chiuso) in* $\mathcal{L}_2(G)$ (in altre parole, costituisce *una base ortonormale in* $\mathcal{L}_2(G)$). Come esempio di un sistema ortonormale completo in $\mathcal{L}_2(0, 2\pi)$ può fungere il sistema trigonometrico. Da questa definizione e dai risultati del § 1.8 segue il seguente

Teorema 1. *Affinché un sistema ortonormale* $\{\varphi_k\}$ *sia completo in* $\mathcal{L}_2(G)$, *è necessario e sufficiente che, per ogni funzione* f *appartenente a* $\mathcal{L}_2(G)$, *sia verificata l'uguaglianza di Parseval-Steklov (condizione di chiusura)* (18).

Ora dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 2. *Affinché un sistema ortonormale* $\{\varphi_k\}$ *sia completo in* $\mathcal{L}_2(G)$, *è necessario e sufficiente che ogni funzione* f, *appartenente ad un insieme* $\mathcal{M}$ *denso in* $\mathcal{L}_2(G)$, *si possa approssimare in* $\mathcal{L}_2(G)$, *in modo esatto a piacere, mediante combinazioni lineari di funzioni di questo sistema.*

La necessità della condizione è evidente; dimostriamo la sua sufficienza. Supponiamo che f appartenga a $\mathcal{L}_2(G)$ e che $\varepsilon > 0$ sia un numero qualunque. Visto che $\mathcal{M}$ è denso in $\mathcal{L}_2(G)$, esiste $f_0 \in \mathcal{M}$ tale che

$$\|f - f_0\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

Per ipotesi, la funzione f_0 può essere approssimata a piacere in $\mathcal{L}_2(G)$ mediante combinazioni lineari delle funzioni del sistema $\{\varphi_k\}$. Perciò si possono trovare dei numeri $m, c_1, c_2, \ldots, c_m$, tali che

$$\left\| f_0 - \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Di qui e della (19), in virtù della disuguaglianza di Minkowski, si ottiene

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k \right\| \leqslant \|f - f_0\| + \left\| f_0 - \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ma allora, in virtù della disuguaglianza (15), si ha a maggior ragione

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| < \varepsilon, \quad N \geqslant m,$$

come si voleva dimostrare.

Corollario. *Se* G *è una regione limitata, in* $\mathcal{L}_2(G)$ *esiste un sistema ortonormale completo numerabile di polinomi.*

Infatti, l'insieme di polinomi a coefficienti razionali è denso in $\mathscr{L}_2(G)$ (si veda il § 1.7), è numerabile e può essere fatto ortonormale utilizzando il processo di ortogonalizzazione di Schmidt (si veda il § 1.8).

Lemma. *Supponiamo che le regioni $G \subset R^m$ e $D \subset R^m$ siano limitate, il sistema di funzioni $\psi_j(y)$, $j = 1, 2, \ldots$, sia ortonormale e denso in $\mathscr{L}_2(D)$, e per ogni $j = 1, 2, \ldots$ il sistema di funzioni $\varphi_{kj}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, sia ortonormale e denso in $\mathscr{L}_2(G)$. Allora il sistema di funzioni*

$$\chi_{kj}(x, y) = \varphi_{kj}(x)\,\psi_j(y), \quad k, j = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

è ortonormale e denso in $\mathscr{L}_2(G \times D)$.

Dimostrazione. L'ortonormalità del sistema $\{\chi_{kj}\}$ in $\mathscr{L}_2(G \times D)$ si stabilisce facilmente, e cioè:

$$(\chi_{kj}, \chi_{k'j'}) = \int_{G\times D} \chi_{kj}\overline{\chi}_{k'j'}\,dx\,dy =$$

$$= \int_G \varphi_{kj}\overline{\varphi}_{k'j'}\,dx \int_D \psi_j\overline{\psi}_{j'}\,dy = (\varphi_{kj}, \varphi_{k'j'})(\psi_j, \psi_{j'}) =$$

$$= (\varphi_{kj}, \varphi_{k'j'})\,\delta_{jj'} = (\varphi_{kj}, \varphi_{k'j'})\,\delta_{jj'} = \delta_{kk'}\delta_{jj'}.$$

Dimostriamo la completezza di questo sistema in $\mathscr{L}_2(G \times D)$. Visto che $C(\overline{G} \times \overline{D})$ è denso in $\mathscr{L}_2(G \times D)$ (si veda il § 1.7), allora, secondo il teorema 2, è sufficiente stabilire la validità dell'uguaglianza di Parseval-Steklov per tutte le $f \in C(\overline{G} \times \overline{D})$. Supponiamo che $f \in C(\overline{G} \times \overline{D})$. Visto che il sistema $\{\psi_j\}$ è denso in $\mathscr{L}_2(D)$, per ogni $x \in \overline{G}$ è valida l'uguaglianza di Parseval-Steklov (si veda il § 1.8)

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)|^2 = \int_D |f(x, y)|^2\,dy, \tag{21}$$

dove

$$a_j(x) = \int_D f(x, y)\,\overline{\psi}_j(y)\,dy. \tag{22}$$

In virtù del fatto che la regione D è limitata, le funzioni ψ_j sono integrabili in D (si veda il § 1.7) e visto che $f \in C(\overline{G} \times \overline{D})$, si ha $a_j \in C(\overline{G})$ (si veda il § 1.5).

Dato che, per ogni $j = 1, 2, \ldots$, il sistema $\{\varphi_{kj}\}$ è completo in $\mathscr{L}_2(G)$, è valida l'uguaglianza di Parseval-Steklov (si veda il § 1.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 = \int_G |a_j(x)|^2\,dx, \tag{23}$$

dove, in virtù delle (22), (20) e del teorema di Fubini (si veda il § 1.4), si ha

$$a_{kj} = (a_j,\ \varphi_{kj}) =$$

$$= \int_G a_j \overline{\varphi}_{kj}\, dx = \int_G \left[\int_D f(x,\ y)\, \overline{\psi}_j(y)\, dy \right] \overline{\varphi}_{kj}(x)\, dx =$$

$$= \int_{G\times D} f(x,\ y)\, \overline{\varphi}_{kj}(x) \overline{\psi}_j(y)\, dx\, dy = \int_{G\times D} f \overline{\chi}_{kj}\, dx\, dy = (f,\ \chi_{kj}). \qquad (24)$$

Secondo il lemma di Dini (si veda il § 1.3) la serie (21) converge uniformemente su $\overline{G}$. Integrando questa serie membro a membro rispetto alla regione G ed utilizzando le uguaglianze (23) e (24), per la funzione f si ottiene l'uguaglianza di Parseval-Steklov richiesta

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 = \sum_{j,\,k=1}^{\infty} |(f,\ \chi_{kj})|^2 = \int_G \int_D |f(x,\ y)|^2\, dx\, dy = \|f\|^2.$$

Il lemma è dimostrato.

Osservazione. Tutti i ragionamenti che riguardano lo spazio $\mathscr{L}_2(G)$ sono anche validi per gli spazi $\mathscr{L}_2(G;\ \rho)$ o $\mathscr{L}_2(S)$ con i prodotti scalari

$$(f,\ g)_\rho = \int_G \rho(x)\, f(x)\, \overline{g}(x)\, dx, \quad f,\ g \in \mathscr{L}_2(G;\ \rho);$$

$$(f,\ g) = \int_S f(x)\, \overline{g}(x)\, dS, \quad f,\ g \in \mathscr{L}_2(S),$$

dove il peso $\rho \in C(\overline{G})$, $\rho(x) > 0$ $x \in \overline{G}$ e S è una superficie regolare a tratti.

10. Operatori e funzionali lineari. Siano $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ insiemi lineari. Un operatore L che trasforma gli elementi dell'insieme $\mathscr{M}$ in quelli dell'insieme $\mathscr{N}$ si dice *lineare* se, per ogni elemento f e g di $\mathscr{M}$ ed ogni numero complesso λ e μ, è valida l'uguaglianza

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda Lf + \mu Lg.$$

In questo caso l'insieme $\mathscr{M} = \mathscr{M}_L$ si dice *dominio di definizione* dell'operatore L. Se $Lf = f$ per tutte le $f \in \mathscr{M}$, l'operatore L si dice *operatore identico* (o *unitario*). Un operatore identico si indica con I.

Supponiamo che sugli insiemi lineari $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ siano definite le convergenze degli elementi con combinazioni lineari continue, per esempio, se $f_k \to f$ e $g_k \to g$, $k \to \infty$ in $\mathscr{M}$, si abbia anche $\lambda f_k + \mu g_k \to \lambda f + \mu g$, $k \to \infty$ in $\mathscr{M}$. L'operatore lineare L che trasporta $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$, si dice *continuo* da $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$, se dalla convergenza $f_k \to f$, $k \to \infty$ in $\mathscr{M}$ deriva la convergenza $Lf_k \to Lf$, $k \to \infty$ in $\mathscr{N}$. *Ne segue che affinché un operatore lineare L sia continuo da $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$, è necessario e sufficiente che $Lf_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{N}$, visto che $f_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{M}$.*

Siano $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ spazi normati con norme $\| \|_{\mathscr{M}}$ e $\| \|_{\mathscr{N}}$ rispettivamente (per esempio, $\mathscr{N} = C(T)$, $\mathscr{M} = \mathscr{L}_2(G)$). Un operatore lineare L che trasferisce $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$ si dice *limitato da $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$* se esiste un numero C positivo tale che, per ogni $f \in \mathscr{M}$, è valida la disuguaglianza

$$\| Lf \|_{\mathscr{N}} \leqslant C \| f \|_{\mathscr{M}}. \tag{25}$$

Da queste definizioni deriva che, *se un operatore lineare L è limitato da $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$, esso è pure continuo da $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$.*

Infatti, se $f_k \to 0$, $k \to \infty$, in $\mathscr{M}$ e cioè $\| f_k \|_{\mathscr{M}} \to 0$, $k \to \infty$, si ha $\| Lf_k \|_{\mathscr{N}} \leqslant C \| f_k \|_{\mathscr{M}}$, e quindi $Lf_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{N}$. Ciò vuol dire che l'operatore L è continuo da $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$.

L'insieme $\mathscr{B}$ di uno spazio normato lineare $\mathscr{M}$ si dice *limitato in $\mathscr{M}$* se esiste un numero A tale che $\| f \|_{\mathscr{M}} < A$ per tutte le $f \in \mathscr{B}$.

Supponiamo che un operatore lineare L trasferisca $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}_1$ e un operatore lineare K trasferisca $\mathscr{N}_1$ in $\mathscr{N}$. L'operatore lineare $KLf = K(Lf)$ che trasferisce $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$, si dice *prodotto* KL degli operatori K e L; in particolare, $K^p f = K(K^{p-1} f) = K^{p-1}(Kf)$, $K^1 = K$, $K^0 = I$.

I funzionali lineari rappresentano un caso particolare di operatori lineari. Se un operatore lineare l trasforma un insieme di elementi $\mathscr{M}$ in un insieme di numeri complessi lf, $f \in \mathscr{M}$, l è detto *funzionale lineare sull'insieme $\mathscr{M}$*. Denotiamo con (l, f) il valore del funzionale l sull'elemento f, cioè il numero complesso lf. Dunque, la continuità di un funzionale lineare l significa che, se $f_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{M}$, la successione di numeri complessi (l, f_k), $k \to \infty$, tende a 0.

Diremo che una successione $l_1, l_2, \ldots$ di funzionali lineari su $\mathscr{M}$ è *debolmente convergente* ad un funzionale (lineare) l su $\mathscr{M}$, se essa è convergente a l su ogni elemento f di $\mathscr{M}$, cioè $(l_k, f) \to (l, f)$, $k \to \infty$.

Un funzionale lineare $\tilde{l}$ su un insieme $\tilde{\mathscr{M}} \supset \mathscr{M}$ si dice *prolungamento* del funzionale lineare l assegnato su $\mathscr{M}$, se $(\tilde{l}, f) = (l, f)$, $f \in \mathscr{M}$.

Qui sotto riportiamo alcuni esempi di operatori e funzionali lineari.

a) L'operatore lineare della forma

$$Kf = \int_G \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy, \quad x \in G, \tag{26}$$

è detto *operatore integrale* (lineare), e la funzione $\mathscr{K}(x, y)$ si dice suo *nucleo*. Se il nucleo $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_2(G \times G)$, si ha

$$\int_{G \times G} |\mathscr{K}(x, y)|^2\, dx\, dy = C^2 < \infty, \tag{27}$$

e l'operatore K è limitato (e, quindi, è continuo) da $\mathscr{L}_2(G) = \mathscr{M}$ in $\mathscr{L}_2(G) = \mathscr{N}$.

Infatti, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij ed il teorema di Fubini (si veda il § 1.4) ed utilizzando la (27), per

ogni $f \in \mathcal{L}_2(G)$ si ottiene la disuguaglianza

$$\|Kf\|^2 = \int_G \left| \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y)\, dy \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_G \left[\int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2\, dy \int_G |f(y)|^2\, dy \right] dx = C^2 \|f\|^2,$$

e cioè

$$\|Kf\| \leqslant C\, \|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(G), \tag{28}$$

la quale mostra che l'operatore K è limitato da $\mathcal{L}_2(G)$ in $\mathcal{L}_2(G)$.

Analogamente, un operatore lineare A della forma

$$(Aa)_k = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} a_i, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{26'}$$

per il quale

$$\sum_{k,\, i=1}^{\infty} |A_{ki}|^2 = C^2 < \infty\,, \tag{27'}$$

è limitato (e, quindi, è continuo) da l_2 a l_2 (si veda il § 1.7), con

$$\| Aa \| \leqslant C \| a \|, \quad a = \{a_k\} \in l_2. \tag{28'}$$

b) L'operatore lineare della forma

$$Lf = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha f(x), \quad \sum_{|\alpha| = m} |a_\alpha(x)| \not\equiv 0, \quad m > 0, \tag{29}$$

è detto *operatore differenziale* (lineare) *di ordine m* e le funzioni $a_\alpha(x)$ sono dette suoi *coefficienti*. Se i coefficienti $a_\alpha(x)$ sono funzioni continue sulla regione $\overline{G} \subset R^n$, l'operatore L trasferisce $C^m(\overline{G}) = \mathcal{M}$ in $C(\overline{G}) = \mathcal{N}$. Ma l'operatore L non è continuo da $C(\overline{G})$ a $C(\overline{G})$. Infatti, la successione di funzioni $f_k(x) = (1/k)\, e^{ik(x, a)}$ tende a zero per $k \to \infty$, in $C(\overline{G})$, mentre la successione

$$Lf_k = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha f_k(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, (ia)^\alpha k^{|\alpha| - 1} e^{ik(x, a)}$$

non ha limite in $C(\overline{G})$. Notiamo di passaggio che l'operatore L non è definito su tutto lo spazio $C(\overline{G})$, ma solo su una sua parte, e cioè sull'insieme di funzioni $C^m(\overline{G})$.

c) L'operatore lineare della forma

$$Lf = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \left[\int_G \mathcal{K}_\alpha(x, y)\, D^\alpha f(y)\, dy + a_\alpha(x)\, D^\alpha f(x) \right] \tag{30}$$

è detto *operatore integro-differenziale* (lineare).

d) Il prodotto scalare $(l, f) = (f, g)$, in cui g è una funzione fissa appartenente a $\mathcal{L}_2(G)$ serve di esempio di un funzionale continuo lineare l. La linearità di questo funzionale segue dalla linearità del prodotto scalare rispetto al suo primo argomento (si veda il § 1.7),

mentre, in virtù della disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij, questo funzionale è limitato:

$$| (l, f) | = | (f, g) | \leqslant \| g \| \| f \|,$$

e, quindi, è continuo.

11. Equazioni lineari. Sia L un operatore lineare con un dominio di definizione $\mathscr{M}_L$. L'equazione

$$Lu = F \tag{31}$$

è detta equazione *lineare* (non omogenea). L'elemento dato F che figura nell'equazione (31) si dice *termine noto* (o *secondo membro*), mentre l'elemento ignoto u, appartenente a $\mathscr{M}_L$, si dice *soluzione* di quest'equazione. Se nell'equazione (31) il termine noto F è nullo, l'equazione risultante

$$Lu = 0 \tag{32}$$

è detta *equazione omogenea* lineare corrispondente all'equazione (31).

In virtù della linearità dell'operatore L l'insieme di soluzioni dell'equazione omogenea (32) forma un insieme lineare; in particolare, $u = 0$ è sempre una soluzione di quest'equazione.

Ogni soluzione u dell'equazione non omogenea lineare (31) *(se esiste) è rappresentata dalla somma di una soluzione particolare* u_0 *di quest'equazione e della soluzione generale* $\tilde{u}$ *della corrispondente equazione lineare omogenea* (32),

$$u = u_0 + \tilde{u}. \tag{33}$$

Infatti, se u è una soluzione arbitraria dell'equazione (31), $Lu = F$ con $u \in \mathscr{M}_L$, ed u_0 è una soluzione particolare di quest'equazione, $Lu_0 = F$, $u_0 \in \mathscr{M}_L$, allora, in virtù della linearità dell'operatore L, la differenza $u - u_0 = \tilde{u} \in \mathscr{M}_L$ soddisfa l'equazione omogenea (32):

$$L\tilde{u} = L(u - u_0) = Lu - Lu_0 = F - F = 0.$$

Questo dimostra la rappresentazione (33) per la soluzione u.

Ne segue direttamente che, *affinché la soluzione dell'equazione* (31) *sia unica in* $\mathscr{M}_L$, *è necessario e sufficiente che la corrispondente equazione omogenea* (32) *abbia una sola soluzione nulla in* $\mathscr{M}_L$.

Supponiamo che l'equazione omogenea (32) abbia una sola soluzione nulla in $\mathscr{M}_L$. Denotiamo con $\mathscr{R}_L$ la regione di valori dell'operatore L, cioè l'insieme (lineare) di elementi della forma $\{Lf\}$ con f appartenente a $\mathscr{M}_L$. Allora, per ogni $F \in \mathscr{R}_L$, l'equazione (31) ha un'unica soluzione $u \in \mathscr{M}_L$ e, quindi, appare un certo operatore che associa ad ogni elemento F di $\mathscr{R}_L$ un elemento u di $\mathscr{M}_L$ soluzione dell'equazione (31). Quest'operatore è detto *operatore inverso* di L ed è denotato con L^{-1}, di modo che

$$u = L^{-1}F. \tag{34}$$

L'operatore L^{-1} è evidentemente lineare e trasforma $\mathscr{R}_L$ in $\mathscr{M}_L$. Dalla definizione dell'operatore inverso L^{-1} e dalle relazioni (31) e (34) segue direttamente:

$$LL^{-1}F = F, \quad F \in \mathscr{R}_L; \quad L^{-1}Lu = u, \quad u \in \mathscr{M}_L,$$

cioè

$$LL^{-1} = I \quad \text{e} \quad L^{-1}L = I.$$

Se l'operatore lineare L ha un operatore inverso L^{-1}, i sistemi di funzioni $\{\varphi_k\}$ e $\{L\varphi_k\}$ sono linearmente indipendenti simultaneamente. (In questo caso si suppone, naturalmente, che tutti i φ_k appartengano a $\mathscr{M}_L$).

Infatti, se il sistema $\{\varphi_k\}$ fosse linearmente dipendente, allora, per un sistema di numeri $\{c_k\}$ dei quali solo un numero finito non è nullo, avremmo $\sum_k c_k\varphi_k = 0$, da cui, applicando l'operatore L, otterremmo $\sum_k c_kL\varphi_k = 0$, il che significa che il sistema $\{L\varphi_k\}$ è linearmente dipendente. Inversamente, se il sistema $\{L\varphi_k\}$ è linearmente dipendente, cioè $\sum_k c_kL\varphi_k = 0$, allora, applicando l'operatore L^{-1}, si ottiene

$$\sum_k c_kL^{-1}L\varphi_k = \sum_k c_k\varphi_k = 0,$$

il che vuol dire che il sistema $\{\varphi_k\}$ è linearmente dipendente.

Consideriamo l'equazione lineare omogenea

$$Lu = \lambda u, \tag{35}$$

dove λ è un parametro complesso. Quest'equazione ha una soluzione nulla per tutti i λ. Può succedere che per certi λ quest'equazione abbia soluzioni non nulle appartenenti a $\mathscr{M}_L$. I valori complessi di λ per i quali l'equazione (35) ha soluzioni non nulle appartenenti a $\mathscr{M}_L$, sono detti *autovalori* dell'operatore L e le corrispondenti soluzioni sono *autofunzioni* che corrispondono a questo autovalore. Il numero totale r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ di autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti ad un dato autovalore di λ è detto *molteplicità* di quest'autovalore; se la molteplicità r è uguale a 1, λ è detto autovalore *semplice*.

Se la molteplicità di un autovalore di λ dell'operatore L è finita e se $u_1, u_2, \ldots, u_r$ sono le corrispondenti autofunzioni linearmente indipendenti, ogni loro combinazione lineare

$$u_0 = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ru_r \tag{36}$$

è anch'essa un'autofunzione corrispondente a quest'autovalore e la formula (36) rappresenta una soluzione generale dell'equazione (35). Di qui e dalla formula (33) segue che, *se la soluzione dell'equazione*

$$Lu = \lambda u + f \tag{37}$$

esiste, la sua soluzione generale è rappresentata dalla formula

$$u = u^* + \sum_{k=1}^{r} c_k u_k, \tag{38}$$

dove u^* è una soluzione particolare della (38) *e c_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, sono costanti arbitrarie.*

12. Operatori hermitiani. Un operatore lineare L che trasferisce $\mathscr{M}_L \subset \mathscr{L}_2(G)$ in $\mathscr{L}_2(G)$ è detto *hermitiano* se il suo dominio di definizione $\mathscr{M}_L$ è denso in $\mathscr{L}_2(G)$ e se, per ogni f e g appartenenti a $\mathscr{M}_L$, è verificata l'uguaglianza

$$(Lf, g) = (f, Lg). \tag{39}$$

Le espressioni (Lf, g) e (Lf, f) sono dette, rispettivamente, *forme bilineare e quadratica* generate dall'operatore L.

Affinché un operatore lineare L sia hermitiano, è necessario e sufficiente che la forma quadratica (Lf, f), $f \in \mathscr{M}_L$, da esso generata assuma solo valori reali.

Infatti, se l'operatore L è hermitiano, allora, in virtù della (39), si ha

$$(Lf, f) = \overline{(f, Lf)} = \overline{(Lf, f)}, \quad f \in \mathscr{M}_L,$$

in modo che la forma quadratica (Lf, f) assume solo valori reali.

Inversamente, se la forma quadratica (Lf, f) assume solo valori reali, per tutte le f e g appartenenti a $\mathscr{M}_L$ abbiamo

$$\operatorname{Re}[(Lg, f) - (Lf, g)] =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{i}[(L(f + ig), f + ig) - (Lf, f) - (Lg, g)] = 0,$$

$$\operatorname{Im}[(Lg, f) + (Lf, g)] =$$

$$= \operatorname{Im}[(L(f + g), f + g) - (Lf, f) - (Lg, g)] = 0$$

e, quindi,

$$(Lf, g) = \operatorname{Re}(Lf, g) + i \operatorname{Im}(Lf, g) =$$

$$= \operatorname{Re}(Lg, f) - i \operatorname{Im}(Lg, f) = \overline{(Lg, f)} = (f, Lg),$$

di modo che l'operatore L è hermitiano.

Un operatore lineare L che trasferisce $\mathscr{M}_L \subset \mathscr{L}_2(G)$ in $\mathscr{L}_2(G)$, è detto *positivo* se $\mathscr{M}_L$ è densa in $\mathscr{L}_2(G)$ e se

$$(Lf, f) \geqslant 0, \quad f \in \mathscr{M}_L.$$

Dall'asserzione dimostrata segue che *ogni operatore lineare è hermitiano.*

Teorema. *Se un operatore L è hermitiano (positivo), tutti i suoi autovalori sono reali (non negativi) e le sue autofunzioni corrispondenti a differenti autovalori sono ortogonali.*

Dimostrazione. Siano λ_0 un autovalore ed u_0 un'autofunzione corrispondente normalizzata di un operatore hermitiano L, cioè $Lu_0 = \lambda_0 u_0$. Moltiplicando scalarmente quest'uguaglianza per u_0, si ottiene

$$(Lu_0,\ u_0) = (\lambda_0 u_0,\ u_0) = \lambda_0\ (u_0,\ u_0) = \lambda_0\ \|\ u_0\ \|^2 = \lambda_0. \qquad (40)$$

Ma per un operatore hermitiano (positivo) la forma quadratica (Lf, f) assume solo valori reali (non negativi) e, quindi, in virtù della (40), λ_0 è un numero reale (non negativo).

Dimostriamo che una coppia di autofunzioni u_1 ed u_2, corrispondenti a differenti autovalori λ_1 e λ_2, sono ortogonali. Infatti, dalle relazioni

$$Lu_1 = \lambda_1 u_1, \quad Lu_2 = \lambda_2 u_2,$$

e tenendo presente il carattere reale di λ_1 e λ_2 ed il fatto che l'operatore L è hermitiano, si ottiene la seguente successione di uguaglianze:

$$\lambda_1\ (u_1,\ u_2) = (\lambda_1 u_1,\ u_2) = (Lu_1,\ u_2) = (u_1,\ Lu_2) =$$
$$= (u_1,\ \lambda_2 u_2) = \lambda_2\ (u_1,\ u_2),$$

cioè

$$\lambda_1\ (u_1,\ u_2) = \lambda_2\ (u_1,\ u_2).$$

Visto che $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ne segue che $(u_1,\ u_2) = 0$. Il teorema è dimostrato.

Supponiamo che l'insieme di autovalori di un operatore hermitiano L sia almeno contabile ed ogni autovalore sia di molteplicità finita. Enumeriamo tutti questi autovalori: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, ripetendo λ_k il numero di volte corrispondente alla sua molteplicità. Denotiamo con $u_1, u_2, \ldots$, le corrispondenti autofunzioni di modo che ad ogni autovalore corrisponda una sola autofunzione u_k:

$$Lu_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \qquad (41)$$

Le autofunzioni corrispondenti ad uno stesso autovalore si possono scegliere ortonormali, utilizzando il processo di ortogonalizzazione di Schmidt (si veda il § 1.8). In questo caso si ottengono di nuovo autofunzioni corrispondenti allo stesso autovalore. Secondo il teorema del § 1.12 le autofunzioni corrispondenti a differenti autovalori sono ortogonali.

Dunque, *se l'insieme delle autofunzioni* $\{u_k\}$ *di un operatore hermitiano* L *è almeno numerabile, esso può essere scelto ortonormale*:

$$(Lu_k,\ u_i) = \lambda_k\ (u_k,\ u_i) = \lambda_k \delta_{ki}. \qquad (42)$$

Osservazione. Tutti i ragionamenti riportati nei §§ 1.7-1.9, 1.12 che riguardano lo spazio $\mathcal{L}_2(G)$ sono, con certe modifiche evidenti, validi anche per il suo analogo discreto l_2 e tanto più per tutti i sottospazi di dimensione finita di l_2.

§ 2. *Equazioni fondamentali della fisica matematica*

Una descrizione matematica di molti processi fisici porta ad equazioni differenziali ed integrali o persino ad equazioni integro-differenziali. Una classe sufficientemente vasta di processi fisici è descritta mediante equazioni differenziali lineari del secondo ordine (si veda il § 1.10)

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\,u = F(x). \qquad (1)$$

In questo paragrafo considereremo processi fisici tipici che sono riducibili a diversi problemi al contorno per le equazioni differenziali.

1. Equazione di vibrazioni. Molti problemi di meccanica (vibrazione di corde, di barre, di membrane e di volumi tridimensionali) e di fisica (onde elettromagnetiche) sono descritte da equazione di vibrazioni della forma

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u) - qu + F(x,\ t). \qquad (2)$$

dove la funzione incognita $u\ (x,\ t)$ dipende da n ($n = 1,\ 2,\ 3$) coordinate spaziali $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ e dal tempo t; i coefficienti ρ, p e q sono determinati dalle proprietà del mezzo in cui si svolgono le vibrazioni; il termine noto $F\ (x,\ t)$ esprime l'intensità della perturbazione esterna. Nell'equazione (2), conformemente alla definizione degli operatori div (divergenza) e grad (gradiente), si ha

$$\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Illustriamo la deduzione dell'equazione (2) con l'esempio di piccole vibrazioni trasversali di una corda. Si dice *corda* un filo teso che non resiste alla flessione.

Supponiamo che nel piano $(x,\ u)$ la corda esegua piccole vibrazioni trasversali vicino alla sua posizione d'equilibrio coincidente con l'asse x. Denotiamo con $u\ (x,\ t)$ il valore dello spostamento della corda dalla posizione d'equilibrio nel punto x all'istante t in modo che $u = u\ (x,\ t)$ è l'equazione della corda all'istante t. Limitandoci all'esame delle piccole vibrazioni della corda, trascureremo infinitesimi di ordine superiore in confronto con $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Visto che la corda non resiste alla flessione, la sua tensione $T\ (x,\ t)$, nel punto x all'istante t, è diretta lungo la tangente alla corda al punto x (fig. 3). Qualunque sezione della corda $(a,\ b)$ dopo lo spostamento dalla posizione d'equilibrio nei limiti della nostra

approssimazione non cambia la sua lunghezza

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \simeq b - a$$

e, per conseguenza, conformemente alla legge di Hooke, il valore della tensione $| T(x, t) |$ rimarrà costante ed indipendente sia da x che da t, cioè $| T(x, t) | = T_0$. Indichiamo con $F(x, t)$ la densità delle forze esterne agenti sulla corda, nel punto x all'istante t, dirette

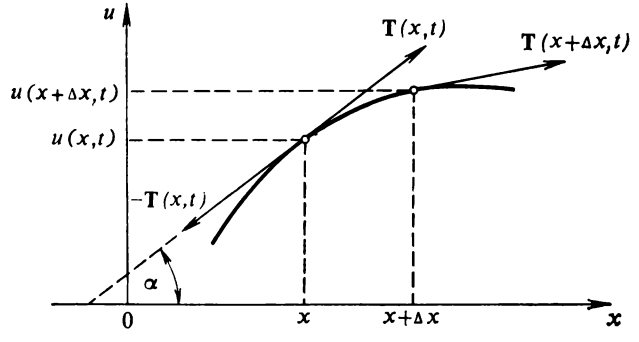


Fig. 3.

perpendicolarmente all'asse x nel piano (x, u). Infine, sia $\rho(x)$ la densità lineare della corda nel punto x, in modo che $\rho(x)\,\Delta x$ rappresenti approssimativamente la massa dell'elemento della corda $(x, x + \Delta x)$.

Costruiamo l'equazione del moto della corda. Sul suo elemento $(x, x + \Delta x)$ agiscono le forze di tensione $T(x + \Delta x, t)$, $-T(x, t)$ (fig. 3) e la forza esterna, la cui somma, conformemente alle leggi di Newton, dev'essere uguale al prodotto della massa di quest'elemento per la sua accelerazione. Proiettando quest'uguaglianza vettoriale sull'asse u, in base ai ragionamenti precedenti, si ottiene la seguente uguaglianza:

$$T_0 \sin\alpha|_{x+\Delta x} - T_0 \sin\alpha|_x + F(x, t)\,\Delta x = \rho(x)\,\Delta x\, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \qquad (3)$$

Ma nell'ambito della nostra approssimazione si ha

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

e perciò otteniamo dalla (3)

$$\rho\, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0\, \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] + F(x, t),$$

da cui, per $\Delta x \to 0$, segue l'uguaglianza

$$\rho\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \qquad (4)$$

Questa è l'*equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una corda.* Per $F \neq 0$, le vibrazioni della corda sono dette *forzate* e, per $F = 0$, *libere.*

Se la densità ρ è costante, cioè $\rho(x) = \rho$, l'equazione di vibrazioni della corda assume la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \tag{5}$$

dove $f = F/\rho$ ed $a^2 = T_0/\rho$ è una costante. L'equazione (5) è detta anche *equazione d'onda unidimensionale.*

Equazioni della forma (2) descrivono anche le *piccole vibrazioni trasversali di una barra elastica*:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES \frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t), \tag{6}$$

dove $S(x)$ è l'area della sezione trasversale della barra ed $E(x)$ è il modulo di Young nel punto x.

Dalle considerazioni fisiche segue che, per una descrizione univoca delle vibrazioni di una corda o di una barra, è anche necessario assegnare supplementarmente i valori dello spostamento u e della velocità u_t all'istante iniziale (*condizioni iniziali*) ed anche il regime di comportamento alle estremità (*condizioni di frontiera*). Riportiamo alcuni esempi di condizioni di frontiera.

a) Se l'estremità x_0 della corda o della barra si muove conformemente alla legge $\mu(t)$, si ha

$$u\,|_{x=x_0} = \mu(t).$$

b) Se sull'estremità destra x_0 della corda agisce una forza data $\nu(t)$, si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\nu(t)}{T_0}.$$

Infatti, in questo caso si ha

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} \simeq T_0 \sin \alpha|_{x=x_0} = \nu(t).$$

c) Se l'estremità destra x_0 è elasticamente fissata ed α è il coefficiente di rigidità del fissaggio, si ha

$$E \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\bigg|_{x=x_0} = 0,$$

conformemente alla legge di Hooke.

In modo analogo si deduce l'*equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una membrana*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + F. \tag{7}$$

Se la densità ρ è costante, l'equazione di vibrazioni di una membrana assume la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \tag{8}$$

ed è detta *equazione d'onda bidimensionale.*

L'equazione d'onda tridimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f \tag{9}$$

descrive i processi di propagazione del suono in un mezzo omogeneo e delle onde elettromagnetiche in un mezzo omogeneo non conduttore. Soddisfano questa equazione la densità di un gas, la sua pressione ed il potenziale di velocità, nonché le componenti d'intensità dei campi elettrico e magnetico ed i corrispondenti potenziali (si veda il § 2.6).

Scriveremo le equazioni d'onda (5), (8) e (9) con la singola formula

$$\Box_a u = f, \tag{10}$$

dove $\Box_a$ è l'*operatore d'onda* (*operatore di D'Alembert*)

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \; (\Box \equiv \Box_1),$$

e Δ è l'*operatore di Laplace*:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

2. Equazione di diffusione. I processi di diffusione del calore o di diffusione delle particelle in un mezzo sono descritti mediante la seguente *equazione di diffusione* generale:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t). \tag{11}$$

Deriviamo l'*equazione di diffusione del calore.* Denotiamo con $u(x, t)$ la temperatura del mezzo nel punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ all'istante t. Considerando isotropo il mezzo, denotiamo con $\rho(x)$, $c(x)$ e $k(x)$ rispettivamente la densità, la capacità termica specifica ed il coefficiente di conducibilità termica del mezzo nel punto x. Indichiamo con $F(x, t)$ l'intensità delle sorgenti termiche nel punto x all'istante t. Calcoliamo il bilancio termico in un volume V arbitrario per un intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$. Denotiamo con S la frontiera di V e sia $\boldsymbol{n}$ una normale esterna a questa frontiera. Conformemente alla legge di Fourier, attraverso la superficie S nel volume V, entra una quantità di calore

$$Q_1 = \int_S k \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, dS \, \Delta t = \int_S (k \operatorname{grad} u, \boldsymbol{n}) \, dS \, \Delta t,$$

che è uguale, secondo il lemma di Gauss-Ostrogradskij, a

$$Q_1 = \int_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dx\, \Delta t,$$

Le sorgenti termiche nel volume V producono una quantità di calore

$$Q_2 = \int_V F(x,\ t)\, dx\, \Delta t.$$

Visto che la temperatura in V durante l'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$ cresce di

$$u(x,\ t + \Delta t) - u(x,\ t) \simeq \frac{\partial u}{\partial t}\, \Delta t,$$

ciò richiede una quantità di calore uguale a

$$Q_3 = \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, \Delta t.$$

D'altra parte, $Q_3 = Q_1 + Q_2$ il che significa che

$$\int_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx\, \Delta t = 0,$$

da cui, in virtù del carattere arbitrario di V, si ottiene l'equazione di diffusione del calore

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,\ t). \tag{12}$$

Se il mezzo è omogeneo, cioè se c, ρ e k sono costanti, l'equazione (12) assume la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{13}$$

dove $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ e $f = \frac{F}{c\rho}$. L'equazione (13) è detta *equazione di conduzione termica*. Il numero n di variabili spaziali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in quest'equazione può essere arbitrario.

Come nel caso delle equazioni delle variazioni, per una completa descrizione del processo di diffusione del calore, si deve assegnare la distribuzione iniziale della temperatura u nel mezzo (la condizione iniziale) ed il comportamento del mezzo nella frontiera (le condizioni di frontiera).

a) Se sulla frontiera S va mantenuta una data distribuzione di temperatura u_0, si ha allora

$$u\,|_S = u_0. \tag{14}$$

b) Se su S va mantenuto un dato flusso di calore u_1, si ha allora

$$-k \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_1. \tag{15}$$

c) Se su S ha luogo lo scambio di calore, conformemente alla legge di Newton, allora si ha

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + h (u - u_0)\Big|_S = 0, \tag{16}$$

dove h è il coefficiente di scambio di calore ed u_0 è la temperatura dell'ambiente.

In modo analogo si può dedurre l'*equazione di diffusione* delle particelle. In questo caso al posto della legge di Fourier si deve utilizzare la legge di Nernst per il flusso di particelle attraverso un elemento di superficie ΔS per unità di tempo: $\Delta Q = -D \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S$, dove $D(x)$ è il coefficiente di diffusione ed $u(x, t)$ è la densità di particelle nel punto x all'istante t. L'equazione per la densità u avrà la forma della (11) dove ρ denota il coefficiente di porosità, $p = D$ e q caratterizza l'assorbimento del mezzo.

3. Equazione stazionaria. Per i processi stazionari $F(x, t) = F(x)$, $u(x, t) = u(x)$ le equazioni delle vibrazioni (2) e di diffusione (11) assumono la forma

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x). \tag{17}$$

Per $p =$ costante e $q = 0$ l'equazione (17) è detta *equazione di Poisson*:

$$\Delta u = -f, \quad f = F/p; \tag{18}$$

per $f = 0$ l'equazione (18) si dice *equazione di Laplace*

$$\Delta u = 0. \tag{19}$$

Un processo stazionario è completamente definito se è fissata una delle condizioni di frontiera (14)-(16).

Supponiamo che, nell'equazione d'onda (10), la perturbazione esterna $f(x, t)$ sia periodica di frequenza ω e di ampiezza $a^2 f(x)$:

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Se cerchiamo perturbazioni periodiche $u(x, t)$ della stessa frequenza e di ampiezza incognita $u(x)$, cioè

$$u(x, t) = u(x) e^{i\omega t},$$

per la funzione $u(x)$ si ottiene l'equazione di stato stazionario

$$\Delta u + k^2 u = -f(x),$$
$$k^2 = \omega^2/a^2. \tag{20}$$

detta *equazione di Helmholtz.*

Problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz sorgono dai problemi di diffrazione. Supponiamo, per esempio, che sia data un'onda piana $e^{ik(a,x)}$, $|a| = 1$, $k > 0$, che arrivi dall'infinito e sia sottoposta ad una certa variazione dovuta ad un ostacolo sulla

frontiera S di una regione limitata G (fig. 4). Questo ostacolo può essere assegnato, per esempio, mediante la condizione $u\,|_S = 0$ o $(\partial u/\partial \boldsymbol{n})\,|_S = 0$. L'ostacolo genera un'onda diffusa $v(x)$. Lontano dai centri diffondenti quest'onda sarà prossima ad un'onda sferica divergente

$$v(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)\frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1}). \tag{21}$$

Per questa ragione per $|x| \to \infty$ l'onda $v(x)$ deve soddisfare condizioni della forma

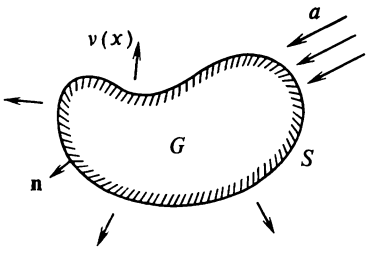


Fig. 4.

$$v(x) = O(|x|^{-1}),\quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ik\,v(x) = o(|x|^{-1}), \tag{22}$$

dette *condizioni di radiazione di Sommerfeld*. La perturbazione totale $u(x)$ all'infuori della regione G rappresenta la somma di un'onda piana e di un'onda diffusa:

$$u(x) = e^{ik(a,x)} + v(x). \tag{23}$$

Osserviamo di passaggio che la funzione $f(s)$, $s = x/|x|$, che figura nella (21), è detta ampiezza di diffrazione; l'ampiezza di diffrazione è anche una funzione dell'impulso incidente ka.

4. Equazione di trasporto. Se la lunghezza del percorso libero delle particelle è molto più grande delle loro dimensioni, per descrivere il processo di propagazione delle particelle, al posto dell'equazione di diffusione è utilizzata la cosiddetta *equazione del trasporto* (*equazione cinetica*). Scriviamo le equazioni del trasporto su seguenti ipotesi: 1) Le velocità di tutte le particelle sono uguali a v. 2) Si possono trascurare le collisioni tra le particelle. 3) Le particelle collidono con i nuclei immobili del mezzo ed $l(x)$ è la lunghezza media del percorso libero nel punto x. 4) Quando una particella collide con un nucleo immobile nel punto x, ha luogo uno dei eventi: a) la particella viene diffusa dal nucleo con probabilità $p_1(x)$ rimbalzando da questo nucleo come una pallina elastica; b) con la probabilità $p_2(x)$ la particella viene catturata dal nucleo; c) con probabilità $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ la particella divide il nucleo ed in conseguenza di questa divisione appaiono $\nu(x) \geqslant 1$ particelle simili (in questo caso si suppone che la particella che ha diviso il nucleo, sparisce). 5) La distribuzione delle particelle rispetto alle direzioni è uniforme (isotropa) sia dopo la diffusione che dopo la divisione.

Denotiamo con $n(x, s, t)$ la densità delle particelle nel punto x che volano nella direzione $s = (s_1, s_2, s_3)$, $|s| = 1$, all'istante t, e con $F(x, s, t)$ la densità delle sorgenti. In questo caso la funzione $\psi = vn$, flusso delle particelle, verifica la seguente equazione integro-differenziale:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \psi}{\partial t} + (s, \operatorname{grad}\psi) + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi}\int_{S_1}\psi(x, s', t)\,ds' + F, \tag{24}$$

dove $\alpha = 1/l$ e $h = p_1 + \nu p_3$. Questa è l'equazione del trasporto a velocità unica per i processi a diffusione isotropa. Le equazioni del trasporto più generiche e le ricerche relative si possono trovare nei libri di Marčjuk [1] e di Vladimirov [1].

Se il processo di trasporto è stazionario, cioè,

$$F(x, s, t) = f(x, s) \quad \psi(x, s, t) = \psi(x, s),$$

l'equazione del trasporto (24) assume la forma

$$(s, \operatorname{grad} \psi) + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, s')\, ds' + f. \tag{25}$$

Per una descrizione completa del processo di trasporto delle particelle si deve assegnare la distribuzione iniziale del flusso di particelle ψ nel mezzo (condizione iniziale) ed il regime di comportamento sulla frontiera di questo mezzo (condizione di frontiera). Per esempio, se la regione G dove ha luogo il processo di trasporto, è convessa, una condizione di frontiera della forma

$$\psi(x, s, t) = 0, \; x \in S, \; (s, n_x) < 0, \tag{26}$$

esprime l'assenza di flusso di particelle incidente sulla regione G dall'esterno (fig. 5).

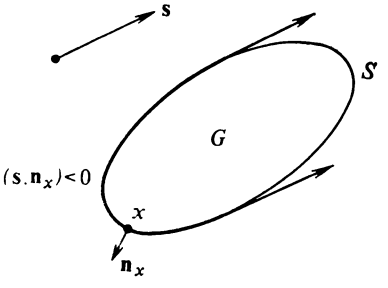


Fig. 5.

Ed infine, notiamo che l'equazione del trasporto descrive il trasporto di neutroni in un reattore nucleare, il trasporto d'energia radiante, il passaggio di quanti γ attraverso una sostanza, il moto di un gas ed altri processi.

5. Equazioni della dinamica dei fluidi. Consideriamo il moto di un fluido perfetto (gas), cioè di un fluido in cui non esiste viscosità. Siano $V(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$ il vettore velocità del fluido, $\rho(x, t)$ la sua densità, $p(x, t)$ la sua pressione, $f(x, t)$ l'intensità delle sorgenti e $F(x, t) = (F_1, F_2, F_3)$ l'intensità delle forze di massa. Allora queste quantità soddisfano il seguente sistema (non lineare) di equazioni dette *equazioni di dinamica dei fluidi*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = f, \tag{27}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \operatorname{grad}) V + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = F. \tag{28}$$

Le equazioni (27) a (28) sono rispettivamente dette *equazione di continuità* ed *equazione del moto di Eulero*. Per completare questo sistema di equazioni è necessario assegnare una relazione tra la pressione e la densità:

$$\Phi(p, \rho) = 0, \tag{29}$$

la cosiddetta *equazione di stato*. Per esempio, per un liquido incompressibile l'equazione di stato ha la forma ρ = costante, mentre per il moto adiabatico di un gas

$$p\rho^{-\varkappa} = \text{costante}, \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v},$$

dove c_p e c_v sono rispettivamente i calori specifici del gas a pressione ed a volume costanti.

In particolare, se un liquido è incompressibile (ρ = costante) ed il suo moto è potenziale ($V = -\operatorname{grad} u$), dall'equazione di continuità (27) segue che il potenziale u soddisfa l'equazione di Poisson (18).

6. Equazioni di Maxwell. Supponiamo che in un mezzo sia immerso un campo elettromagnetico alternato. Siano $E(x, t) = (E_1, E_2, E_3)$ l'intensità di campo elettrico, $H(x, t) = (H_1, H_2, H_3)$ l'intensità di campo magnetico, $\rho(x)$ la densità di cariche elettriche ε la costante dielettrica del mezzo, μ il coef-

ficiente di permeabilità magnetica del mezzo ed $I(x, t) = (I_1, I_2, I_3)$ la corrente di conduzione. Allora queste quantità soddisfano il seguente sistema lineare di equazioni differenziali dette *equazioni di Maxwell*:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{H}) = 0, \tag{30}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu \boldsymbol{H})}{\partial t}, \tag{31}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{I}, \tag{32}$$

dove $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec è la velocità della luce nel vuoto.

L'equazione (31) esprime la legge di Faraday e l'equazione (32) la legge di Ampere.

Riportiamo alcuni casi particolari delle equazioni di Maxwell.

a) $\rho = 0$, ε, μ e λ sono costanti ed $\boldsymbol{I} = \lambda \boldsymbol{E}$ (legge di Ohm). Applicando alle equazioni (31) e (32) l'operatore rot ed utilizzando le equazioni (30), si ottiene per le componenti dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ la cosiddetta *equazione del telegrafista*

$$\Box_a u + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{33}$$

b) $\boldsymbol{I} = 0$, ε e μ sono costanti. Introducendo il *potenziale elettromagnetico* a quattro componenti $(\varphi_0, \boldsymbol{\varphi})$ $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, rappresentiamo la soluzione delle equazioni di Maxwell nella forma

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \varphi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}. \tag{34}$$

Le componenti del potenziale elettromagnetico debbono in questo caso verificare le equazioni d'onda

$$\Box_a \varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^2 \mu}\rho, \quad \Box_a \boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{35}$$

e la condizione di Lorentz

$$\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0. \tag{36}$$

c) Se il processo è stazionario, le equazioni di Maxwell si trasformano nelle *equazioni dell'elettrostatica*

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 \tag{37}$$

e nelle *equazioni della magnetostatica*

$$\operatorname{div}(\mu \boldsymbol{H}) = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{I}. \tag{38}$$

Per ε = costante il potenziale elettrostatico φ_0 soddisfa, in virtù della (35), l'equazione di Poisson (18) per $f = -(4\pi/\varepsilon)\rho$.

Per trasformare le equazioni di Maxwell abbiamo utilizzato le seguenti formule dell'analisi vettoriale:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta I,$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0.$$

7. Equazione di Schrödinger. Supponiamo che una particella quantistica di massa m_0 si muova in un campo di forza esterno con potenziale $V(x)$. Denotiamo con $\psi(x, t)$ la funzione d'onda di questa particella, di modo che $|\psi(x, t)|^2 \Delta x$ sia la probabilità che la particella si trovi nell'intorno $u(x)$ del punto x all'istante t; qui Δx è il volume di $u(x)$. Allora la funzione ψ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi, \tag{39}$$

dove $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ erg·sec è la costante di Planck.

Se l'energia E di una particella ha un valore definito, questo stato di particella è detto *stazionario*. In questo caso la funzione d'onda $\psi(x, t)$ ha la forma

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x),$$

dove la funzione d'onda $\psi(x)$, in virtù della (39), verifica l'equazione stazionaria di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi = E\psi. \tag{40}$$

Per $V = 0$ (particella libera) l'equazione di Schrödinger (40) si trasforma nell'equazione omogenea di Helmholtz (20).

Come per l'equazione di Helmholtz, nei problemi di diffusione dal potenziale V si deve richiedere che siano verificate le condizioni di radiazione di Sommerfeld (22) all'infinito (per $k = \sqrt{2m_0E}\,\hbar^{-1}$, $E \geqslant 0$)[1].

8. **Equazione di Klein-Gordon-Fock ed equazione di Dirac.** La funzione d'onda $\varphi(x_0, x)$, dove $x_0 = ct$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, e c è la velocità della luce che descrive una particella (pseudo) scalare relativistica libera di massa m_0, *verifica l'equazione di Klein-Gordon-Fock*

$$(\Box + m_0^2)\,\varphi = 0. \tag{41}$$

Per descrivere una particella relativistica libera di massa m_0 a spin 1/2 (elettrone, protone, neutrone, neutrino ed altre) serve una funzione d'onda a quattro componenti (spinore):

$$\Psi(x_0, x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4).$$

Questa funzione soddisfa l'*equazione di Dirac*, cioè un sistema di quattro equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right)\Psi(x_0, x) = 0, \tag{42}$$

dove I è la matrice unità e γ^k sono matrici di Dirac (in notazione di Pauli):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione di Dirac è il risultato della fattorizzazione matriciale dell'equazione di Klein-Gordon-Fock, poiché [2]

$$\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right)\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k} + m_0 I\right) = -(\Box + m_0^2)\,I. \tag{43}$$

---

[1] Si veda, per esempio, Blochintsev, [1], capp. IV e XIII, e Messiah [1], cap. II.

[2] Si veda Bogoljubov e Širkov [1], § 6.

§ 3. *Classificazione delle equazioni differenziali quasi-lineari del secondo ordine*

Prima di formulare l'impostazione matematica dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine si devono classificare queste equazioni.

1. Classificazione delle equazioni puntuali. Consideriamo un'equazione differenziale quasi-lineare (lineare in tutte le sue derivate di ordine superiore) del secondo ordine

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x,\ u,\ \text{grad}\ u) = 0 \tag{1}$$

a coefficienti continui $a_{ij}(x)$. Stabiliamo prima di tutto la legge con cui si trasformano questi coefficienti nel caso di una sostituzione non singolare arbitraria di variabili indipendenti $y = y(x)$, cioè

$$\begin{aligned} &y_l = y_l(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \\ &y_l \in C^2, \quad D = \left(\frac{y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n}{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n}\right) \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Visto che $D \neq 0$, in certo intorno le variabili x si possono esprimere in termini delle nuove variabili y, cioè $x = x(y)$. Denotiamo $u(x(y)) = \tilde{u}(y)$; si ha allora $\tilde{u}(y(x)) = u(x)$. Abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{k,\,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Sostituendo le espressioni (3) nell'equazione (1), si ottiene

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial x_l}{\partial y_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \\ + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi^*(y,\ \tilde{u},\ \text{grad}\ \tilde{u}) = 0. \tag{4}$$

Denotando ora i nuovi coefficienti delle derivate seconde con

$$\tilde{a}_{lk}(y) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}, \tag{5}$$

riscriviamo l'equazione (4) nella forma (1):

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} \tilde{a}_{lk}(y)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{\Phi}(y,\ \tilde{u},\ \text{grad}\ \tilde{u}) = 0. \tag{6}$$

Fissiamo il punto x_0 e scriviamo $y_0 = y(x_0)$ ed $\alpha_{li} = \partial y_l(x_0)/\partial x_i$. La formula (5), nel punto x_0, può essere allora scritta nella forma

$$\tilde{a}_{lk}(y_0) = \sum_{i,\, j=1}^{p} a_{ij}(x_0)\, \alpha_{li}\alpha_{kj}. \tag{7}$$

Questa formula di trasformazione dei coefficienti a_{ij} nel punto x_0 coincide con la formula di trasformazione dei coefficienti della forma quadratica

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\, p_i p_j \tag{8}$$

nel caso della trasformazione lineare non singolare

$$p_i = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{li} q_l, \quad \det(\alpha_{li}) \neq 0, \tag{9}$$

che trasforma la forma (8) nella forma

$$\sum_{k,\, l=1}^{n} \tilde{a}_{lk}(y_0)\, q_l q_k. \tag{10}$$

Dunque, per semplificare l'equazione (1) nel punto x_0, mediante una sostituzione di variabili (2), è sufficiente semplificare in questo punto la forma quadratica (8) mediante la trasformazione lineare non singolare (9). Ma, nel corso dell'algebra lineare si dimostra che esiste sempre una trasformazione non singolare (9) che fa assumere alla forma quadratica (8) la seguente forma canonica:

$$\sum_{l=1}^{r} q_l^2 - \sum_{l=r+1}^{m} q_l^2, \quad m \leqslant n; \tag{11}$$

inoltre, in virtù della legge d'inerzia delle forme quadratiche, gli interi r e m non dipendono dalla trasformazione (9) [1]. Questo permette di classificare le equazioni differenziali (1) in conformità con i valori che assumono i coefficienti a_{ij} nel punto x_0.

Se, nella forma quadratica (11), $m = n$ e tutti i termini sono dello stesso segno (cioè $r = m$ o $r = 0$), l'equazione (1) è detta *equazione di tipo ellittico*; se, invece, $m = n$ ma ci sono termini di segni diversi (cioè $1 \leqslant r \leqslant n - 1$), l'equazione (1) è *di tipo iperbolico* (per $r = 1$ o $r = n - 1$ essa è *di tipo iperbolico normale*); infine, se $m < n$, l'equazione (1) è *di tipo parabolico* (per $m = n - 1$ e $r = 1$ o $r = n - 1$ essa è *di tipo parabolico normale*).

Sottolineiamo che la classificazione riportata sopra dipende dal punto x_0, poiché i numeri r e m dipendono da x_0. Per esempio, l'equazione di Tricomi

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

[1] Si veda, per esempio, Maltsev [1], cap. IV, e Beklemišev [1], cap. VIII.

è *del tipo misto*: per $y < 0$ essa è di tipo iperbolico, per $y > 0$ essa è di tipo ellittico e se $y = 0$ essa è di tipo parabolico.

Siano i coefficienti a_{ij} dell'equazione (1) costanti, e supponiamo che la trasformazione (9) fa assumere alla forma quadratica (8) la forma canonica (11). Allora la sostituzione lineare di variabili indipendenti

$$y_l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{li} x_i$$

trasforma l'equazione (1) nella seguente forma canonica:

$$\sum_{l=1} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} - \sum_{l=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0. \qquad (13)$$

Esempi. L'equazione di Laplace è di tipo ellittico, l'equazione d'onda di tipo iperbolico e l'equazione di conduzione termica di tipo parabolico.

2. Espressione dell'operatore di Laplace in coordinate sferiche e cilindriche. Per illustrare le trasformazioni del § 3.1 troviamo

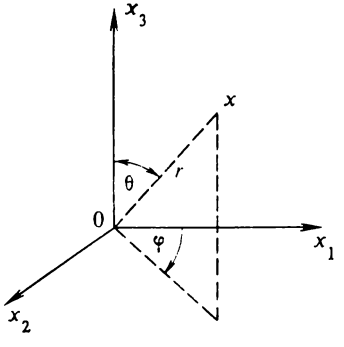


Fig. 6.

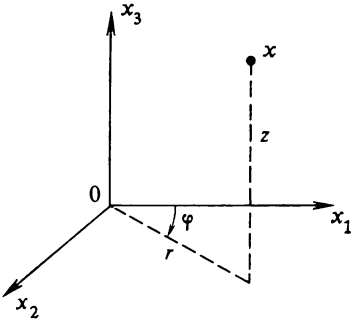


Fig. 7.

l'espressione dell'operatore di Laplace tridimensionale Δ ($n = 3$, $a_{ij} = \delta_{ij}$, $\Phi = 0$) in coordinate sferiche e cilindriche.

a) C o o r d i n a t e s f e r i c h e (fig. 6):

$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi$, $x_2 = r \sin\theta \sin\varphi$, $x_3 = r \cos\theta$.

Abbiamo

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \Delta r = \frac{2}{r};$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\cos\theta \cos\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\cos\theta \sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \Delta\theta = \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad \Delta\varphi = 0.$$

Sostituendo queste espressioni nella formula (4), con $n = 3$, $a_{ij} = \delta_{ij}$ e $\Phi = 0$ e raccogliendo i termini simili, si ottiene

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (14)$$

b) Coordinate cilindriche (polari) (fig. 7):

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z.$$

Eseguendo calcoli analoghi (ma più semplici), si ottiene

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (15)$$

3. Superfici caratteristiche (caratteristiche). Supponiamo che la funzione $\omega(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, della classe C^1 sia tale che, sulla superficie $\omega(x) = 0$, si abbia grad $\omega(x) \neq 0$ ed inoltre

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (16)$$

Allora questa superficie è detta *superficie caratteristica* (*o caratteristica*) dell'equazione differenziale quasi-lineare (1), e l'equazione (16) si dice *equazione caratteristica*. Per $n = 2$ la superficie caratteristica è detta *curva caratteristica*.

Supponiamo che ogni superficie della famiglia $\omega(x) - C = 0$, $a < C < b$, sia una caratteristica dell'equazione (1). Visto che su ogni caratteristica si ha grad $\omega \neq 0$, questa famiglia riempie una regione G (sufficientemente piccola) attraverso ogni punto della quale passa una ed una sola caratteristica. Supponiamo che ω appartenga a $C^2(G)$. Allora, se nella trasformazione (2) poniamo $y_1 = \omega(x)$, in virtù delle (5) e (16), il coefficiente $\tilde{a}_{11}$ si annulla nella corrispondente regione $\tilde{G}$. Perciò conoscendo una o alcune famiglie di caratteristiche di un'equazione differenziale è possibile ridurre quest'equazione ad una forma più semplice. Riportiamo alcuni esempi di caratteristiche.

a) Equazione d'onda (si veda la (10) del § 2.1). La sua equazione caratteristica ha la forma

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

La superficie

$$a^2(t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 = 0, \quad (17)$$

detta *cono caratteristico* con vertice nel punto (x_0, t_0) è una caratteristica dell'equazione d'onda.

Il cono caratteristico (17) è la frontiera dei coni

$$\Gamma^+(x_0, t_0) = [a(t - t_0) > |x - x_0|]$$

e

$$\Gamma^{-}(x_0,\ t_0) = [-a\ (t - t_0) > |\ x - x_0\ |],$$

detti rispettivamente *coni di futuro e di passato* con il vertice nel punto $(x_0,\ t_0)$ (fig. 8). Scriviamo $\Gamma^{\pm} = \Gamma^{\pm}(0,\ 0)$.

L'equazione d'onda ha anche un'altra famiglia di superfici caratteristiche, la famiglia di piani tangenti ai coni caratteristici

$$at + (x,\ b) = C, \tag{18}$$

dove $b = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ e b_k e C sono numeri reali qualsivogliano, con $|\ b\ | = 1$.

b) Equazione di conduzione termica (si veda la (13) del § 2.2). Le sue caratteristiche costituiscono, evidentemente, la famiglia di piani $t = C$.

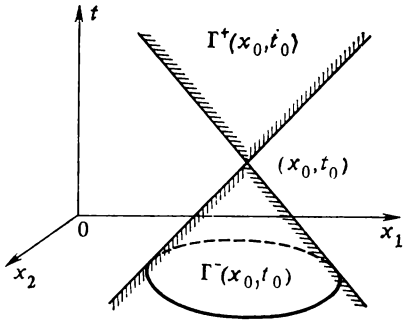


Fig. 8.

c) Equazione di Poisson (si veda la (18) del § 2.3). Quest'equazione non ha caratteristiche (reali), poiché l'equazione caratteristica

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \text{ su } \omega = 0$$

implica che grad ω è nullo su $\omega = 0$, il che è impossibile.

4. Forma canonica delle equazioni a due variabili indipendenti. Nel § 3.1 abbiamo considerato il metodo di riduzione di un'equazione differenziale quasi-lineare del secondo ordine alla forma canonica in ogni punto singolo dove è assegnata quest'equazione. In relazione a ciò sorge la domanda se è possibile, mediante la stessa trasformazione (2), ridurre l'equazione (1) alla forma canonica (13) in un intorno sufficientemente piccolo di ogni punto. Per poter realizzare questa riduzione per ogni equazione, è necessario che il numero di condizioni

$$\tilde{a}_{lk} = 0, \quad l \neq k, \quad l,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$
$$\tilde{a}_{ll} = \varepsilon_l \tilde{a}_{11}, \quad l = 2,\ 3,\ \ldots,\ n; \quad \tilde{a}_{11} \neq 0,$$

dove $\varepsilon_l = 0, \pm 1$, non sia superiore al numero di funzioni incognite y_l, $l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \leqslant n, \quad \text{cioè } n \leqslant 2.$$

Mostriamo che, per $n = 2$ (e, evidentemente, anche per $n = 1$), è sempre possibile realizzare questa riduzione.

Consideriamo un'equazione differenziale quasi-lineare del secondo ordine a due variabili indipendenti:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\Phi\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \qquad (19)$$

dove assumiamo che i coefficienti a, b e c appartengano alla classe C^2 in un certo intorno e non si annullino simultaneamente in nessun punto di questo intorno. Per fissare le idee si può assumere che $a \neq 0$ in questo intorno. Infatti, in caso contrario può risultare che $c \neq 0$. Ma allora, permutando x ed y, si ottiene un'equazione in cui $a \neq 0$. Se, invece, a e c si annullano simultaneamente in un punto, $b \neq 0$ nell'intorno di questo punto. In questo caso, dopo aver diviso l'equazione (19) per $2b$, arriviamo alla forma canonica (26).

Passando alle nuove variabili

$$\xi=\xi(x,\ y),\quad \eta=\eta(x,\ y),\quad \xi\in C^2,\quad \eta\in C^2,\quad D\left(\frac{\xi,\ \eta}{x,\ y}\right)\neq 0, \qquad (20)$$

riduciamo l'equazione (19) alla forma

$$\tilde{a}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}+2\tilde{b}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\,\partial \eta}+\tilde{c}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}+\tilde{\Phi}\left(\xi,\ \eta,\ \tilde{u},\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi},\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right)=0, \qquad (21)$$

dove, in virtù della (5), si ha

$$\begin{aligned}
\tilde{a}&=a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,\\
\tilde{b}&=a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y};\\
\tilde{c}&=a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned} \qquad (22)$$

Richiediamo che le funzioni $\xi\ (x,\ y)$ e $\eta\ (x,\ y)$ annullino i coefficienti $\tilde{a}$ e $\tilde{c}$, cioè, in virtù della (22), soddisfino le equazioni

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2&=0,\\
a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2&=0.
\end{aligned} \qquad (23)$$

Visto che $a \neq 0$, le equazioni (23) sono equivalenti alle equazioni lineari

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\lambda_1(x,\ y)\frac{\partial \xi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \eta}{\partial x}+\lambda_2(x,\ y)\frac{\partial \eta}{\partial y}=0, \qquad (24)$$

dove

$$\lambda_1=\frac{b-\sqrt{d}}{a},\quad \lambda_2=\frac{b+\sqrt{d}}{a},\quad \lambda_2-\lambda_1=\frac{2\sqrt{d}}{a},\quad d=b^2-ac, \qquad (25)$$

Conformemente alla classificazione riportata al § 3.1, sono possibili i seguenti tipi di equazioni (19):

I. *Tipo iperbolico, se* $d > 0$.

II. *Tipo parabolico, se* $d = 0$.

III. *Tipo ellittico, se* $d < 0$.

Consideriamo separatamente questi tre casi.

I. Tipo iperbolico: $d > 0$. In questo caso l'*equazione* (19) *è ridotta alla forma canonica*

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta} + \widetilde{\Phi} = 0. \tag{26}$$

Notiamo che la *sostituzione di variabili* $\rho = \xi + \eta$, $\sigma = \xi - \eta$ *riduce l'equazione* (19) *ad un'altra forma canonica equivalente*

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} + \Phi_1 = 0. \tag{27}$$

Per dimostrare la rappresentazione (26) stabiliamo l'esistenza almeno di una coppia di soluzioni, ξ, η, delle equazioni (24) soddisfacenti le condizioni (20). Notiamo che λ_1 e λ_2 appartengono a C^2. Stabiliamo prima la relazione di queste soluzioni con le caratteristiche dell'equazione (19).

Supponiamo che esistano soluzioni delle equazioni (24) tali che grad $\xi \neq 0$ e grad $\eta \neq 0$ nell'intorno considerato. Allora, per definizione (si veda il § 3.3), le curve

$$\xi(x, y) = C_1, \quad \eta(x, y) = C_2 \tag{28}$$

definiscono due famiglie di caratteristiche dell'equazione (19).

In seguito avremo bisogno del seguente

Lemma. *Sia la funzione* $\omega(x, y)$ *di classe* C^1 *tale che* $\partial\omega/\partial y \neq 0$. *Affinché la famiglia di curve* $\omega(x, y) = C$ *dia le caratteristiche dell'equazione* (19), *è necessario e sufficiente che l'espressione* $\omega(x, y) = C$ *sia l'integrale generale di una delle equazioni differenziali ordinarie*

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y). \tag{29}$$

Le equazioni (29) sono dette *equazioni differenziali delle caratteristiche dell'equazione* (19).

Dimostrazione. Sia $\omega(x, y) = C$ una famiglia di caratteristiche dell'equazione (19). Dalla condizione $\partial\omega/\partial y \neq 0$ segue che le curve $\omega(x, y) = C$ occupano un certo intorno. Per questa ragione la funzione ω soddisfa in questo intorno una delle equazioni (24), per esempio, l'equazione

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{24'}$$

Poi, su ogni caratteristica $\omega(x, y) = C$ è valida la relazione

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{30}$$

Di qui e dalla (24') concludiamo, in virtù della condizione $\partial\omega/\partial y \neq 0$, che $\omega(x, y) = C$ è l'integrale generale della prima delle equazioni (29).

Inversamente, se $\omega(x, y) = C$ è l'integrale generale di una delle equazioni (29), per esempio, dell'equazione $y' = \lambda_1(x, y)$, allora, in virtù della (30), su ogni curva $\omega(x, y) = C$ è verificata la relazione (24'). Ma, per il teorema di esistenza e di unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, per ogni punto dell'intorno considerato passa una curva integrale $\omega(x, y) = C$ di quest'equazione. Per questa ragione l'equazione (24') è soddisfatta in tutti i punti di questo intorno. Concludiamo che, visto che $\omega \in C^1$ e $\partial\omega/\partial y \neq 0$, le curve $\omega(x, y) = C$ sono caratteristiche dell'equazione (19). Il lemma è dimostrato.

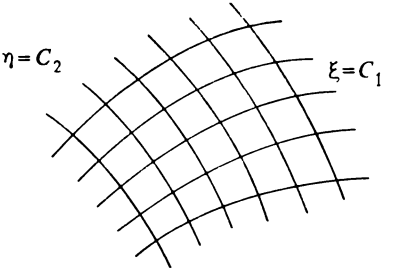


Fig. 9.

In base al lemma dimostrato gli integrali generali delle equazioni (29), $\xi(x, y) = C_1$ e $\eta(x, y) = C_2$, sono tali che ξ e η appartengono a C^1 ed anche $\partial\xi/\partial y$ e $\partial\eta/\partial y$ non sono nulli, definiscono due famiglie di caratteristiche dell'equazione (19). Come segue dalla teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie [1], questi integrali esistono, possibilmente, in un intorno più piccolo. Con ciò, dato che $\lambda_i \in C^2$, ξ, ed η appartengono a C^2 e, in virtù delle (29) e (25), si ha

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}(\lambda_2 - \lambda_1) =$$

$$= 2\frac{\sqrt{d}}{a}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0. \tag{31}$$

Dunque, le famiglie di caratteristiche (28) formano famiglie di linee coordinate (fig. 9), e le funzioni $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ possono essere considerate come nuove variabili. In questo caso nell'equazione (21) si avrà $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$ e, in base alle (22) e (29),

$$\tilde{b} = [a\lambda_1\lambda_2 - b(\lambda_1 + \lambda_2) + c]\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{2d}{a}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0.$$

Dividendo l'equazione (21) per il coefficiente $2\tilde{b} \neq 0$, si ottiene la forma canonica dell'equazione (26).

[1] Si veda, per esempio, Pontrjaghyn, [1], cap. IV.

II. Tipo parabolico, $d \equiv 0$. Sia $d \equiv 0$ in un certo intorno. Allora l'equazione (19) è ridotta alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi} = 0. \tag{32}$$

In questo caso, in virtù della (25), $\lambda_1 = \lambda_2 = b/a \in C^2$, di modo che le equazioni differenziali (24) coincidono e diventano

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \tag{33}$$

Perciò si ha una famiglia $\xi(x, y) = C_1$ di caratteristiche dell'equazione (19) definita, in base al lemma, in termini dell'integrale generale dell'equazione $y' = b/a$ tale che $\partial\xi/\partial y \neq 0$, con $\xi \in C^2$. Come seconda famiglia di linee coordinate scegliamo le rette $x = C_2$. In complesso, la sostituzione di variabili

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = x, \quad D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = -\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$$

dà, in virtù delle (22) e (33),

$$\tilde{a} = 0, \quad \tilde{b} = a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \tilde{c} = a.$$

Dividendo l'equazione (21) per il coefficiente $\tilde{c} = a \neq 0$, si ottiene la forma canonica della (32).

III. Tipo ellittico, $d < 0$. Supponiamo che i coefficienti a, b e c dell'equazione (19) siano funzioni analitiche delle variabili (x, y) in un intorno di un certo punto (si veda il § 4.8). Allora *quest'equazione è ridotta alla forma canonica*

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi} = 0. \tag{34}$$

In questo caso, in base alla (25), i coefficienti λ_1 e λ_2 delle equazioni (24) sono funzioni analitiche, ed inoltre $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ se (x, y) sono reali. Dal teorema di Cauchy-Kovalevskaja segue (si veda il § 4.8) che, in un intorno sufficientemente piccolo, esiste una soluzione analitica $\omega(x, y)$ dell'equazione [1]

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \tag{24'}$$

che soddisfa la condizione $\partial\omega/\partial y \neq 0$. Poniamo

$$\xi = \frac{\omega(x, y) + \bar{\omega}(x, y)}{2}, \qquad \eta = \frac{\omega(x, y) - \bar{\omega}(x, y)}{2i}, \tag{35}$$

[1] La soluzione esiste anche senza l'ipotesi che i coefficienti a, b e c siano analitici (si veda Vekua [1], cap. II). L'ipotesi che i coefficienti siano analitici permette d'utilizzare il teorema di Cauchy-Kovalevskaya sulla risolvibilità dell'equazione (24') a coefficienti complessi nella classe di funzioni analitiche (per $d < 0$ quest'equazione è detta equazione di Beltrami).

dove $\bar{\omega} = \xi - i\eta$ è una funzione complessa coniugata con $\omega = \xi + i\eta$. Questa funzione soddisfa la seconda delle equazioni (24)

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \lambda_2(x, y)\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = 0.$$

Le funzioni ξ e η appartenenti a C^∞ hanno, in virtù delle (35) e (31), uno jacobiano non nullo:

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = D\left(\frac{\xi, \eta}{\omega, \bar{\omega}}\right) D\left(\frac{\omega, \bar{\omega}}{x, y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2i} 2\frac{\sqrt{d}}{a}\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = -\frac{\sqrt{-d}}{a}\left|\frac{\partial \omega}{\partial y}\right|^2 \neq 0.$$

Per questa ragione le funzioni ξ e η possono essere scelte come nuove variabili. Vediamo quale forma assumerà l'equazione (19) in queste variabili. Per costruzione, la funzione ω soddisfa l'equazione

$$a\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Separando qui le parti reale ed immaginaria ed utilizzando la (35), otteniamo

$$a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Tenendo conto delle formule (22), concludiamo che $\tilde{a} = \tilde{c}$ e $\tilde{b} = 0$ nelle variabili ξ e η. Poi, visto che $d < 0$ e $\partial\xi/\partial y \neq 0$, si ha $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$. Dividendo l'equazione (21) per $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$, riduciamola alla forma canonica (34).

5. Esempio. Equazione di Tricomi. Come abbiamo già detto nel § 3.1, l'*equazione di Tricomi*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

appartiene al tipo misto: per $y < 0$ quest'equazione è di tipo iperbolico e per $y > 0$ di tipo ellittico, poiché $d = -y$. L'equazione di Tricomi è importante per la dinamica dei gas, ed inoltre, nella regione iperbolica $y < 0$, essa corrisponde al moto supersonico e, nella regione ellittica $y > 0$, al moto subsonico.

Per $y < 0$ le equazioni caratteristiche (29) assumono la forma $y' = \pm 1/\sqrt{-y}$. Per questa ragione le curve (fig. 10)

$$\frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3} = C_1, \quad \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3} = C_2$$

sono caratteristiche dell'equazione di Tricomi. La trasformazione

$$\xi = \frac{3}{2} x + \sqrt{-y^3}, \quad \eta = \frac{3}{2} x - \sqrt{-y^3}$$

riduce l'equazione di Tricomi alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \right) 0, \quad \xi > \eta.$$

Se, invece, $y > 0$, allora, conformemente alla teoria del § 3.4

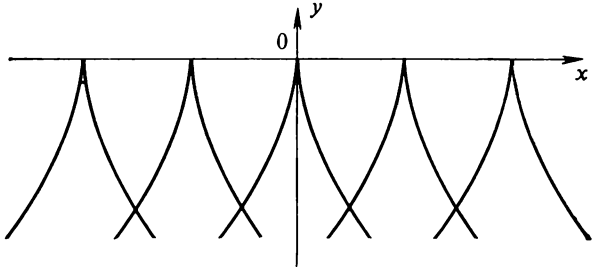


Fig. 10.

si ha $\omega = (3/2)\, x - i\sqrt{y^3}$ e la sostituzione del tipo (35)

$$\xi = \frac{3}{2} x, \quad \eta = -\sqrt{y^3},$$

riduce l'equazione di Tricomi alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0, \quad \eta < 0.$$

§ 4. *Impostazione dei problemi al contorno fondamentali per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine*

In questo paragrafo enunceremo modelli matematici per alcuni processi fisici caratteristici che vengono ridotti a diversi problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

1. Classificazione dei problemi al contorno. Come è stato mostrato nel § 2, l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \tag{1}$$

descrive le vibrazioni, l'equazione

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \tag{2}$$

descrive la diffusione e infine, l'equazione

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x) \tag{3}$$

descrive i rispettivi processi stazionari.

Siano $G \subset R^n$ una regione in cui si svolga il processo e S la sua frontiera che sia supposta una superficie regolare a tratti. Dunque, G è la regione di variazione degli argomenti x nell'equazione (3), il *dominio di definizione* dell'equazione (3). Assumiamo che il dominio di definizione delle equazioni (1) e (2) è un cilindro $Ц_T = G \times (0, T)$ di altezza T e di base G. La sua frontiera consiste della superficie laterale $S \times [0, T]$ e di due basi: inferiore $\overline{G} \times \{0\}$ e superiore $\overline{G} \times \{T\}$ (fig. 11).

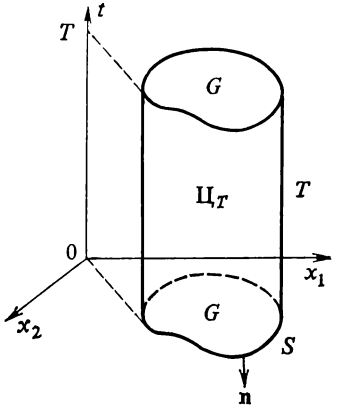


Fig. 11.

Supporremo che i coefficienti ρ, p e q delle equazioni (1)-(3) non dipendano dal tempo t; inoltre, in conformità con il loro significato fisico, supporremo che $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $x \in \overline{G}$. Infine, conformemente al significato fisico delle equazioni (1)-(3), dobbiamo assumere che $\rho \in C(\overline{G})$, $p \in C^1(\overline{G})$ e $q \in C(\overline{G})$.

Con queste supposizioni, conformemente alla classificazione del § 3, l'equazione delle vibrazioni (1) è di tipo iperbolico, quella della diffusione (2) di tipo parabolico e quella stazionaria (3) di tipo ellittico. Dunque, la differenza nel tipo di equazioni considerate è strettamente legata alla differenza dei processi fisici descritti mediante queste equazioni.

Come è stato già detto nel § 2, per descrivere completamente un processo fisico, si deve assegnare, oltre all'equazione stessa che descrive questo processo, lo stato iniziale di questo processo (*condizioni iniziali*) ed il comportamento sulla frontiera della regione in cui si svolge questo processo (*condizioni di frontiera*). Dal punto di vista matematico ciò è dovuto alla non unicità della soluzione delle equazioni differenziali. Infatti, persino per le equazioni differenziali ordinarie di ordine n la soluzione generale dipende da n costanti arbitrarie. Per le equazioni alle derivate parziali la soluzione, in generale, dipende da funzioni arbitrarie; per esempio, la soluzione generale dell'equazione $u_x = 0$ nella classe di funzioni dipendenti dalle variabili x ed y, ha la forma $u(x, y) = f(y)$, dove f è una funzione arbitraria appartenente alla classe C^2. Quindi, per separare una soluzione particolare che descrive un processo fisico reale, si devono imporre *condizioni al contorno*. Queste condizioni sono le condizioni iniziali e quelle di frontiera. Il corrispondente problema è detto *problema al contorno*. Si distinguono, quindi, tre

tipi principali di problemi al contorno per le equazioni differenziali.

a) *Problema di Cauchy* per le equazioni dei tipi iperbolico e parabolico: vengono assegnate le condizioni iniziali, la regione G coincide con tutto lo spazio R^n, le condizioni di frontiera sono assenti.

b) *Problema al contorno* per le equazioni di tipo ellittico: sono assegnate le condizioni di frontiera sulla frontiera S e le condizioni iniziali sono, ovviamente, assenti.

c) *Problema misto* per le equazioni dei tipi iperbolico e parabolico: sono assegnate le condizioni iniziali e quelle di frontiera, $G \neq R^n$.

Descriviamo più dettagliatamente l'impostazione di ogni dei problemi al contorno menzionati per le equazioni considerate (1)-(3).

2. Problema di Cauchy. Per l'equazione delle vibrazioni (1) (tipo iperbolico) il problema di Cauchy è formulato come segue: determinare una funzione $u(x, t)$ di classe C^2 $(t > 0) \cap C^1$ $(t \geqslant 0)$ soddisfacente l'equazione (1) nel semispazio $t > 0$ e le condizioni iniziali per $t = +0$:

$$u\,|_{t=0} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x). \tag{4}$$

È anche necessario che $F \in C$ $(t > 0)$, $u_0 \in C^1$ (R^n), $u_1 \in C$ (R^n).

Per l'equazione della diffusione (2) (tipo parabolico) il problema di Cauchy è formulato come segue: trovare una funzione $u(x, t)$ di classe C^2 $(t > 0) \cap C$ $(t \geqslant 0)$ che soddisfa l'equazione (2) nel semispazio $t > 0$ e la condizione iniziale per $t = +0$:

$$u\,|_{t=0} = u_0(x). \tag{5}$$

È anche necessario che $F \in C$ $(t > 0)$, $u_0 \in C$ (R^n).

L'impostazione menzionata del problema di Cauchy per un'equazione di tipo iperbolico ammette la seguente generalizzazione. Siano date l'equazione differenziale quasi-lineare del secondo ordine di tipo iperbolico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial t} + \\ + \Phi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{6}$$

la superficie regolare a tratti $\Sigma = [\, t = \sigma(x)]$ e le funzioni u_0 ed u_1 su Σ (*dati di Cauchy*). Il problema di Cauchy per l'equazione (6) consiste nel trovare, in una certa parte della regione $t > \sigma(x)$ adiacente alla superficie Σ, una soluzione $u(x, t)$ soddisfacente su Σ le condizioni al contorno

$$u\,|_{\Sigma} = u_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Sigma} = u_1, \tag{7}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è la normale a Σ diretta nella parte dei t crescenti (fig. 12).

3. Il ruolo delle caratteristiche nell'impostazione del problema di Cauchy. Supponiamo che la superficie Σ appartenga alla classe C^2 (si veda il § 1.1) e non tocchi in alcun suo punto la superficie caratteristica (si veda il § 3.3) dell'equazione (6), cioè che su Σ sia verificata la disuguaglianza

$$\tilde{a}_{00} \equiv 1 - \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \neq 0. \tag{8}$$

Trasformiamo il problema di Cauchy (6)-(7) in un problema di Cauchy in cui i dati di Cauchy vengono assegnati sul piano $\tau = 0$.

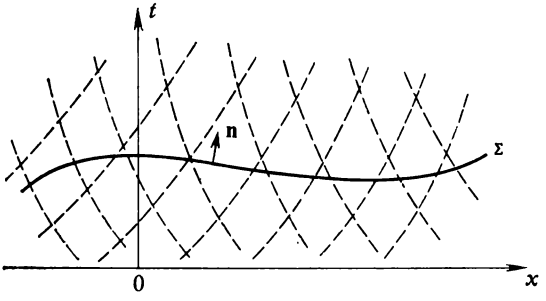


Fig. 12.

Per ciò, sostituiamo la variabile t, con una nuova variabile $\tau = t - \sigma(x)$. Con questa sostituzione di variabile l'equazione (6) per la funzione

$$\tilde{u}(x, \tau) = u(x, \tau + \sigma(x)) \tag{9}$$

nell'intorno di Σ assume la forma (si veda il § 3.1)

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\tilde{a}_{00}} \sum_{i,\, j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \, \partial x_j} + \frac{1}{\tilde{a}_{00}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i0} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \, \partial \tau} + \tilde{\Phi}, \tag{10}$$

visto che, in virtù dell'(8), $\tilde{a}_{00} \neq 0$ su Σ. Con ciò la superficie Σ si trasforma nel piano $\tau = 0$ e le condizioni al contorno (7), in virtù della (9), assumono la forma

$$\tilde{u}\,|_{\tau=0} = u\,|_{\Sigma} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma}. \tag{11}$$

Non resta che trovare $\partial u/\partial t$ su Σ. Derivando la prima delle condizioni al contorno (7), $u_0(x) = u(x, \sigma(x))$, rispetto a x_i, si ottengono n relazioni su Σ:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Derivando la funzione $u(x, t)$ lungo la normale

$$n = \left(\frac{1}{\Delta}, -\frac{1}{\Delta}\operatorname{grad}\sigma\right), \quad \Delta = \sqrt{1 + |\operatorname{grad}\sigma|^2},$$

e, tenendo conto della seconda delle condizioni al contorno (7), si ottiene un'altra relazione su Σ:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}. \tag{13}$$

Il sistema di equazioni algebriche lineari (12)-(13) è univocamente risolvibile rispetto alle quantità $\partial u/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\partial u/\partial t$ in ogni punto della superficie Σ, poiché il suo determinante non è nullo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\sigma}{\partial x_1} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\sigma}{\partial x_n} & 0 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\sigma}{\partial x_1} & \ldots & -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\sigma}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta \neq 0.$$

Osservazione. D'altra parte, se la superficie Σ coincide con la superficie caratteristica dell'equazione (6), il corrispondente problema di Cauchy (6)-(7) può non avere alcuna soluzione, e se anche ha una soluzione, quest'ultima può non essere unica.

Per dimostrare quest'asserzione è sufficiente citare il seguente esempio. Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione $u_{xt} = 0$ con i dati sulla caratteristica $t = 0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

Se la soluzione di questo problema esiste, dall'equazione e dalla seconda condizione iniziale segue la condizione necessaria della sua risolvibilità, e cioè: $u_1'(x) = 0$. Dunque, una soluzione del problema può esistere solo per $u_1(x) =$ $=$ costante $= a$. In questo caso, se u_0 appartiene a C^2, una soluzione esiste realmente e, come è facile convincersi, è data dalla formula

$$u(x, t) = u_0(x) + at + c(t),$$

dove $c(t)$ è una funzione qualunque appartenente alla classe C^2 $(t \geqslant 0)$ che soddisfa le condizioni $c(0) = c'(0) = 0$. Quindi, la soluzione non è unica!

4. Problema al contorno per le equazioni di tipo ellittico. Il problema al contorno per l'equazione (3) (tipo ellittico) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfa nella regione G l'equazione (3) e la condizione di frontiera su S della forma

$$\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = v, \tag{14}$$

dove α, β e v sono funzioni continue a tratti date su S, ed inoltre $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$. Si distinguono i seguenti tipi di condizioni di frontiera.

Condizione di frontiera di primo tipo ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)

$$u\,|_S = u_0. \tag{15}$$

Condizione di frontiera di secondo tipo ($\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_1. \tag{16}$$

Condizione di frontiera di terzo tipo ($\beta = 1$, $\alpha \geqslant 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\Big|_S = u_2. \tag{17}$$

I corrispondenti problemi al contorno sono detti *problemi al contorno di primo, secondo e terzo tipo.*

Per le equazioni di Laplace e Poisson (si veda il § 2.3) il problema al contorno di primo tipo

$$\Delta u = -f, \quad u\,|_S = u_0 \tag{18}$$

è detto *problema di Dirichlet*; il problema al contorno di secondo tipo

$$\Delta u = -f, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_1 \tag{19}$$

detto *problema di Neumann.*

In modo analogo vengono imposti i problemi al contorno per l'equazione (3) anche all'esterno di una regione limitata G (*problemi al contorno esterni*). La differenza consiste nel fatto che, oltre alla condizione di frontiera (14) su S, sono anche assegnate le condizioni all'infinito. Da queste condizioni possono, per esempio, fungere le condizioni di radiazione di Sommerfeld (22) del § 2.3 (per l'equazione di Helmholtz o di Schrödinger, si veda il § 2.7), le condizioni del tipo

$$u\,(x) = O\,(1) \quad \text{o} \quad u\,(x) = o\,(1), \quad |\,x\,| \to \infty \tag{20}$$

(per l'equazione di Poisson), o il fatto che ψ appartiene a $\mathscr{L}_2\,(R^3)$ (per le autofunzioni dell'equazione di Schrödinger (40) del § 2.7) ed altre.

5. Problema misto. Per l'equazione delle vibrazioni (1) (tipo iperbolico) il problema misto è posto come segue: trovare una funzione $u\,(x, t)$ di classe $C^2\,(\amalg_T) \cap C^1(\overline{\amalg}_T)$ soddisfacente l'equazione (1) nel cilindro $\amalg_T$, le condizioni iniziali (4) per $t = 0$, $x \in \overline{G}$ (sulla base inferiore di $\amalg_T$) e la condizione di frontiera

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = v \tag{14'}$$

(sulla superficie laterale di $\amalg_T$). Con ciò debbono essere verificate le condizioni di regolarità

$F \in C\,(\amalg_T)$, $u_0 \in C^1\,(\overline{G})$, $u_1 \in C\,(\overline{G})$, v è una funzione continua a tratti su $S \times [0, T]$

e le condizioni di concordanza

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_S = v\,|_{t=0} \tag{21}$$

In modo analogo, per l'equazione di diffusione (2) (tipo parabolico) il problema misto viene imposto come segue: trovare una funzione $u(x, t)$ di classe $C^2(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$, $\operatorname{grad}_x u \in C(\bar{\Pi}_T)$, che soddisfa l'equazione (2) in Π_T, la condizione iniziale (5) e la condizione di frontiera (14').

Osservazione. Le soluzioni dei problemi al contorno formulati con regolarità di C^1 fino alla frontiera del dominio di definizione non esistono sempre, e perciò si è a volte costretti a rinunciare alla condizione di regolarità e richiedere, per esempio, che la soluzione sia solo continua fino alle frontiere della regione. Questa formulazione è naturale nei problemi non contenenti derivate prime nelle condizioni al contorno, per esempio, per le equazioni (2) e (3) con condizione di frontiera di primo tipo. Se, invece, nelle condizioni al contorno figurano derivate prime, in ogni caso particolare è necessario indicare il senso in cui debbono essere verificate queste condizioni al contorno. Per esempio, per il problema misto dell'equazione (1) si può richiedere che la seconda condizione iniziale (4) sia verificata nel senso di $\mathscr{L}_2(G)$, e cioè:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - u_1 \right\| \to 0, \quad t \to +0; \tag{22}$$

per il problema di Neumann per l'equazione di Laplace si può richiedere che la condizione al contorno (16) sia verificata nel seguente senso:

$$\frac{\partial u(x')}{\partial n_x} \overset{x' \in S}{\rightrightarrows} u_1(x), \quad x' \to x,\ x' \in G,\ x' \in -n_x. \tag{23}$$

6. Altri problemi al contorno. Formuliamo ancora due problemi al contorno che s'incontrano spesso in fisica matematica.

a) *Problema di Goursat.* Sia data un'equazione differenziale lineare di tipo iperbolico a due variabili indipendenti nella forma canonica (si veda il § 3.4)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y) \tag{24}$$

a coefficienti continui a, b e c in un rettangolo chiuso $\bar{\Pi}$, $\Pi = (0, x_0) \times (0, y_0)$. Si richiede di trovare una funzione $u(x, y)$ di classe $C^1(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$, $u_{xy} \in C(\Pi)$ [1] che soddisfa l'equazione (24) in Π e che assume i valori dati sui suoi lati $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant x_0$ e $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant y_0$ (fig. 13):

$$u\,|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad u\,|_{x=0} = \varphi_2(y). \tag{25}$$

Qui debbono anche essere verificate le condizioni di regolarità

$$f \in C(\Pi), \quad \varphi_1 \in C([0, x_0]), \quad \varphi_2 \in C([0, y_0])$$

e la condizione di concordanza $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

[1] In questo caso si ha $u_{xy} = u_{yx}$ in Π (si veda, per esempio, Kudrjavtsev [1], § 21).

Notiamo che nel problema di Goursat è assegnata una sola condizione al contorno su due caratteristiche intersecantisi dell'equazione (24).

b) *Problema di Tricomi per l'equazione di Čaplyghin.* L'equazione di Čaplyghin ha la forma

$$K(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{26}$$

dove

$$K(0)=0, \quad K'(y)>0, \quad y\neq 0;$$

per $K(y)=y$ l'equazione (26) si trasforma in quella di Tricomi (si veda il § 3.5).

Supponiamo che una regione connessa semplice G nel piano (x, y) sia divisa dalla linea parabolica $y=0$ dell'equazione di Tricomi

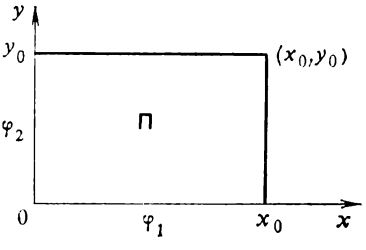


Fig. 13.

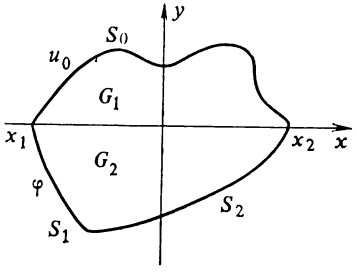


Fig. 14.

in due parti: la parte ellittica G_1 $(y>0)$ e quella iperbolica G_2 $(y<0)$. Supponiamo che la regione G_1 in $y>0$ sia limitata da una curva regolare a tratti S_0 che termini nei punti x_1 e x_2, $x_1<x_2$, sull'asse x, e la regione G_2 in $y<0$ sia limitata da due caratteristiche intersecantisi S_1 e S_2 dell'equazione (26) (cfr. il § 3.5) che passano rispettivamente per i punti x_1 e x_2 sull'asse x (fig. 14).

Si richiede di determinare una funzione $u(x, y)$ della classe $C^2(G_1 \cup G_2) \cap C^1(G) \cap C(\bar{G})$ che soddisfa l'equazione (26) nelle regioni G_1 e G_2 ed assume, sull'arco S_0 e su una delle caratteristiche (per esempio su S_1), i valori assegnati

$$u|_{S_0}=u_0, \quad u|_{S_1}=\varphi. \tag{27}$$

È inoltre necessario che $u_0 \in C(S_0)$, $\varphi \in C(S_1)$ ed $u_0(x_1)=\varphi(x_1)$.

7. Correttezza delle impostazioni dei problemi della fisica matematica. Visto che i problemi della fisica matematica rappresentano modelli matematici di processi fisici reali, le loro impostazioni debbono soddisfare le seguenti condizioni evidenti.

a) La soluzione deve *esistere* in una certa classe di funzioni $\mathcal{M}_1$.

b) La soluzione dev'essere *unica* in una certa classe di funzioni $\mathcal{M}_2$.

c) La soluzione deve dipendere *con continuità* dai dati del problema (dalle condizioni iniziali e di frontiera, dal termine noto, dai coefficienti dell'equazione ecc.). La dipendenza continua della soluzione u dai dati del problema $\tilde{u}$ vuol dire quanto segue: supponiamo che la successione di dati $\tilde{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, tenda in un certo senso ad $\tilde{u}$ ed u_k, $k = 1, 2, \ldots$, essendo u le corrispondenti soluzioni del problema. Allora dev'essere $u_k \to u$, $k \to \infty$ nel senso di convergenza in un modo appropriato. Supponiamo, per esempio, che il problema sia rappresentato dall'equazione $Lu = F$, dove L è l'operatore lineare che trasferisce $\mathscr{M}$ in $\mathscr{N}$, dove $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ sono spazi lineari normati. In questo caso la dipendenza continua della soluzione u dal termine noto F sarà assicurata se l'operatore L^{-1} esiste ed è limitato da $\mathscr{N}$ in $\mathscr{M}$ (si veda i §§ 1.10 e 1.11). La condizione di dipendenza continua della soluzione u è dovuta al fatto che i dati fisici sono di regola ottenuti dagli esperimenti in modo approssimato e per questa ragione si deve essere sicuri che la soluzione del problema, nell'ambito del modello matematico scelto, non dipenda sostanzialmente dagli errori di misura.

Il problema che soddisfa le condizioni menzionate è detto *correttamente impostato* (secondo Hadamard), ed il corrispondente insieme di funzioni $M_1 \cap M_2$ è la *classe di correttezza*. Un problema che non soddisfa almeno una delle condizioni a)-c) è detto *impostato non correttamente*.

A problemi posti non correttamente conducono spesso i problemi inversi della fisica matematica, cioè i problemi nei quali i dati sulla soluzione del problema diretto vengono utilizzati per ricostruire alcune grandezze fisiche che definiscono questo problema (sorgenti, condizioni al contorno, coefficienti dell'equazione ecc.).

Un nuovo approccio per la soluzione dei problemi posti non correttamente è stato suggerito da A. N. Tichonov [1] [1].

In questo libro stabiliamo la correttezza dei problemi al contorno principali per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine in una certa classe nonché studiamo le proprietà qualitative delle soluzioni ed i metodi di costruzione delle soluzioni (esatte o approssimate) di questi problemi.

Esempio. Nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie si dimostra (si veda, per esempio, Stepanov [1], cap. II), che il problema di Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

è posto correttamente se la funzione $f(x, y)$ è continua rispetto a (x, y) e soddisfa la condizione di Lipschitz rispetto ad y (si veda il § 1.3) in una certa regione contenente il punto (x_0, y_0).

---

[1] Si veda anche Tichonov, Ivanov e Lavrentiev [1], Lavrentiev [1], e Tichonov e Arsenin [1].

8. **Teorema di Cauchy-Kovalevskaja.** In questa sezione separiamo una classe sufficientemente generica di problemi di Cauchy per i quali una soluzione esiste ed è unica. Introduciamo prima di tutto due definizioni [1].

1) Un sistema di N equazioni differenziali con N funzioni incognite $u_1, u_2, \ldots, u_N$

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i\,(x,\ t,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N,\ \ldots,\ D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u_j\ \ldots), \qquad (28)$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

si dice *normale, rispetto alla variabile* t, se i secondi membri Φ_i non contengono derivate di ordine superiore a k_i e derivate rispetto a t di ordine superiore a $k_i - 1$, e cioè

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k_i, \quad \alpha_0 \leqslant k_i - 1.$$

Per esempio, l'equazione d'onda, l'equazione di Laplace e l'equazione di conduzione termica sono normali rispetto ad ogni variabile x; inoltre, l'equazione d'onda è normale rispetto a t.

2) Una funzione $f\,(x)$, $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n)$ è detta *analitica nel punto* x_0, se, in un certo intorno di questo punto, è rappresentata nella forma di una serie di potenze uniformemente convergente

$$f\,(x) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} c_\alpha\,(x - x_0)^\alpha = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \frac{D^\alpha f\,(x_0)}{\alpha!}\,(x - x_0)^\alpha$$

(il punto x_0 può anche essere complesso). Se la funzione $f\,(x)$ è analitica in ogni punto di una regione G, si dice che è analitica in G.

Per il sistema di equazioni (28) normale rispetto a t poniamo il seguente problema di Cauchy: trovare una soluzione $u_1, u_2, \ldots, u_N$ di questo sistema che soddisfa le condizioni iniziali per $t = t_0$:

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = \varphi_{ik}\,(x), \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots, \qquad k_i - 1; \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N, \qquad (29)$$

dove $\varphi_{ik}\,(x)$ sono funzioni date in una regione $G \subset R^n$.

Teorema di Cauchy-Kovalevskaja. *Se tutte le funzioni* $\varphi_{ik}\,(x)$ *sono analitiche in un certo intorno del punto* x_0 *e tutte le funzioni* $\Phi_i\ (x,\ t,\ \ldots,\ u_{j\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n},\ \ldots)$ *sono analitiche in un certo intorno del punto*

$$(x_0,\ t_0,\ \ldots,\ D^\alpha\,\varphi_{j\alpha_0}\,(x_0),\ \ldots),$$

il problema di Cauchy (28)-(29) *ha una soluzione analitica in un intorno del punto* $(x_0,\ t_0)$ *che è inoltre unica nella classe delle funzioni analitiche.*

Per dimostrare questo teorema cerchiamo la soluzione $u_1, u_2, \ldots, u_N$ nell'intorno del punto $(x_0,\ t_0)$ sotto forma di una serie di potenze

$$u_i\,(x,\ t) = \sum_{\alpha_0 \geqslant 0,\ |\alpha| \geqslant 0} \frac{D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u_i\,(x_0,\ t_0)}{\alpha_0!\alpha!}\,(t - t_0)^{\alpha_0}\,(x - x_0)^\alpha. \qquad (30)$$

[1] Le notazioni utilizzate nel seguito sono state introdotte nel § 1.2.

Le condizioni iniziali (29) e le equazioni (28) determinano successivamente tutte le derivate $D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u_i$ al punto (x_0, t_0). La convergenza uniforme delle serie (30) in un intorno del punto (x_0, t_0) può essere dimostrata mediante il metodo di maggiorante. L'unicità della soluzione costruita nella classe di funzioni analitiche segue dal teorema d'unicità per le funzioni analitiche.

Le dimostrazioni dettagliate del teorema di Cauchy-Kovalevskaja sono, per esempio, contenute nei libri di Petrovskij [1], Položij [1], e Michajlov [1].

9. Esempio di Hadamard. Il teorema di Cauchy-Kovalevskaja, malgrado il suo carattere generale, non risolve completamente il problema della correttezza di impostazione del problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali normale. Infatti, questo sistema garantisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione solo in un intorno sufficientemente piccolo o, come si è soliti dire, *locale.* Normalmente è necessario stabilirlo nelle regioni assegnate (e nient'affatto piccole) o, come si dice, *nell'insieme.* Inoltre, i dati iniziali ed il termine noto sono di regola funzioni non analitiche. Infine, può non esistere completamente la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali. Un esempio costruito per la prima volta da Hadamard [1] lo dimostra; riportiamo quest'esempio.

La soluzione del problema di Cauchy

$$u\,|_{t=0} = 0, \qquad u_t\,|_{t=0} = \frac{1}{k}\,\sin\,kx$$

per l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

è

$$u_k(x,\,t) = \frac{\operatorname{sin\,h}\,kt}{k^2}\sin kx.$$

Se $k \to \infty$, si ha $(1/k)\sin kx \overset{x}{\Rightarrow} 0$; malgrado ciò per $x \neq j\pi$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, si ha

$$u_k(x,\,t) = \frac{\operatorname{sin\,h}\,kt}{k^2}\sin kx \not\to 0, \qquad k \to \infty.$$

Dunque, il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace è posto in modo non corretto (nel senso della definzione del § 4.7).

Tuttavia, sono possibili formulazioni corrette di questo problema. Per esempio, in una classe di funzioni limitate da una costante fissa, questo problema è correttamente posto, a condizione che esista una sua soluzione (quest'ultima condizione porta a restrizioni del tutto definite sull'insieme dei dati iniziali u_0 ed u_1 ammissibili). Sulle formulazioni corrette del problema di Cauchy per l'equazione di Laplace si veda M. M. Lavrentiev [1].

10. Soluzioni classiche e generalizzate. Le impostazioni dei problemi al contorno esposte nelle sezioni precedenti sono caratterizzate dal fatto che le loro soluzioni sono supposte sufficientemente

regolari e debbono soddisfare l'equazione in ogni punto del dominio di definizione di quest'equazione. Chiameremo queste soluzioni *classiche* e l'impostazione del corrispondente problema al contorno *impostazione classica*. Dunque, le impostazioni classiche di un problema al contorno suppongono già una regolarità sufficiente dei dati che figurano in questo problema. Ma nei problemi più interessanti questi dati possono avere particolarità abbastanza forti. Quindi, per questi problemi le impostazioni classiche non sono sufficienti. Per impostare questi problemi si deve rinunciare (parzialmente o completamente) a condizioni di regolarità della soluzione nella regione o fino alla frontiera ed introdurre le cosiddette *soluzioni generalizzate* [1]. Ma allora quali funzioni si possono dire soluzioni dell'equazione? Per rispondere a questa domanda si deve notevolmente generalizzare la nozione di derivata ed in generale la nozione di funzione, cioè introdurre le cosiddette *funzioni generalizzate*. Il capitolo seguente è completamente dedicato allo studio di questa questione.

---

[1] L'idea di soluzioni generalizzate risale ad Eulero. Le differenti definizioni di soluzione generalizzata rispetto ai vari problemi sono state introdotte e studiate da molti autori a partire degli anni '20 del nostro secolo (Evans, Tonelli, Mori, Dirac, Friderichs, Lere, Sobolev, Bochnerd, Hadamard, Riesz. Schwartz, Bogoljubov, Gording, Ghelfand, Hörmander ed altri).

II. Funzioni generalizzate

Per la prima volta le funzioni generalizzate sono state introdotte da P. Dirac [1] nei suoi studi quantomeccanici nei quali è stata sistematicamente utilizzata la nota funzione delta. I fondamenti della teoria matematica delle funzioni generalizzate furono posti da S. L. Sobolev ([2] nel 1936) e da L. Schwartz negli anni 1950-1951. In seguito la teoria delle funzioni generalizzate è stata intensamente sviluppata da molti matematici. Il suo rapido sviluppo fu stimolato per lo più dalle esigenze della fisica matematica ed in particolare delle teorie delle equazioni differenziali e della fisica quantistica. Attualmente la teoria delle funzioni generalizzate è avanzata in modo notevole, ha avuto molte applicazioni in fisica e in matematica ed è diventata uno strumento quotidiano dei fisici, matematici ed ingegneri [1].

§ 5. *Funzioni fondamentali e generalizzate*

1. Introduzione. Una funzione generalizzata è una generalizzazione del concetto classico di funzione. Da una parte questa generalizzazione permette di esprimere, in forma matematica, concezioni idealizzate, per esempio: la densità di un punto materiale, la densità di una carica puntiforme o di un dipolo, la densità di uno strato semplice o doppio, l'intensità di una sorgente istantanea puntiforme, l'intensità di una forza applicata ad un punto, ecc. D'altra parte, il concetto di funzione generalizzata riflette il fatto che in realtà è impossibile misurare, per esempio, la densità di una sostanza in un punto: si può solo misurare la sua densità media in un intorno sufficientemente piccolo di questo punto e dichiarare questa densità in un punto dato. Grosso modo, una funzione generalizzata è definita dai suoi « valori medi » negli intorni di ogni punto.

Per esplicare quanto detto sopra cerchiamo di determinare la densità creata da un punto materiale di massa 1. Consideriamo che questo punto coincida con l'origine delle coordinate.

[1] Si veda Bogoljubov, Logunov e Todorov [1], Ghelfand e Šilov [1], Vladimirov [2, 3], Streater e Wightman [1], Jost [1], Bremermann [1], Schwartz [1], Hörmander [1].

Per determinare questa densità, distribuiamo questa massa (o, come si dice facciamo «sparpagliare») la massa 1 uniformemente all'interno di una sfera U_ε. In conseguenza di ciò si ottiene la densità media

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Consideriamo prima come densità cercata (la denotiamo con $\delta(x)$) il limite puntuale della successione di densità medie $f_\varepsilon(x)$ per $\varepsilon \to 0$, cioè

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x = 0, \\ 0, & \text{se } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Per la densità δ è naturale richiedere che l'integrale di questa densità rispetto ad ogni volume V dia la massa della sostanza contenuta in questo volume, cioè

$$\int_V \delta(x)\, dx = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \in V, \\ 0, & \text{se } 0 \notin V. \end{cases}$$

Ma, in virtù della (1), il primo membro di quest'uguaglianza è sempre uguale a zero. La contraddizione ottenuta mostra che il limite puntuale di una successione $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to 0$, non può essere scelto in qualità della densità $\delta(x)$.

Calcoliamo ora il *limite debole* della successione di funzioni $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to 0$, cioè per una funzione continua qualsiasi calcoliamo il limite della successione di numeri $\int f_\varepsilon \varphi\, dx$ per $\varepsilon \to 0$ (si veda il § 1.10).

Mostriamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int f_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Infatti, in virtù della continuità della funzione $\varphi(x)$ per $\eta > 0$ esiste un $\varepsilon_0 > 0$ tale che $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$, visto che $|x| < \varepsilon_0$. Questo implica che per tutti gli $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ si ha

$$\left| \int f_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int\limits_{|x|<\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int\limits_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)|\, dx < \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int\limits_{|x|<\varepsilon} dx = \eta,$$

come abbiamo affermato.

Dunque, il limite debole della successione delle funzioni $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to 0$ è il funzionale $\varphi(0)$ che fa corrispondere ad ogni funzione continua $\varphi(x)$ un numero $\varphi(0)$, il suo valore al punto $x = 0$. Proprio questo funzionale viene considerato la definizione della densità $\delta(x)$. Questa è appunto la nota *funzione delta di Dirac.*

Dunque, $f_\varepsilon(x) \to \delta(x)$, $\varepsilon \to 0$, nel senso che, per una funzione continua $\varphi(x)$ qualsiasi, è valida la relazione limite:

$$\int f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx \to (\delta, \varphi), \qquad \varepsilon \to 0,$$

dove il simbolo (δ, φ) indica il numero $\varphi(0)$, e cioè il valore del funzionale δ sulla funzione φ.

Per ristabilire ora la massa totale, si deve applicare il funzionale (densità) $\delta(x)$ alla funzione $\varphi(x) = 1$, $(\delta, 1) = 1(0) = 1$.

Se nel punto $x = 0$ è concentrata una massa m, la corrispondente densità dev'essere considerata uguale a $m\delta(x)$. Se la massa m è concentrata nel punto x_0, è naturale prendere la sua densità uguale a $m\delta(x - x_0)$, dove $(m\delta(x - x_0), \varphi) = m\varphi(x_0)$. In generale, se in diversi punti x_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, sono concentrate le masse m_k, la corrispondente densità è uguale a

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \delta(x - x_k).$$

Quindi, la densità creata da punti materiali non può essere descritta nel quadro del concetto classico di funzione e per la sua descrizione si devono introdurre i fenomeni di una natura matematica più generale: i funzionali continui lineari, o le funzioni generalizzate.

2. Spazio delle funzioni fondamentali $\mathscr{D}$. Nel caso della funzione delta si vede che essa è definita mediante funzioni continue come un funzionale continuo lineare su queste funzioni (si veda il § 1.10). Le funzioni continue sono quindi *funzioni fondamentali* per la funzione delta. Questo punto di vista si prende come base per la definizione di una funzione generalizzata arbitraria come un funzionale continuo lineare su uno spazio di funzioni (fondamentali) sufficientemente « buone ». È chiaro che più stretto è lo spazio delle funzioni fondamentali, più grande è il numero di funzionali continui lineari esistenti su questo spazio. D'altra parte, la riserva di funzioni fondamentali dev'essere sufficientemente grande. Introduciamo un importante spazio $\mathscr{D}$ di funzioni fondamentali.

Riportiamo all'*insieme delle funzioni fondamentali* $\mathscr{D} = \mathscr{D}(R^n)$ (si veda il § 1.2) tutte le *funzioni finite infinitamente derivabili in* R^n. Definiamo la convergenza in $\mathscr{D}$ nel modo seguente. Una successione di funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, di $\mathscr{D}$ converge alla funzione φ (di $\mathscr{D}$) se: a) esiste un numero $R > 0$ tale che $\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_R$; b) per ogni $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ si ha

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x \in R^n}{\Longrightarrow} D^\alpha \varphi(x), \qquad k \to \infty.$$

Scriviamo in questo caso $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$.

Un insieme lineare $\mathscr{D}$ in cui si è introdotta la convergenza è detto *spazio delle funzioni fondamentali* $\mathscr{D}$.

L'operazione di derivazione, $D^\beta \varphi(x)$, *è continua da* $\mathscr{D}$ *in* $\mathscr{D}$.

Infatti, se $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$, si ha allora: a) $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ per un certo R positivo e b) per ogni α si ha

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x}{\Rightarrow} 0, \qquad k \to \infty.$$

Ma allora a) supp $D^\beta \varphi_k \subset \bar{U}_R$; b) per ogni α si ha:

$$D^\alpha [D^\beta \varphi_k(x)] = D^{\alpha+\beta} \varphi_k(x) \overset{x}{\Rightarrow} 0$$

se $k \to \infty$, il che, in base alla definizione di convergenza in $\mathscr{D}$, implica che $D^\beta \varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$. Ciò vuol dire che l'operatore D^β è continuo da $\mathscr{D}$ in $\mathscr{D}$ (si veda il § 1.10).

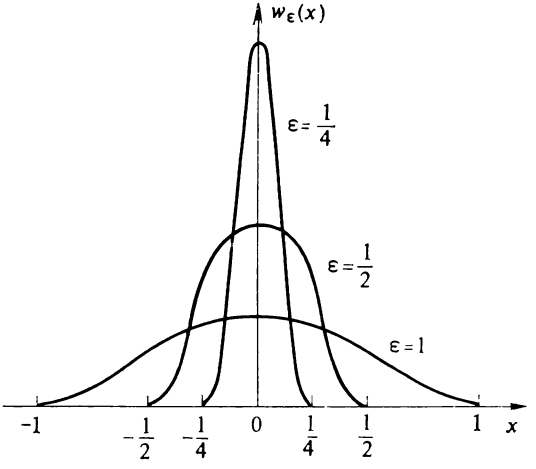


Fig. 15.

Analogamente, *le operazioni di sostituzione lineare non singolare di variabili* $\varphi(Ay + b)$ *e di moltiplicazione per una funzione* $a \in C^\infty(R^n)$, $a(x)\varphi(x)$, *sono continue da* $\mathscr{D}$ *in* $\mathscr{D}$.

Denotiamo con $\mathscr{D}(G)$ l'insieme delle funzioni fondamentali, i cui supporti sono contenuti in un dominio G dato; quindi,

$$\mathscr{D}(G) \subset \mathscr{D}(R^n) = \mathscr{D}.$$

Questa definizione pone la seguente questione: estistono o no funzioni fondamentali che non sono identicamente nulle? È chiaro che queste funzioni non possono essere analitiche in R^n (si veda il § 4.8). A titolo di esempio di una funzione fondamentale non nulla serve la « campana » (fig. 15)

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leqslant \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Scegliamo la costante C di modo che

$$\int \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1,$$

cioè

$$C_\varepsilon \varepsilon^n \int_{U_1} e^{-\frac{1}{1-|\xi|^2}}\,d\xi = 1.$$

È facile verificare che

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Il seguente lemma fornisce numerosi esempi di funzioni fondamentali.

Lemma 1. *Per una regione G qualsiasi e per un numero $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\eta \in C^\infty(R^n)$ tale che*

$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1; \quad \eta(x) = 1, \quad x \in G_\varepsilon; \quad \eta(x) = 0, \quad x \overline{\in} G_{3\varepsilon}.$$

(Il grafico della funzione $\eta(x)$ per $G = (a, b)$ è rappresentato nella fig. 16).

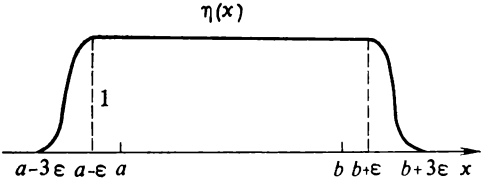


Fig. 16.

Dimostrazione. Sia $\chi(x)$ una funzione caratteristica dell'insieme $G_{2\varepsilon}$: $\chi(x) = 1$, $x \in G_{2\varepsilon}$; $\chi(x) = 0$, $x \overline{\in} G_{2\varepsilon}$. Allora la funzione

$$\eta(x) = \int \chi(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy$$

ha le proprietà richieste. Infatti, dato che $\omega_\varepsilon \in \mathscr{D}$, $0 \leqslant \omega_\varepsilon(x)$, $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon = \overline{U}_\varepsilon$, $\int \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1$, si ha (fig. 17)

$$\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,dy \in C^\infty(R^n);$$

$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant \int \omega_\varepsilon(x-y)\,dy = \int \omega_\varepsilon(\xi)\,d\xi = 1;$$

$$\eta(x) = \int_{U(x;\,\varepsilon)} \chi(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{U(x;\,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)\,dy = \int \omega_\varepsilon(\xi)\,d\xi = 1, & x \in G_\varepsilon; \\ 0, & x \overline{\in} G_{3\varepsilon}. \end{cases}$$

Il lemma è dimostrato.

Dal lemma 1 segue il seguente corollario: *se la regione G è limitata e $G' \Subset G$, esiste una funzione $\eta \in \mathscr{D}(G)$ tale che $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ e $\eta(x) \equiv 1$, $x \in G'$.*

Il seguente lemma afferma che la riserva di funzioni fondamentali è sufficientemente grande.

Lemma 2. *L'insieme $\mathscr{D}(G)$ è denso in $\mathscr{L}_2(G)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f \in \mathscr{L}_2(G)$ e che ε sia un numero positivo qualunque. In base alla proprietà di continuità assoluta dell'integrale di Lebesgue (si veda il § 1.4, e)) esiste una regione $G' \Subset G$ tale che

$$\int\limits_{G \setminus G'} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}. \tag{2}$$

Visto che l'insieme di polinomi è denso in $\mathscr{L}_2(G')$ (si veda il § 1.7), esiste un polinomio P tale che

$$\int\limits_{G'} |f(x) - P(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}. \tag{2'}$$

Scegliamo ora una sottoregione $G'' \Subset G'$ tanto vicina alla regione G' che

$$\int\limits_{G' \setminus G''} |P(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}. \tag{2''}$$

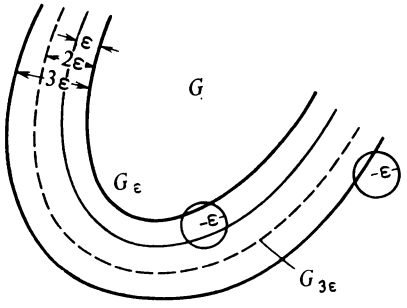


Fig 17.

Prendiamo una funzione η da $\mathscr{D}(G')$ tale che $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta(x) = 1$, $x \in G''$ (conformemente al corollario del lemma 1 queste funzioni esistono). Allora $P\eta \in \mathscr{D}(G)$ e, in virtù delle disuguaglianze (2), (2') e (2''), si ha

$$\|f - P\eta\|^2 = \int\limits_G |f - P\eta|^2 dx = \int\limits_{G'} |f - P\eta|^2 dx +$$

$$+ \int\limits_{G \setminus G'} |f|^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{5} + 2\int\limits_{G'} |f - P|^2 dx + 2\int\limits_{G'} |P - P\eta|^2 dx <$$

$$< \frac{3}{5}\varepsilon^2 + 2\int\limits_{G' \setminus G''} |P|^2 dx < \varepsilon^2,$$

come si voleva dimostrare.

3. Spazio delle funzioni generalizzate $\mathscr{D}'$. *Ogni funzionale continuo lineare sullo spazio di funzioni fondamentali $\mathscr{D}$ si chiama funzione generalizzata.* In conformità con le notazioni del § 1.10 scriviamo il valore del funzionale (funzione generalizzata) f sulla funzione fondamentale φ come (f, φ). Scriveremo anche formalmente la funzione generalizzata f nella forma $f(x)$, assumendo in funzione di x l'argo-

mento delle funzioni fondamentali sulle quali esercita un'azione il funzionale f.

Chiariamo la definizione di una funzione generalizzata.

1) Una funzione generalizzata f è *un funzionale* su $\mathscr{D}$, cioè ad ogni $\varphi \in \mathscr{D}$ è associato un numero (complesso) (f, φ).

2) Una funzione generalizzata f è un funzionale *lineare* su $\mathscr{D}$, cioè se $\varphi \in \mathscr{D}$, $\psi \in \mathscr{D}$ e λ, μ sono numeri complessi, si ha

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda (f, \varphi) + \mu (f, \psi).$$

3) Una funzione generalizzata f è un funzionale *continuo* su $\mathscr{D}$, cioè se $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$, si ha $(f, \varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$.

Denotiamo con $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(R^n)$ l'insieme di tutte le funzioni generalizzate.

L'insieme $\mathscr{D}'$ è lineare se la combinazione lineare $\lambda f + \mu g$ delle funzioni generalizzate f e g è definita come un funzionale soggetto alla formula

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda (f, \varphi) + \mu (g, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Verifichiamo se il funzionale $\lambda f + \mu g$ sia lineare e continuo su $\mathscr{D}$, cioè appartenga a $\mathscr{D}'$. Infatti, se $\varphi \in \mathscr{D}$, $\psi \in \mathscr{D}$ ed α, β sono numeri complessi qualsivogliano, si ha, per definizione,

$$(\lambda f + \mu g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \lambda (f, \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu (g, \alpha\varphi + \beta\psi) =$$
$$= \alpha [\lambda (f, \varphi) + \mu (g, \varphi)] + \beta [\lambda (f, \psi) + \mu (g, \psi)] =$$
$$= \alpha (\lambda f + \mu g, \varphi) + \beta (\lambda f + \mu g, \psi)$$

e, quindi, questo funzionale è lineare. La sua continuità segue dalla continuità dei funzionali f e g: se $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$, si ha

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda (f, \varphi_k) + \mu (g, \varphi_k) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Definiamo la convergenza in $\mathscr{D}'$ come *una convergenza debole* di una successione di funzionali (si veda il § 1.10): la successione di funzioni generalizzate $f_1, f_2, \ldots$ appartenenti a $\mathscr{D}'$ converge ad una funzione generalizzata $f \in \mathscr{D}'$ se, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$, si ha $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$, $k \to \infty$. In questo caso scriveremo $f_k \to f$, $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$. L'insieme lineare $\mathscr{D}'$, con la convergenza introdotta, è detto *spazio delle funzioni generalizzate* $\mathscr{D}'$.

Osservazione. I funzionali lineari su $\mathscr{D}$ non debbono essere necessariamente continui su $\mathscr{D}$. Ma non è stato costruito neanche un funzionale discontinuo lineare in forma esplicita su $\mathscr{D}$; si può solo teoricamente dimostrare l'esistenza di questi funzionali, utilizzando l'assioma di scelta.

4. Completezza dello spazio delle funzioni generalizzate $\mathscr{D}'$. Molto importante è la proprietà della completezza dello spazio $\mathscr{D}'$.

Teorema. *Sia una successione $f_1, f_2, \ldots$ di $\mathscr{D}'$ tale che, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$, la successione numerica (f_k, φ) converga per $k \to \infty$. Allora il*

funzionale f su $\mathscr{D}$, definito mediante l'uguaglianza

$$(f, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f_k, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}$$

è anch'esso lineare e continuo su $\mathscr{D}$, cioè $f \in \mathscr{D}'$.

Dimostrazione [1]. La linearità del funzionale limite è dimostrata molto semplicemente:

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \lim_{k\to\infty} (f_k, \alpha\varphi + \beta\psi) =$$

$$= \alpha \lim_{k\to\infty} (f_k, \varphi) + \beta \lim_{k\to\infty} (f_k, \psi) = \alpha (f, \varphi) +$$

$$+ \beta (f, \psi), \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D}$$

Dimostriamo la sua continuità. Sia $\varphi_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$ in $\mathscr{D}$; dobbiamo dimostrare che $(f, \varphi_\nu) \to 0$ per $\nu \to \infty$ (si veda il § 5.3). Assumendo il contrario e passando, se è necessario, ad una sottosuccessione, si può supporre che per tutti i $\nu = 1, 2, \ldots$ sia verificata la disuguaglianza $|(f, \varphi_\nu)| \geqslant 2a$ per un certo numero a positivo. Visto che

$$(f, \varphi_\nu) = \lim_{k\to\infty} (f_k, \varphi_\nu),$$

ne segue che, per ogni $\nu = 1, 2, \ldots$, esiste un numero k_ν tale che $|(f_{k_\nu}, \varphi_\nu)| \geqslant a$. Ma questo è impossibile, in virtù del lemma che segue. Questa è la contraddizione che dimostra la continuità del funzionale f. Il teorema è dimostrato.

Lemma. *Supponiamo che una successione di funzionali $f_1, f_2, \ldots$ di $\mathscr{D}'$ soddisfi le condizioni del teorema ed una successione di funzioni fondamentali $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ di $\mathscr{D}$ tenda a 0 in $\mathscr{D}$. Si ha allora $(f_k, \varphi_k) \to 0$ per $k \to \infty$.*

Dimostrazione. Supponiamo che il lemma non sia valido. Allora, passando, se è necessario, ad una sottosuccessione, possiamo ammettere che $|(f_k, \varphi_k)| \geqslant c > 0$. La convergenza di φ_k a 0 in $\mathscr{D}$ significa che: a) $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ per un R positivo; b) per ogni α si ha

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x}{\Rightarrow} 0, \quad k \to \infty.$$

Perciò, passando, se è necessario, di nuovo da una sottosuccessione, possiamo ammettere che

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{4^k}, \quad |\alpha| \leqslant k = 0, 1, \ldots.$$

Poniamo $\psi_k = 2^k \varphi_k$; si ha allora

$$|D^\alpha \psi_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad |\alpha| \leqslant k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

---

[1] Questa dimostrazione elementare è presa dal libro di Šilov [1], § 9.

$\psi_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$ e qualsiasi serie della forma $\sum_\nu \psi_{k_\nu}(x)$ converge in $\mathscr{D}$; allo stesso tempo

$$|(f_k, \psi_k)| = 2^k |(f_k, \varphi_k)| \geqslant 2^k c \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{4}$$

Costruiamo ora le sottosuccessioni $\{f_{k_\nu}\}$, e $\{\psi_{k_\nu}\}$, nel seguente modo. Scegliamo f_{k_1} e ψ_{k_1} tali che $|(f_{k_1}, \psi_{k_1})| \geqslant 2$. Ciò è possibile, in virtù della (4). Supponiamo che siano già state costruite f_{k_j} e ψ_{k_j}, $j = 1, \ldots, \nu - 1$; costruiamo ora f_{k_ν}, e ψ_{k_ν}. Dato che $\psi_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$, si ha $(f_{k_j}, \psi_k) \to 0$, $k \to \infty$, $j = 1, \ldots, \nu - 1$, e perciò esiste un numero N tale che, per tutti i $k \geqslant N$, si ha

$$|(f_{k_j}, \psi_k)| \leqslant \frac{1}{2^{\nu - j}}, \quad j = 1, \ldots, \nu - 1. \tag{5}$$

Poi, visto che

$$(f_k, \psi_{k_j}) \to (f, \psi_{k_j}), \quad k \to \infty, \quad j = 1, \ldots, \nu - 1,$$

si trova quindi un numero $N_1 \geqslant N$ tale che, per tutti i $k \geqslant N_1$, si ha

$$|(f_k, \psi_{k_j})| \leqslant |(f, \psi_{k_j})| + 1, \quad j = 1, \ldots, \nu - 1. \tag{6}$$

Infine, in virtù della (4), scegliamo un numero $k_\nu \geqslant N_1$ tale che

$$|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| \geqslant \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f, \psi_{k_j})| + 2\nu. \tag{7}$$

Dunque, in base alle (5)-(7), le f_{k_ν} e ψ_{k_ν} costruite sono tali che

$$|(f_{k_j}, \psi_{k_\nu})| \leqslant \frac{1}{2^{\nu - j}}, \quad j = 1, \ldots, \nu - 1, \tag{8}$$

$$|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| \geqslant \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| + \nu + 1. \tag{9}$$

Poniamo

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{k_\nu}(x).$$

In virtù della (3), questa serie converge in $\mathscr{D}$ e, per conseguenza, la sua somma $\psi \in \mathscr{D}$ e si ha

$$(f_{k_\nu}, \psi) = (f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{\infty} (f_{k_\nu}, \psi_{k_j}).$$

Da ciò, tenendo conto delle disuguaglianze (8) e (9), si ottiene

$$|(f_{k_\nu}, \psi)| \geqslant |(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| - \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| -$$

$$- \sum_{j=\nu+1}^{\infty} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| \geqslant \nu + 1 - \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = \nu,$$

cioè $(f_{k_\nu}, \psi) \to \infty$, $\nu \to \infty$. Ma ciò contraddice alla relazione $(f_k, \psi) \to (f, \psi)$, $k \to \infty$, il che dimostra il lemma.

5. Supporto di una funzione generalizzata. Generalmente, le funzioni generalizzate non hanno valori in punti separati. Tuttavia si può parlare dell'annullamento di una funzione generalizzata in una regione.

Una funzione generalizzata f *si annulla in una regione* G se $(f, \varphi) = 0$ per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(G)$; descriveremo ciò nei termini seguenti: $f = 0$, $x \in G$ o $f(x) = 0$, $x \in G$. Conformemente a questa definizione le funzioni generalizzate f e g sono dette *uguali in una regione* G se

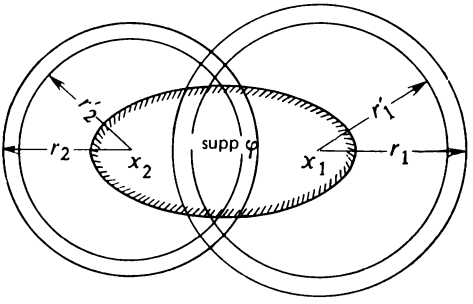


Fig. 18.

$f - g = 0$, $x \in G$; scriviamo in questo caso $f = g$, $x \in G$. In particolare, le funzioni generalizzate f e g sono dette *uguali*, $f = g$, se per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$, si ha $(f, \varphi) = (g, \varphi)$.

Supponiamo che una funzione generalizzata f si annulli nella regione G. Allora essa si annulla, evidentemente, anche negli intorni di ogni punto di questa regione. È pure valido l'inverso.

Lemma. *Se una funzione generalizzata* f *si annulla negli intorni di ogni punto di una regione* G, *essa si annulla anche in tutta la regione* G.

Dimostrazione. Utilizzando l'osservazione precedente, gli intorni possono essere considerati sfere. Dobbiamo dimostrare che $(f, \varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Fissiamo una funzione arbitraria appartenente a $\mathscr{D}(G)$. Il compatto supp φ è contenuto nella regione G. Per questa ragione, secondo il lemma di Heine-Borel (si veda il § 1.1), supp φ può essere coperto con un numero finito di sfere $U(x_k; r_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N(\varphi)$ nelle quali f si annulla. Prendiamo sfere più piccole $U(x_k, r'_k)$, $r'_k < r_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, che coprono ancora supp φ (fig. 18). Per il corollario del lemma 1 del § 5.2 esistono funzioni fondamentali $h_k(x)$ tali che

$$h_k(x) = 1, \quad x \in U(x_k; r'_k), \quad \text{supp } h_k \subset U(x_k; r_k).$$

Introduciamo la notazione

$$h(x) = \sum_{k=1}^{N} h_k(x), \quad \varphi_k(x) = \varphi(x) \frac{h_k(x)}{h(x)}.$$

Per costruzione, $h(x) \geqslant 1$ nell'intorno di supp φ. Per questa ragione

$$\varphi_k \in \mathcal{D}(U(x_k; r_k)) \quad \text{e} \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x).$$

Di qui

$$(f, \varphi) = \left(f, \sum_{k=1}^{N} \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k) = 0.$$

Il lemma è dimostrato.

Sia $f \in \mathcal{D}'$. L'unione di tutti gli intorni in cui $f = 0$ forma un insieme aperto $\mathcal{O}_f$ che è detto *insieme zero* della funzione generalizzata f. Secondo il lemma, in ogni regione appartenente a $\mathcal{O}_f$ $f = 0$; inoltre, $\mathcal{O}_f$ è più grande insieme aperto in cui f si annulla.

Il *supporto* di una funzione generalizzata è il complemento di $\mathcal{O}_f$ rispetto a R^n; denotiamo il supporto di f con il simbolo supp f di modo che supp $f = R^n \setminus \mathcal{O}_f$; supp f è un insieme chiuso. Se supp f è un insieme limitato, la funzione generalizzata f è detta *finita*.

Da queste definizioni deduciamo quanto segue: a) in qualsiasi regione non appartenente a supp f la funzione generalizzata f si annulla, cioè si ha

$$(f, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \varnothing; \tag{10}$$

b) supp f consiste dei punti e solo dei punti nei cui intorni f non si annulla.

Osservazione. Il lemma dimostrato in questa sezione ammette la seguente generalizzazione. Sia $f \in \mathcal{D}'$ e sia G una regione appartenente a R^n. Allora f genera un funzionale lineare f_G su $\mathcal{D}(G)$ soggetto alla formula

$$(f_G, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Il funzionale f_G è continuo su $\mathcal{D}(G)$ nel senso che: se $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathcal{D}$ e supp $\varphi_k \subset G' \Subset G$, allora $(f_G, \varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$. Il funzionale f_G è detto *elemento locale* della funzione generalizzata f su G (la restrizione di f su G).

Dunque, ogni funzione generalizzata genera in ogni regione il suo elemento locale. È anche valido l'inverso: da qualsiasi raccolta di elementi locali coordinati si può «raccordare» una singola funzione generalizzata. Più precisamente, è valido il seguente teorema del « raccordo a tratti ». *Supponiamo che una famiglia di regioni $\{G_\alpha\}$ copra R^n e che, per ogni α, sia assegnato un funzionale continuo lineare f_α su $\mathcal{D}(G_\alpha)$, ed inoltre se $G_\alpha \cap G_{\alpha'} \neq \varnothing$, si abbia $f_\alpha = f_{\alpha'}$, $x \in G_\alpha \cap G_{\alpha'}$. Allora, esiste un'unica funzione generalizzata $f \in \mathcal{D}'$ in cui f_α sono i suoi elementi locali su G_α per tutti gli α.*

6. Funzioni generalizzate regolari. Il più semplice esempio di una funzione generalizzata è il funzionale generato da una funzione $f(x)$ localmente integrabile in R^n:

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{11}$$

Dalla proprietà di linearità di un integrale segue la linearità di questo funzionale

$$(f,\ \lambda\varphi+\mu\psi)=\int f(x)\,[\lambda\varphi(x)+\mu\psi(x)]\,dx=$$

$$=\lambda\int f(x)\,\varphi(x)\,dx+\mu\int f(x)\,\psi(x)\,dx=\lambda(f,\ \varphi)+\mu(f,\ \psi),$$

mentre dal teorema del passaggio al limite sotto il segno d'integrale segue la continuità del funzionale su $\mathscr{D}$:

$$(f,\ \varphi_k)=\int\limits_{U_R} f(x)\,\varphi_k(x)\,dx\to 0,\qquad k\to\infty$$

se $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ in $\mathscr{D}$. Dunque, il funzionale (11) definisce una funzione generalizzata appartenente a $\mathscr{D}'$.

Le funzioni generalizzate, definite da funzioni localmente integrabili in R^n secondo la formula (11), sono dette *funzioni generalizzate regolari*. Le altre funzioni generalizzate sono dette *funzioni generalizzate singolari*.

Lemma (di Du Bois Reymond). *Affinché una funzione $f(x)$ localmente integrabile in G si annulli in G nel senso delle funzioni generalizzate è necessario e sufficiente che $f(x)=0$ quasi ovunque in G.*

Dimostrazione. La sufficienza della condizione è evidente. Dimostriamo la sua necessità. Sia a un punto arbitrario della regione G. Esiste una sfera chiusa $\bar{U}(a;\ \varepsilon)$ che appartiene interamente a G e nella quale, per conseguenza, $f=0$ nel senso del § 5.5. Visto che per ogni $k=(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ la funzione

$$\psi_k(x)=e^{\frac{i}{\varepsilon}(k,\ x)}\omega_\varepsilon(x-a),$$

dove ω_ε è la « campana » (si veda il § 5.2), appartiene a $\mathscr{D}(G)$, si ha

$$(f,\ \psi_k)=\int f(x)\,\omega_\varepsilon(x-a)\,e^{\frac{i}{\varepsilon}(k,\ x)}\,dx=0.$$

Dunque, tutti i coefficienti di Fourier nel sistema trigonometrico $\{\exp(i/\varepsilon)(k,\ x)\}$ della funzione $f(x)\,\omega_\varepsilon(x-a)$, integrabile sulla sfera $U(a;\ \varepsilon)$, sono nulli. Ne segue [1] che questa funzione è quasi ovunque nulla e, per conseguenza, $f(x)=0$ quasi ovunque in questa sfera. Visto che a è un punto qualunque di G, $f(x)=0$ q.o. in G. Il lemma è dimostrato.

Ogni funzione localmente integrabile in R^n definisce, mediante la formula (11), una funzione generalizzata regolare. Dal lemma di Du Bois Reymond segue che ogni funzione generalizzata regolare è definita da un'unica [2] funzione localmente integrabile in R^n. Di conse-

[1] Si veda, per esempio, Fichtengolts [1], vol. III, cap. XX, e Kolmogorov e Fomin [1], cap. VIII.

[2] A meno dei valori su un insieme di misura zero.

guenza, tra le funzioni localmente integrabili in R^n e le funzioni generalizzate regolari esiste una corrispondenza biunivoca. Per questa ragione identifichiamo una funzione localmente integrabile $f(x)$ con una funzione generalizzata, generata dalla prima funzione secondo la formula (11): il funzionale (f, φ). In questo senso le funzioni « *ordinarie* », cioè localmente integrabili in R^n, sono funzioni generalizzate (regolari).

Dal lemma di Du Bois Reymond segue anche che entrambe le definizioni del supporto di una funzione continua date nei §§ 1.2 e 5.5, coincidono.

Osserviamo infine che se la successione di funzioni $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, localmente integrabili in R^n, converge uniformemente alla funzione $f(x)$ su ogni compatto, essa converge a $f(x)$ anche in $\mathscr{D}'(R^n)$.

Infatti, per $\varphi \in \mathscr{D}$ qualunque abbiamo

$$(f_k, \varphi) = \int f_k(x)\,\varphi(x)\,dx \to \int f(x)\,\varphi(x)\,dx = (f, \varphi), \qquad k \to \infty.$$

Diremo che una funzione generalizzata f *appartiene alla classe* $C^p(G)$, $f \in C^p(G)$, se, nel dominio G, essa coincide con una funzione $f_G(x)$ appartenente alla classe $C^p(G)$, cioè per $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ qualunque si ha

$$(f, \varphi) = \int f_G(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Se, inoltre, $f_G \in C^p(\bar{G})$, diremo che f appartiene alla classe $C^p(\bar{G})$.

7. Funzioni generalizzate singolari. In conformità con la definizione data nella sezione precedente, è impossibile identificare una funzione generalizzata singolare con qualsiasi funzione localmente integrabile. Il più semplice esempio di funzione generalizzata singolare è la funzione delta di Dirac (si veda il § 5.1)

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

È evidente che $\delta \in \mathscr{D}'$, $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$, di modo che $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

Dimostriamo che $\delta(x)$ è *una funzione generalizzata singolare*. Supponiamo che, al contrario, esista una funzione $f(x)$ localmente integrabile in R^n tale che per una funzione $\varphi \in \mathscr{D}$ qualunque si abbia

$$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0). \tag{12}$$

Visto che $x_1\varphi(x) \in \mathscr{D}$, se $\varphi \in \mathscr{D}$, dalla (12) segue che

$$\int f(x)\,x_1\varphi(x)\,dx = x_1\varphi(x)\,|_{x=0} = 0 = (x_1 f, \varphi)$$

per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$; qui x_1 è la prima coordinata di x. Dunque, la funzione $x_1 f(x)$ localmente integrabile in R^n è nulla nel senso delle funzioni generalizzate. Secondo il lemma di Du Bois Reymond $x_1 f(x) = 0$ quasi ovunque e, quindi, $f(x) = 0$ q.o. Ma ciò contrad-

dice l'uguaglianza (12) il che vuol dire che la funzione delta è singolare.

Sia $\omega_\varepsilon(x)$ la « campana » (si veda il § 5.2). Dimostriamo che

$$\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x), \quad \varepsilon \to +0 \text{ in } \mathscr{D}'. \tag{13}$$

Infatti, per definizione di convergenza in $\mathscr{D}'$ la relazione (13) è equivalente all'uguaglianza

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int \omega_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0), \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Data la continuità della funzione $\varphi(x)$, per un η positivo qualsiasi esiste un ε_0 positivo tale che $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$, se $|x| < \varepsilon_0$. Di qui, utilizzando le proprietà della « campana » $\omega_\varepsilon(x)$, si ottiene per tutti gli $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\left| \int \omega_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int \omega_\varepsilon(x)\, |\varphi(x) -$$

$$- \varphi(0)|\, dx < \eta \int \omega_\varepsilon(x)\, dx = \eta,$$

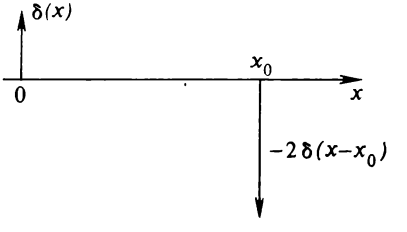


Fig. 19.

come si voleva dimostrare.

In base alla successione convergente $\omega_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to +0$ (fig. 15), la funzione generalizzata $\delta(x)$ è rappresentabile graficamente, come è mostrato nella fig. 19.

Un semplice strato su una superficie è una generalizzazione della funzione delta. Siano S una superficie regolare a tratti e $\mu(x)$ una funzione continua assegnata su S. Introduciamo una funzione generalizzata $\mu\delta_S$ soggetta alla regola

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\, \varphi(x)\, dS, \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Evidentemente, $\mu\delta_S \in \mathscr{D}'$ e $\mu\delta_S(x) = 0$ se $x \notin S$, di modo che $\operatorname{supp} \mu\delta_S \subset S$. La funzione generalizzata $\mu\delta_S$ è detta *strato semplice* sulla superficie S con densità μ.

Osservazione. Le funzioni localmente integrabili e le funzioni delta descrivono le distribuzioni (densità) di masse, di cariche, di forze ecc. (si veda il § 5.1). Per questa ragione le funzioni generalizzate sono anche dette *distribuzioni* (si veda Schwartz [1, 2]). Se, per esempio, una funzione generalizzata f è una densità di massa o di carica, l'espressione $(f, 1)$ è la massa o la carica totale rispettivamente (se f ha il senso su una funzione identicamente uguale a 1; questa funzione non appartiene a $\mathscr{D}$!); in particolare, $(\delta, 1) = 1$, $(f, 1) = \int f(x)\, dx$, se f è una funzione (assolutamente) integrabile su R^n.

8. Formule di Sochotskij. Introduciamo il funzionale lineare $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ soggetto alla formula

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\ \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\quad \varphi\in\mathcal{D}(R^1).$$

Dimostriamo la continuità di questo funzionale su $\mathcal{D}$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$, $k\to\infty$ in $\mathcal{D}$, cioè $\varphi_k(x)=0$. $|x|>R$ e $D^\alpha\varphi_k(x)\rightrightarrows 0$, $k\to\infty$. Si ha allora

$$\left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\ \varphi_k\right)\right| = \left|\mathrm{Vp}\int\frac{\varphi_k(x)}{x}\,dx\right| = \left|\mathrm{Vp}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi_k(0)+x\varphi_k'(x')}{x}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-R}^{R}|\varphi_k'(x')|\,dx \leqslant 2R\max_{|x|\leqslant R}|\varphi_k'(x)| \to 0,\quad k\to\infty.$$

Dunque, $\mathcal{P}\frac{1}{x}\in\mathcal{D}'$.

La funzione generalizzata $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ coincide (nel senso del § 5.6) con la funzione $1/x$ per $x\neq 0$. Questa funzione è detta *parte finita o valore principale* (Vp) *dell'integrale della funzione* $1/x$.

Stabiliamo ora l'uguaglianza

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = -i\pi\varphi(0) + \mathrm{Vp}\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\qquad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{14}$$

Infatti, se $\varphi(x)=0$ per $|x|>R$, si ha

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx =$$

$$= -2i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{arctg}\frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx =$$

$$= -i\pi\varphi(0) + \mathrm{Vp}\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

La relazione (14) significa che esiste un limite della successione $1/(x+i\varepsilon)$, $\varepsilon\to+0$ in $\mathcal{D}'$, che denotiamo con $1/(x+i0)$, e questo limite è uguale a $-i\pi\delta(x)+\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Si ha dunque

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{15}$$

Analogamente.

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \qquad (15')$$

Le formule (15) e (15') sono dette *formule di Sochotskij* ([1], 1873). Queste formule sono largamente utilizzate nella fisica quantistica.

9. Sostituzione lineare delle variabili nelle funzioni generalizzate. Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione localmente integrabile in R^n e che $x = Ay + b$, $\det A \neq 0$ sia una trasformazione lineare non singolare di spazio R^n su se stesso. Allora per qualunque $\varphi \in \mathcal{D}$ si ottiene

$$(f(Ay+b),\ \varphi) = \int f(Ay+b)\,\varphi(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{|\det A|}\int f(x)\,\varphi[A^{-1}(x-b)]\,dx = \frac{1}{|\det A|}(f,\ \varphi[A^{-1}(x-b)]).$$

Prendiamo quest'uguaglianza come definizione della funzione generalizzata $f(Ay+b)$, per $f(x) \in \mathcal{D}'$ qualunque:

$$(f(Ay+b),\ \varphi) = \left(f,\ \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right), \qquad \varphi \in \mathcal{D}. \qquad (16)$$

Visto che l'operazione $\varphi(x) \to \varphi[A^{-1}(x-b)]$ è lineare e continua da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}$ (si veda il §5.2), il funzionale $f(Ay+b)$ definito dal secondo membro dell'uguaglianza (16), appartiene a $\mathcal{D}'$.

In particolare, se A è una rotazione, cioè $A' = A^{-1}$ e $b = 0$, si ha

$$(f(Ay),\ \varphi) = (f,\ \varphi(A'x));$$

se A è una trasformazione di similitudine (con riflessione per $c < 0$), $A = cI$, $c \neq 0$, e $b = 0$, si ha

$$(f(cy),\ \varphi) = \frac{1}{|c^n|}\left(f,\ \varphi\left(\frac{x}{c}\right)\right);$$

se, invece, $A = I$, si ha

$$(f(y+b),\ \varphi) = (f,\ \varphi(x-b)).$$

La funzione generalizzata $f(x+b)$ è detta *spostamento* della funzione generalizzata $f(x)$ per il vettore b. Per esempio, $\delta(x-x_0)$ è lo spostamento di $\delta(x)$ per il vettore $-x_0$ e agisce secondo la formula

$$(\delta(x-x_0),\ \varphi) = (\delta,\ \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0).$$

Quanto esposto sopra permette di definire funzioni generalizzate a simmetria sferica, a simmetria centrale, omogenee, periodiche, invarianti di Lorentz ed altre.

Per esempio, una funzione generalizzata f è detta *invariante rispetto al gruppo di Lorentz* (invariante di Lorentz) se $f(Ax) = f(x)$ per tutte le trasformazioni A appartenenti al gruppo di Lorentz

(cioè per tutte le trasformazioni lineari A in R^n che conservano la forma quadratica $x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$).

Direttamente dalla definizione (16) segue che *l'operazione di sostituzione lineare di variabili è lineare e continua da* $\mathscr{D}'$ a $\mathscr{D}'$:

$$(\lambda f + \mu g)(Ay + b) = \lambda f(Ay + b) + \mu g(Ay + b), \quad f, g \in \mathscr{D}';$$

$$f_k(Ay + b) \to 0, \ k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}', \text{ se } f_k \to 0, \ k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}'.$$

10. Moltiplicazione delle funzioni generalizzate. Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione localmente integrabile in R^n e che $a(x)$ appartenga a $C^\infty(R^n)$. Allora per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$ è valida l'uguaglianza

$$(af, \varphi) = \int a(x) f(x) \varphi(x) \, dx = (f, a\varphi).$$

Prendiamo quest'uguaglianza come definizione del prodotto af della funzione generalizzata $f \in \mathscr{D}'$ per la funzione a infinitamente derivabile:

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{17}$$

Siccome l'operazione di moltiplicazione per una funzione a appartenente a $C^\infty(R^n)$ è lineare e continua da $\mathscr{D}$ a $\mathscr{D}$ (si veda il § 5.2), ne segue che il funzionale af definito dal secondo membro dell'uguaglianza (17) appartiene a $\mathscr{D}'$.

Dalla definizione (17) deriva che *l'operazione di moltiplicazione per una funzione* $a \in C^\infty(R^n)$ *è lineare e continua da* $\mathscr{D}'$ *a* $\mathscr{D}'$:

$$a(\lambda f + \mu g) = \lambda(af) + \mu(ag), \ f, g \in \mathscr{D}';$$

$$af_k \to 0, \ k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}', \text{ se } f_k \to 0, \ k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}'.$$

Se $f \in \mathscr{D}'$, *è valida l'uguaglianza*

$$f = \eta f, \tag{18}$$

dove η *è una funzione qualsiasi appartenente alla classe* $C^\infty(R^n)$, *uguale a* 1 *nell'intorno di* supp f.

Infatti per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$ supp f e supp $(1 - \eta)\varphi$ non hanno punti in comune e quindi, in virtù della (10), si ha

$$(f - \eta f, \varphi) = (f, (1 - \eta)\varphi) = 0.$$

Esempi.

a) $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$, poiché per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$

$$(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = (a(0)\delta, \varphi).$$

b) $x\mathscr{P}\frac{1}{x} = 1$,

poiché per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ si ha

$$\left(x\mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \left(\mathscr{P}\frac{1}{x}, x\varphi\right) = \mathrm{Vp}\int \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int \varphi(x) = (1, \varphi).$$

Ma possiamo definire il prodotto di funzioni generalizzate qualsivogliano di modo che questo prodotto sia di nuovo una funzione

generalizzata? Il prodotto delle funzioni localmente integrabili non dev'essere tale (per esempio, $(|x|^{-1/2})^2 = |x|^{-1}$ in R^1). Lo stesso è valido anche per le funzioni generalizzate: L. Schwartz dimostrò che era impossibile definire un prodotto che fosse associativo e commutativo. Infatti, se questo prodotto esistesse, allora, utilizzando gli esempi a) e b), avremmo la seguente catena di uguaglianze contraddittorie:

$$0 = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)\,x)\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x).$$

Per determinare univocamente il prodotto di funzioni generalizzate f e g, è sufficiente in prima approssimazione che queste funzioni posseggano le seguenti proprietà: se f non è « regolare » in un intorno di un punto (arbitrario), allora g dev'essere « regolare » in questo intorno, e viceversa. Per esempio, è naturale che $\delta(x-a)\,\delta(x-b) = 0$ se $a \neq b$; $a(x)\,\delta(x) = a(0)\,\delta(x)$ se la funzione $a(x)$ è continua in un intorno del punto 0.

11. Esercizi. a) Dimostrare che le funzioni

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\,e^{-x^2/4\varepsilon},\quad \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon},\quad \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},\quad \frac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon}$$

tendono a $\delta(x)$ per $\varepsilon \to +0$.

b) Dimostrare le seguenti relazioni limite per $t \to +\infty$:

$$\frac{e^{ixt}}{x-i0} \to 2\pi i\delta(x),\quad \frac{e^{-ixt}}{x-i0} \to 0,$$

$$\frac{e^{ixt}}{x+i0} \to 0,\quad \frac{e^{-ixt}}{x+i0} \to -2\pi i\delta(x),\quad t^m e^{ixt} \to 0,\ m \geqslant 0,$$

$$t\theta(t)\,e^{ixt} \to i\delta(x).$$

c) Dimostrare che la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k)$$

converge in $\mathcal{D}'$ per a_k qualunque.

d) Dimostrare che $\delta_{S_R}(x) \to 0$, $R \to \infty$ in $\mathcal{D}'$.

e) Dimostrare che $\mathcal{P}\dfrac{\cos kx}{x} \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathcal{D}'(R^1)$, dove

$$\left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x},\ \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\,\varphi(x)\,dx.$$

f) Siano $\alpha \in \mathcal{D}(R^n)$, $\alpha \geqslant 0$, $\int \alpha(x)\,dx = 1$. Dimostrare che

$$\varepsilon^{-n}\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta(x),\quad \varepsilon \to +0 \text{ in } \mathcal{D}'.$$

g) Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$(af)(x+h) = a(x+h)\,f(x+h),\ a \in C^\infty(R^n),$$
$$f \in \mathcal{D}',\quad h \in R^n.$$

h) Siano f una funzione generalizzata finita in R^1 e η una funzione qualsiasi, appartenente a $\mathscr{D}(R^1)$, uguale a 1 in un intorno di supp f. Poniamo

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(f(x'), \frac{\eta(x')}{x'-z}\right), \qquad z = x + iy.$$

Dimostrare che 1) $\hat{f}(z)$ non dipende dalla scelta della funzione ausiliare η; 2) $\hat{f}(z)$ è una funzione analitica per $z \overline{\in}$ supp f; 3) $\hat{f}(z) = O(1/|z|)$ per $z \to \infty$; 4) $\hat{f}(x + i\varepsilon) - \hat{f}(x - i\varepsilon) \to f(x)$ per $\varepsilon \to +0$ in $\mathscr{D}'(R^1)$; 5) $\widehat{f^{(k)}}(z) = \hat{f}^{(k)}(z)$, $k = 1, 2, \ldots$

La funzione $\hat{f}(z)$ è detta *rappresentazione di Cauchy* della funzione generalizzata f[1].

§ 6. *Derivazione delle funzioni generalizzate*

Le funzioni generalizzate possiedono alcune utili proprietà. Per esempio, con una generalizzazione adeguata del concetto di derivata, ogni funzione generalizzata è infinitamente derivabile e le serie di funzioni generalizzate convergenti si possono derivare termine a termine un numero infinito di volte.

1. Derivate della funzione generalizzata. Sia $f \in C^p(R^n)$. Allora, per tutti gli α, $|\alpha| \leqslant p$ e $\varphi \in \mathscr{D}$, è valida la formula d'integrazione per parti

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int D^\alpha f(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int f(x)\,D^\alpha\varphi(x)\,dx = \\ = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi).$$

Prendiamo quest'uguaglianza come definizione della *derivata* (generalizzata) della funzione generalizzata $f \in \mathscr{D}'$:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{1}$$

Verifichiamo che $D^\alpha f \in \mathscr{D}'$. Infatti, poiché $f \in \mathscr{D}'$, il funzionale $D^\alpha f$ definito dal secondo membro dell'uguaglianza (1) è lineare:

$$(D^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)) = \\ = (-1)^{|\alpha|}(f, \lambda D^\alpha\varphi + \mu D^\alpha\psi) = \lambda(-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi) + \mu(-1)^{|\alpha|} \times (f, D^\alpha\psi) = \lambda(D^\alpha f, \varphi) + \mu(D^\alpha f, \psi)$$

e continuo:

$$(D^\alpha f, \varphi_k) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi_k) \to 0, \quad k \to \infty;$$

poiché se $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$, ne segue che $D^\alpha\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$ (si veda il § 5.2).

In particolare, per $f = \delta$ l'uguaglianza (1) assume la forma

$$(D^\alpha\delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\varphi(0), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

[1] Si veda Bremermann [1], parte II.

Denotiamo la derivata classica (dove esiste) con $\{D^\alpha f(x)\}$. Dalla definizione di derivata generalizzata deriva che, se la funzione generalizzata $f \in C^p(G)$, si ha

$$D^\alpha f = \{D^\alpha f(x)\}, \quad x \in G, \ |\alpha| \leqslant p$$

(nel senso delle definizioni dei § 5.5 e 5.6).

2. Proprietà delle derivate generalizzate. Sono valide le seguenti proprietà dell'operazione di derivazione delle funzioni generalizzate.

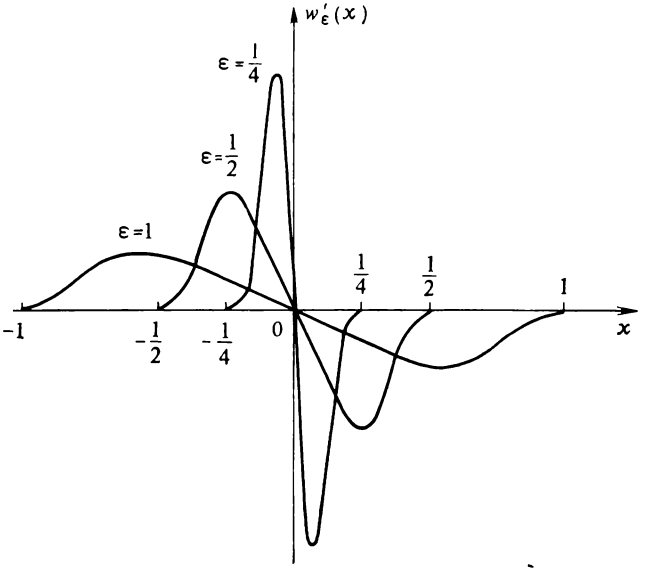


Fig. 20.

a) *L'operazione di derivazione* D^α *è lineare e continua da* $\mathscr{D}'$ *in* $\mathscr{D}'$:

$$D^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha f + \mu D^\alpha g, \quad f, g \in \mathscr{D}';$$

$$D^\alpha f_k \to 0, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}', \text{ se } f_k \to 0, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}'.$$

Dimostriamo la continuità. Per definizione di derivata, per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$, abbiamo

$$(D^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f_k, D^\alpha \varphi) \to 0, \quad k \to \infty,$$

il che significa che $D^\alpha f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$ (si veda il § 5.3). In modo analogo si dimostra anche la linearità.

In particolare, se $\omega_\varepsilon(x)$ è la « campana » (si veda il § 5.2), si ha

$$D^\alpha \omega_\varepsilon(x) \to D^\alpha \delta(x), \quad \varepsilon \to +0 \text{ in } \mathscr{D}'. \tag{2}$$

La relazione (2) segue dalla (13) del § 5.7.

Per esempio, $\omega'_\varepsilon(x) \to \delta'(x)$ se $\varepsilon \to +0$ in $\mathscr{D}'$. La successione $\omega'_\varepsilon(x)$ se $\varepsilon \to +0$ è rappresentata nella fig. 20. Per questa ragione

è conveniente rappresentare la funzione generalizzata $\delta'(x)$ graficamente come è mostrato nella fig. 21.

b) *Una funzione generalizzata qualsiasi è infinitamente derivabile.* Infatti, se $f \in \mathscr{D}'$, si ha $\partial f/\partial x_i \in \mathscr{D}'$; a sua volta, $\partial(\partial f/\partial x_i)/\partial x_j \in \mathscr{D}'$ e così via.

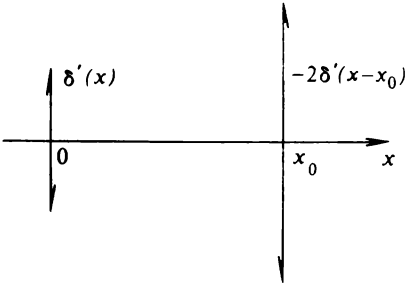


Fig. 21.

c) *Il risultato della derivazione non dipende dall'ordine di derivazione.* Per esempio,

$$D_1(D_2 f) = D_2(D_1 f) = D^{(1,1)} f, \quad f \in \mathscr{D}'. \tag{3}$$

Infatti, per qualunque $\varphi \in \mathscr{D}$, si ottiene

$$(D^{(1,1)} f, \varphi) = (f, D_1 D_2 \varphi) = (D_1(D_2 f), \varphi) = (D_2(D_1 f), \varphi),$$

da cui derivano le uguaglianze (3) (si veda il § 5.5).

Ed in generale

$$D^{\alpha+\beta} f = D^{\alpha}(D^{\beta} f) = D^{\beta}(D^{\alpha} f). \tag{4}$$

d) *Se $f \in \mathscr{D}'$ ed $a \in C^{\infty}(R^n)$, è valida la formula di Leibniz per la derivazione del prodotto af* (si veda il § 5.10).

Per esempio,

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1} f + a \frac{\partial f}{\partial x_1}. \tag{5}$$

Infatti, se φ è una qualsiasi funzione fondamentale, si ha

$$\left(\frac{\partial(af)}{\partial x_1}, \varphi\right) = -\left(af, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = -\left(f, a\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) =$$

$$= -\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1}\right) + \left(f, \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) = \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) =$$

$$= \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right),$$

da cui deriva l'uguaglianza (5) (si veda il § 5.5).

e) *Se la funzione generalizzata $f = 0$, $x \in G$, si ha anche $D^{\alpha} f = 0$ per $x \in G$, di modo che* supp $D^{\alpha} f \subset$ supp f.

Infatti, se $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, si ha $D^{\alpha}\varphi \in \mathscr{D}(G)$ e quindi

$$(D^{\alpha} f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^{\alpha}\varphi) = 0, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(G),$$

il che significa che $D^{\alpha} f = 0$, $x \in G$ (si veda il § 5.5).

f) *Se la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x),$$

composta di funzioni localmente integrabili $u_k(x)$, *converge uniformemente su ogni compatto, essa può essere derivata termine a termine un numero qualsiasi di volte e le serie risultanti convergeranno in* $\mathscr{D}'$.

Infatti, poiché per qualunque $R > 0$, si ha

$$S_p(x) = \sum_{k=1}^{p} u_k(x) \overset{|x|\leqslant R}{\Longrightarrow} S(x), \quad p \to \infty,$$

ne segue che $S_p \to S$ per $p \to \infty$ in $\mathscr{D}'$ (si veda il § 5.6). Ma allora, in virtù di a), si ha

$$D^\alpha S_p = \sum_{k=1}^{p} D^\alpha u_k \to D^\alpha S, \quad p \to \infty \text{ in } \mathscr{D}',$$

come si voleva dimostrare.

Da ciò deriva, in particolare, che se

$$| a_k | \leqslant A | k |^m + B, \tag{6}$$

la serie trigonometrica

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \tag{7}$$

converge in $\mathscr{D}'$ (R^1).

Infatti, in base alla (6), la serie

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

converge uniformemente in R^1; per conseguenza, la serie che rappresenta la sua derivata di ordine $m + 2$ converge in $\mathscr{D}'$ (R^1) e coincide con la (7).

3. Primitiva di una funzione generalizzata. In questa sezione poniamo $n = 1$. Ogni funzione continua $f(x)$ ha una primitiva $f^{(-1)}(x)$ (unica a meno di una costante additiva),

$$f^{(-1)}(x) = \int_{}^{x} f(\xi)\, d\xi + C, \qquad f^{(-1)\prime}(x) = f(x).$$

Prendiamo l'uguaglianza $f^{(-1)\prime} = f$ come punto di partenza per definire la primitiva di una funzione generalizzata arbitraria f.

La funzione generalizzata $f^{(-1)}$ appartenente a $\mathscr{D}'(R^1)$ è detta *primitiva* della funzione generalizzata f appartenente a $\mathscr{D}'(R^1)$, se $f^{(-1)\prime} = f$, cioè

$$(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{8}$$

L'uguaglianza (8) mostra che il funzionale $f^{(-1)}$ non è assegnato su tutte le funzioni fondamentali, ma solo sulle loro derivate prime. Il nostro compito è di prolungare questo funzionale su tutto lo

spazio $\mathscr{D}$ (nel senso della definizione del § 1.10) ed in un modo tale che il funzionale prolungato $f^{(-1)}$ sia lineare e continuo su $\mathscr{D}$, e di determinare il grado di arbitrarietà in questo prolungamento.

Supponiamo che $f^{(-1)}$, la primitiva di f, esista. Sia φ una funzione arbitraria appartenente a $\mathscr{D}(R^1)$. Rappresentiamola nella forma

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x) \int \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

dove ω_ε è la « campana » (si veda il § 5.2) ed inoltre

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi(x') - \omega_\varepsilon(x') \int \varphi(\xi)\, d\xi\right] dx'. \tag{10}$$

Dimostriamo che $\psi \in \mathscr{D}$. Infatti, $\psi \in C^\infty(R^1)$ e $\psi(x) = 0$, $x < -\max(R, \varepsilon)$ se $\varphi(x) = 0$, $|x| > R$. Inoltre, per $x > \max(R, \varepsilon)$ si ha

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\, dx' - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x')\, dx' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, d\xi = 0$$

in virtù della normalizzazione (3) del § 5.2. Quindi, $\psi(x) = 0$, $|x| > \max(R, \varepsilon)$. Per conseguenza, $\psi \in \mathscr{D}$.

Applicando il funzionale $f^{(-1)}$ all'uguaglianza (9), si ottiene

$$(f^{(-1)}, \varphi) = (f^{(-1)}, \psi') + (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon) \int \varphi(\xi)\, d\xi,$$

cioè, tenendo conto della (8), si ha

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + C \int \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad \varphi \in \mathscr{D} \tag{11}$$

dove abbiamo denotato $C = (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon)$. Dunque, se esiste $f^{(-1)}$, la primitiva di f, essa è espressa mediante l'uguaglianza (11), dove ψ è definita dalla formula (10).

Dimostriamo ora l'inverso: data una costante *arbitraria* C il funzionale $f^{(-1)}$, definito dalle uguaglianze (11) e (10), fornisce la primitiva f.

Infatti, il funzionale $f^{(-1)}$ è, evidentemente, lineare. Dimostriamo la sua continuità su $\mathscr{D}$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$, cioè $\varphi_k(x) = 0$ se $|x| > R$ e $\varphi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows 0$ per $k \to \infty$. Ma allora, in base a quanto è stato dimostrato sopra, si ha

$$\psi_k(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi_k(x') - \omega_\varepsilon(x') \int \varphi_k(\xi)\, d\xi\right] dx' = 0, \quad |x| > \max(R, \varepsilon),$$

e, evidentemente, $\psi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows 0$ per $k \to \infty$, cioè $\psi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$. Perciò, in virtù della continuità di f su $\mathscr{D}$, abbiamo

$$(f^{(-1)}, \varphi_k) = -(f, \psi_k) + C \int \varphi_k(\xi)\, d\xi \to 0, \quad k \to \infty$$

come si voleva dimostrare. Di conseguenza, $f^{(-1)} \in \mathscr{D}'$; non resta che verificare che $f^{(-1)}$ è la primitiva di f. Infatti, sostituendo nella (10) φ con φ' e tenendo conto del fatto che $\int \varphi'(\xi)\, d\xi = 0$, si ottiene $\psi = \varphi$ ed allora, dalla (11), segue l'uguaglianza (8), come volevasi dimostrare. Abbiamo dunque dimostrato il seguente

Teorema. *Ogni funzione generalizzata f ha un'unica primitiva, a meno di una costante additiva, e la sua primitiva $f^{(-1)}$ è espressa mediante la formula*

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + (C, \varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{12}$$

dove ψ è definita dall'uguaglianza (10) *e C è una costante arbitraria.*

Il teorema dimostrato afferma che una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = f, \quad f \in \mathscr{D}'(R^1), \tag{13}$$

esiste in $\mathscr{D}'(R^1)$ e la sua soluzione generale ha la forma $u = f^{(-1)} + C$ dove $f^{(-1)}$ è una primitiva di f e C è una costante arbitraria. In particolare, se f è una funzione continua, ogni soluzione dell'equazione (13) in $\mathscr{D}'$ è classica. Per esempio, la soluzione generale delle equazioni $u' = 0$ in $\mathscr{D}'$ è una costante arbitraria.

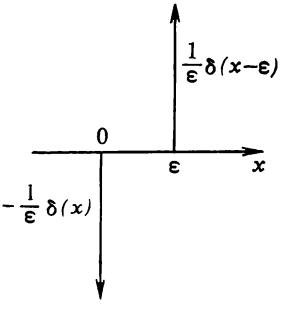


Fig. 22.

In modo analogo è anche definita la primitiva $f^{(-n)}$ di *ordine n della funzione generalizzata* f, cioè $f^{(-n)(n)} = f$. Applicando il teorema dimostrato alla catena ricorrente per $f^{(-k)}$, primitive di ordine k, cioè

$$f^{(-1)\prime} = f, \; f^{(-2)\prime} = f^{(-1)}, \; \ldots, \; f^{(-n)\prime} = f^{(-n+1)},$$

concludiamo che $f^{(-n)}$ *esiste ed è unica a meno di un polinomio additivo arbitrario di grado* $n - 1$.

4. Esempi, $n = 1$.

a) Calcoliamo la densità di cariche corrispondenti ad un dipolo di momento elettrico $+1$ nel punto $x = 0$ su una retta.

A questo dipolo corrisponde approssimativamente la densità di carica $\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x)$, $\varepsilon > 0$ (fig. 22). Passando qui al limite per $\varepsilon \to +0$ in $\mathscr{D}'$,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x), \varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] \to \varphi'(0) = (\delta, \varphi') = -(\delta', \varphi),$$

concludiamo che la densità desiderata è uguale a $-\delta'(x)$.

Verifichiamo che la carica totale del dipolo è nulla:

$$(-\delta',\ 1) = (\delta,\ 1') = (\delta,\ 0) = 0,$$

ed il momento di dipolo è uguale all'unità:

$$(-\delta',\ x) = (\delta,\ x') = (\delta,\ 1) = 1.$$

b) Sia la funzione $f(x)$ tale che $f \in C^1\ (x \leqslant x_0)$ e $f \in C^1\ (x \geqslant x_0)$

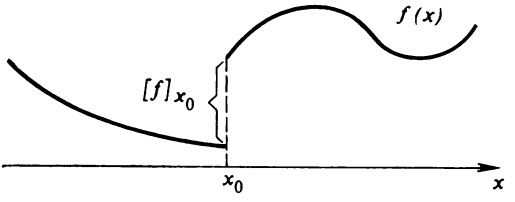


Fig. 23.

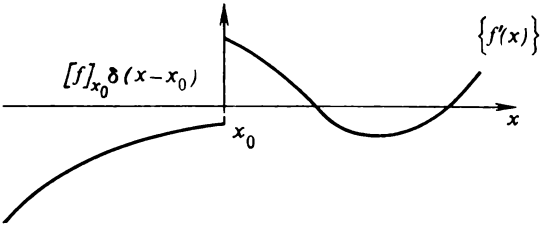


Fig. 24.

(fig. 23). Dimostriamo che (fig. 24)

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\,\delta(x - x_0), \tag{14}$$

dove $[f]_{x_0}$ è il salto di $f(x)$ al punto x_0:

$$[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Infatti, se $\varphi \in \mathscr{D}$, si ha

$$(f',\ \varphi) = -(f,\ \varphi') = -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\,\varphi(x_0) + \int \{f'(x)\}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= ([f]_{x_0}\,\delta(x - x_0) + \{f'(x)\},\ \varphi).$$

In particolare, se si ha a che fare con la funzione di Heaviside

$$\theta(x) = 1,\quad x > 0;\quad \theta(x) = 0,\quad x \leqslant 0,$$

si ha

$$\theta'(x) = \delta(x). \tag{15}$$

Nella teoria dei circuiti elettrici la funzione di Heaviside è detta funzione a « gradino unitario » e la funzione delta si dice « impulso

unitario ». La formula (15) afferma che l'« impulso unitario » è la derivata prima della funzione a « gradino unitario ».

Osservazione. La primitiva della funzione delta è $\theta(x) + C$ dove C è una costante arbitraria (si veda il § 6.3). Quindi, $\theta(x)$ è ristabilita come primitiva della sua derivata generalizzata $\delta(x)$; d'altro canto, $\theta(x)$ non è ristabilita come primitiva della sua derivata classica $\{\theta'(x)\} = 0$ per $x \neq 0$.

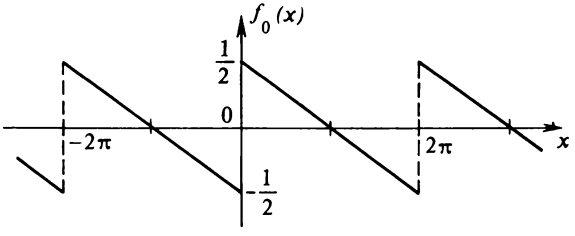


Fig. 25.

c) Se, invece, la funzione $f(x)$ ha discontinuità isolate di prima specie nei punti $\{x_k\}$ e $\{f'(x)\}$ è una funzione regolare a tratti su R^1, la formula (14) è, naturalmente, generalizzata:

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k). \tag{16}$$

È conveniente ottenere la (16) localmente, nell'intorno di ogni punto x_k. utilizzando la formula (14) ed il teorema del « raccordo dei tratti » (si veda l'osservazione del § 5.5).

In particolare, se

$$f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \qquad x \in [0, 2\pi),$$

è una funzione di periodo 2π (fig. 25), si ha

$$f_0' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{17}$$

Vediamo, quindi, che le derivate classiche e generalizzate generalmente non coincidono.

d) Dimostriamo la formula

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{18}$$

A questo scopo sviluppiamo la funzione di periodo 2π

$$\int_0^x f_0(x')\, dx' = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \qquad x \in [0, 2\pi)$$

(la funzione f_0 è definita nell'esempio c) del § 6.4) nella serie di Fourier uniformemente convergente:

$$\int_0^x f_0(x')\,dx' = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikx}.$$

In virtù della proprietà f) del § 6.2 questa serie può essere derivata termine a termine in $\mathscr{D}'$ un numero qualsiasi di volte. Derivandola due volte e tenendo conto della (17), si ottiene

$$f_0' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} e^{ikx},$$

quanto si voleva dimostrare.

Notiamo che il primo membro dell'uguaglianza (18) è la serie di Fourier della funzione generalizzata di periodo 2π $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$, il cui grafico è rappresentato nella fig. 26.

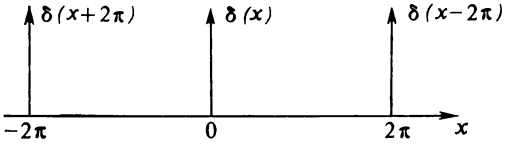


Fig. 26.

e) Dimostriamo che la soluzione generale dell'equazione

$$x^m u = 0 \tag{19}$$

in $\mathscr{D}'(R')$ è data dalla formula

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x), \tag{20}$$

dove c_k sono costanti arbitrarie.

Poiché per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$ e $k = 0, 1, \ldots, m-1$ si ha

$$(x^m\delta^{(k)}, \varphi) = (\delta^{(k)}, x^m\varphi) = (-1)^k (\delta, (x^m\varphi)^{(k)} = (-1)^k (x^m\varphi)^{(k)}|_{x=0} = 0,$$

ne segue che

$$x^m\delta^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

e, per conseguenza, la funzione generalizzata (20) soddisfa l'equazione (19).

Dimostriamo che la formula (20) fornisce la soluzione generale di quest'equazione in $\mathscr{D}'$. Sia $\eta(x)$ una funzione fondamentale che è uguale all'unità in un intorno del punto $x = 0$. (Secondo il lemma 1 del § 5.2 questa funzione esiste.) Allora una funzione φ appartenente

a $\mathscr{D}$ può essere rappresentata nella forma

$$\varphi(x) = \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^m \psi(x), \tag{21}$$

dove

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left[\varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right].$$

La funzione ψ appartiene a $\mathscr{D}$ poiché essa è finita ed infinitamente derivabile; la sua derivabilità infinita nel punto $x = 0$ segue dalla formula di Taylor

$$\psi(x) = \sum_{k=m}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m} + O(|x|^{N+1}),$$

che è valida in un certo intorno del punto 0 (dove $\eta = 1$) per tutti gli $N \geqslant m$.

Quindi, se $u \in \mathscr{D}'$ è soluzione dell'equazione (19), allora in virtù della (21), abbiamo

$$(u, \varphi) = \left(u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) + (u, x^m \psi(x)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (u, \eta(x) x^k) + (x^m u, \psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (\delta^{(k)}, \varphi),$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} (u, \eta x^k),$$

quanto si voleva dimostrare.

Osservazione. Il risultato ottenuto segue direttamente dall'enunciato più generale che ogni funzione generalizzata il cui supporto è un punto, può essere rappresentata sotto forma di una combinazione lineare della funzione delta e delle sue derivate in questo punto (si veda il § 8.4).

Notiamo che, nella classe delle funzioni localmente integrabili, l'equazione (19) ha l'unica soluzione $u = 0$.

f) Verifichiamo che la funzione $\mathscr{E}(t) = \theta(t) Z(t)$, dove $Z(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale omogenea

$$LZ \equiv Z^{(m)} + a_1(t) Z^{(m-1)} + \ldots + a_m(t) Z = 0$$

che soddisfa le condizioni

$$Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1,$$

soddisfa anche l'equazione $L\mathscr{E} = \delta(t)$.

Infatti, utilizzando la formula (14), si ottiene

$$\mathscr{E}'(t) = \theta(t)\, Z'(t), \ \ldots, \ \mathscr{E}^{(m-1)}(t) = \theta(t) Z^{(m-1)}(t),$$
$$\mathscr{E}^{(m)}(t) = \delta(t) + \theta(t)\, Z^{(m)}(t),$$

da cui

$$L\mathscr{E} = \theta(t) LZ + \delta(t) = \delta(t),$$

il che è stato enunciato prima.

5. Esempi, $n \geqslant 2$.

a) Una generalizzazione — $\delta'(x)$ è il doppio strato su una superficie. Siano S una superficie regolare a tratti bilaterale, $\boldsymbol{n}$ una normale a S (fig. 27) e $\nu(x)$ una funzione continua data su S. Introduciamo la funzione generalizzata $-\partial(\nu\delta_S)/d\boldsymbol{n}$ soggetta alla regola

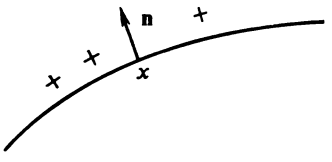


Fig. 27.

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu\delta_S), \varphi\right) = \int_S \nu(x) \frac{\partial\varphi(x)}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS, \qquad \varphi \in \mathscr{D}$$

È evidente che

$$-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu\delta_S) \in \mathscr{D}',$$
$$\operatorname{supp}\left[-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu\delta_S)\right] \subset S.$$

La funzione generalizzata $-\partial(\nu\delta_S)/\partial\boldsymbol{n}$ è detta *doppio strato su S* con una densità $\nu(x)$ orientato lungo la normale $\boldsymbol{n}$. Questa funzione descrive la densità di cariche che corrisponde alla distribuzione di dipoli su S con densità di momento superficiale $\nu(x)$ ed orientati lungo una data direzione (normale $\boldsymbol{n}$) su S (si veda il § 6.4, esempio a)).

b) Supponiamo che il dominio G abbia una frontiera regolare a tratti S ed una funzione f appartenga a $C^1(\overline{G}) \cap C^1(\overline{G}_1)$ dove $G_1 = R^n \setminus \overline{G}$. Si ha allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + [f]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\, \delta_S, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_x$ è la normale esterna a S nel punto $x \in S$ e $[f]_S$ è il salto delle funzioni f nel passaggio dall'esterno attraverso S:

$$\lim_{x' \to x,\ x' \in G_1} f(x') - \lim_{x' \to x,\ x' \in G} f(x') = [f]_S(x), \qquad x \in S.$$

Per ottenere la formula (22) utilizziamo la formula di Green e la definizione di uno strato semplice (si veda il § 5.7):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = -\int f(x) \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\, dx =$$
$$= \int \left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\} \varphi(x)\, dx + \int_S [f]_S(x) \cos(\boldsymbol{n}x_i)\, \varphi(x)\, dS =$$
$$= \left(\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + [f]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\, \delta_S, \varphi\right), \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

c) Supponiamo che l'esempio b) sia modificato di modo che $f \in C^2(\bar{G}) \cap C^2(\bar{G}_1)$. Si ha allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_j}([f]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S) + \\ + \left[\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}\right]_S \cos(\boldsymbol{n}x_j)\,\delta_S. \quad (23)$$

Per ottenere la formula (23) deriviamo l'uguaglianza (22) rispetto a x_j e, derivando la funzione $(\partial f(x)/\partial x_i)$, utilizziamo di nuovo la (22):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right\} + \left[\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}\right]_S \cos(\boldsymbol{n}x_j)\,\delta_S.$$

Ponendo $i = j$ nella (23) e sommando rispetto ad $i = 1, 2, \ldots, n$, si ottiene

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}([f]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S) + \sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}\right]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S. \quad (24)$$

Tenendo conto delle uguaglianze

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}([f]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}([f]_S\,\delta_S), \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}\right]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S = \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right]_S \delta_S, \quad (26)$$

riscriviamo la formula (24) nella forma

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}([f]_S\,\delta_S). \quad (27)$$

Dimostriamo la formula (25). Per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$ abbiamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}([f]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S), \varphi\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left([f]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\int_S [f]_S \cos(\boldsymbol{n}x_i)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dS = -\int_S [f]_S \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{n}x_i)\,dS =$$

$$= -\int_S [f]_S \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}([f]_S\,\delta_S), \varphi\right).$$

La formula (26) è stabilita in modo analogo.

Ponendo $f = 0$, $x \in G_1$ nella formula (27), si ottiene

$$\Delta f = \{\Delta f\} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\delta_S - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(f\delta_S). \quad (28)$$

Quest'è la seconda formula di Green scritta in termini di funzioni generalizzate. Applicando entrambi i membri dell'uguaglianza (28) ad una funzione fondamentale φ, otteniamo la formula nella forma comune:

$$\int_G (f\Delta\varphi - \varphi\,\Delta f)\,dx = \int_S \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} - \varphi\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right) dS. \tag{29}$$

Se G è una regione limitata, la formula (29) è valida per tutte le $\varphi \in C^2(\overline{G})$.

d) Sia $n = 2$. Calcoliamo $\Delta \ln |x|$. La funzione $\ln |x|$ è localmente integrabile in R^2. Se $x \neq 0$, si ha $\ln |x| \in C^\infty$, e quindi $D^\alpha \ln |x| = \{D^\alpha \ln |x|\}$ (si veda il § 6.1). Di conseguenza, passando alle coordinate polari (si veda la formula (15) del § 3.2), si ottiene

$$\Delta \ln |x| = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right) = 0, \qquad x \neq 0. \tag{30}$$

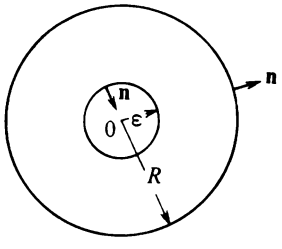


Fig. 28.

Supponiamo che $\varphi \in \mathscr{D}$ e supp $\varphi \subset U_R$. Si ha allora

$$(\Delta \ln |x|,\ \varphi) = (\ln |x|,\ \Delta\varphi) = \int_{U_R} \ln |x|\,\Delta\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x|<R} \ln |x|\,\Delta\varphi(x)\,dx.$$

Applicando la (29) per $f = \ln |x|$ e $G = [\varepsilon < |x| < R]$ (fig. 28) e tenendo conto della (30), si ottiene

$$(\Delta \ln |x|,\ \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{[\varepsilon<|x|<R} \Delta \ln |x|\,\varphi\,dx + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{S_\varepsilon} + \int_{S_R}\right)\left(\ln |x|\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} - \varphi\frac{\partial \ln |x|}{\partial \boldsymbol{n}}\right) dS\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\left(-\ln |x|\frac{\partial\varphi}{\partial |x|} + \varphi\frac{1}{|x|}\right) dS = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\varphi\,dS =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dS + 2\pi\varphi(0)\right\} = 2\pi\varphi(0) = (2\pi\delta,\ \varphi).$$

Quindi, si ha

$$\Delta \ln |x| = 2\pi\delta(x), \quad n = 2. \tag{31}$$

Analogamente, per $n \geqslant 3$ si ottiene

$$\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}} = -(n-2)\,\sigma_n\delta(x), \tag{32}$$

dove σ_n è l'area della superficie di una sfera unitaria in R^n:

$$\sigma_n = \int_{S_1} ds = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

e Γ è l'integrale d'Eulero (funzione gamma):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

e) Verifichiamo che le funzioni

$$\mathscr{E}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi\,|\,x\,|}, \quad \overline{\mathscr{E}}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi\,|\,x\,|} \tag{33}$$

per $n = 3$ soddisfano l'equazione

$$\Delta\mathscr{E} + k^2\mathscr{E} = \delta(x). \tag{34}$$

Infatti, visto che le funzioni $\cos k\,|\,x\,|$ e $|\,x\,|^{-1} \sin k\,|\,x\,|$ sono infinitamente derivabili, derivando la funzione $|\,x\,|^{-1}e^{ik|x|}$ si può utilizzare la formula di Leibniz (si veda il § 6.2, esempio d)). Tenendo conto della uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|\,x\,|} = -\frac{x_j}{|\,x\,|^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} e^{ik|x|} = \frac{ikx_j}{|\,x\,|} e^{ik|x|},$$

$$\Delta e^{ik|x|} = \left(\frac{2ik}{|\,x\,|} - k^2\right) e^{ik|x|}$$

(poiché qui le derivate generalizzate coincidono con quelle classiche) ed utilizzando la formula (32) per $n = 3$, si ottiene

$$(\Delta + k^2)\frac{1}{|\,x\,|} e^{ik|x|} = e^{ik|x|}\Delta\frac{1}{|\,x\,|} + 2\left(\operatorname{grad} e^{ik|x|}, \operatorname{grad}\frac{1}{|\,x\,|}\right) +$$

$$+ \frac{1}{|\,x\,|}\,\Delta e^{ik|x|} + \frac{k^2}{|\,x\,|} e^{ik|x|} = -4\pi e^{ik|x|}\delta(x) +$$

$$+ \left(-\frac{2ik}{|\,x\,|^2} + \frac{2ik}{|\,x\,|^2} - \frac{k^2}{|\,x\,|} + \frac{k^2}{|\,x\,|}\right) e^{ik|x|} = -4\pi\delta(x),$$

come si voleva dimostrare.

f) Sia

$$\mathscr{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

Dimostriamo che

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - a^2\Delta\mathscr{E} = \delta(x, t). \tag{35}$$

La funzione $\mathscr{E}(x, t)$ è localmente integrabile in R^{n+1} poiché $\mathscr{E} = 0$ per $t < 0$, $\mathscr{E} \geqslant 0$ per $t \geqslant 0$, e per $t > 0$ si ha

$$\int \mathscr{E}(x, t)\, dx = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}\, dx = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_i^2}\, d\xi_i = 1. \quad (36)$$

Se $t > 0$, allora $\mathscr{E} \in C^\infty$ e quindi

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t}\right)\mathscr{E},\quad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2 t}\mathscr{E},\quad \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t}\right)\mathscr{E},$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathscr{E} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t}\right)\mathscr{E} - \left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t}\right)\mathscr{E} = 0. \quad (37)$$

Sia $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1})$. Tenendo conto dell'uguaglianza (37), si ottiene

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathscr{E},\ \varphi\right) = -\left(\mathscr{E},\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi\right) =$$

$$= -\int_0^\infty \int \mathscr{E}(x, t)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi\right) dx\, dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \int \mathscr{E}(x, t)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi\right) dx\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\, \varphi(x, \varepsilon)\, dx + \int_\varepsilon^\infty \int \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathscr{E}\right) \varphi\, dx\, dt\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\, \varphi(x, 0)\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\, [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)]\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\, \varphi(x, 0)\, dx, \quad (38)$$

poiché, in virtù della (36), si ha

$$\left| \int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\, [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)]\, dx \right| \leqslant K\varepsilon \int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\, dx = K\varepsilon.$$

Dimostriamo ora la seguente relazione:

$$\mathscr{E}(x, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \to \delta(x), \qquad t \to +0 \text{ in } \mathscr{D}'(R^n). \quad (39)$$

Infatti, sia $\varphi(x) \in \mathscr{D}$. Allora, tenendo conto del fatto che

$$\left| \int \mathscr{E}(x, t)\, [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx \right| \leqslant \frac{K}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}\, |x|\, dx =$$

$$= \frac{K\sigma_n}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} r^n\, dr = \frac{2K\sigma_n \sqrt{ta}}{\pi^{n/2}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^n\, du = C\sqrt{t},$$

in virtù della (36), si ottiene la relazione (39) pet $t \to +0$

$$(\mathscr{E}(x, t), \varphi) = \int \mathscr{E}(x, t)\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= \varphi(0) \int \mathscr{E}(x, t)\, dx + \int \mathscr{E}(x, t)\, [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx \to$$

$$\to \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

La formula (35) segue dalle relazioni (38) e (39). Notiamo che la relazione limite (39) è anche valida su funzioni limitate continue nel punto 0.

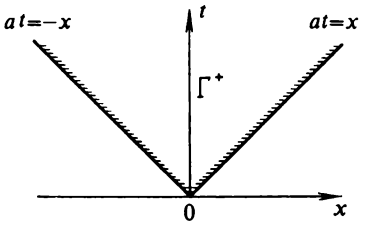


Fig. 29.

g) Sia $x = x_1$ e

$$\mathscr{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a}\, \theta(at - |x|).$$

Dimostriamo che

$$\Box_a \mathscr{E}_1 = \delta(x, t). \qquad (40)$$

La funzione $\mathscr{E}_1$ è localmente integrabile in R^2 e s'annulla all'infuori della chiusura del cono di futuro $\overline{\Gamma}^+$ (fig. 29). Sia $\varphi \in \mathscr{D}$. Si ha allora

$$(\Box_a \mathscr{E}_1, \varphi) = (\mathscr{E}_1, \Box_a \varphi) = \int \mathscr{E}_1(x, t)\, \Box_a \varphi(x, t)\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{|x|}{a}}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\, dt\, dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \int_{-at}^{at} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi\left(x, \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}\, dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi\left(x, \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}\, dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x}\, dt -$$

$$- \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi\left(-x, \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}\, dx + \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x}\right] dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial t} - a \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(at, t)}{dt}\, dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(-at, t)}{dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \varphi(0, 0) + \frac{1}{2}\, \varphi(0, 0) = (\delta, \varphi),$$

il che dimostra la validità della (40).

h) Sia δ_{S_r} uno strato semplice sulla sfera $|x| = r$ (si veda il § 5.7). Stabiliamo la validità della seguente relazione (formula di Pizzetti):

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\delta_{S_r} - \delta\right) \to \frac{1}{2n}\Delta\delta, \quad r \to 0 \text{ in } \mathscr{D}'. \tag{41}$$

Infatti, per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$ per $r \to 0$ abbiamo

$$\left(\frac{1}{\sigma_n r^{n+1}}\delta_{S_r} - \frac{1}{r^2}\delta, \varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n r^{n+1}}\int_{S_r}\varphi(x)\,dS - \frac{\varphi(0)}{r^2} = \frac{1}{\sigma_n r^2}\int_{S_1}[\varphi(rs) - \varphi(0)]\,ds =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n r^2}\int_{S_1}\left[r\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi(0)}{\partial x_k}s_k + \frac{r^2}{2}\sum_{k,\,i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial x_k\,\partial x_i}s_k s_i + O(r^3)\right]ds \to$$

$$\to \frac{1}{2n}\Delta\varphi(0) = \frac{1}{2n}(\Delta\delta, \varphi),$$

poiché

$$\int_{S_1} s_k\,ds = 0, \quad \int_{S_1} s_k s_i\,ds = \delta_{ki}\int_{S_1} s_k^2\,ds = \frac{\sigma_n}{n}\delta_{ki}, \quad \int_{S_1} s_k^2\,ds =$$

$$= \sigma_{n-1}\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta\cos^2\theta\,d\theta = \sigma_{n-1}\int_0^1(1-\mu)^{\frac{n-3}{2}} \times$$

$$\times\sqrt{\mu}\,d\mu = \sigma_{n-1}B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sigma_n}{n}.$$

Qui B è l'integrale di Eulero (funzione beta):

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1}\,t^{q-1}\,dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

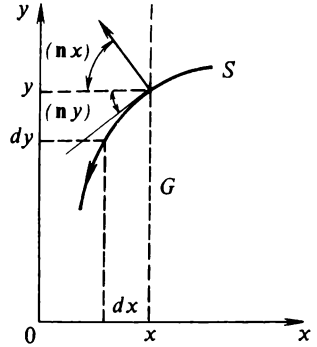


Fig. 30.

i) Siano $n = 2$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ e $dz = dx + i\,dy$. L'operatore differenziale

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

è detto *operatore di Cauchy-Riemann*. Siano $f \in C^1(\bar{G})$ e $f(x, y) = 0$, $z \in G_1$, dove $G_1 = R^2 \setminus \bar{G}$. La frontiera S della regione G è supposta come una curva regolare a tratti. Come verso positivo su S prendiamo quello, lungo cui la regione G rimane a sinistra, come si fa usualmente nella teoria delle funzioni di una variabile complessa (fig. 30). Utilizzando la for-

mula (22), troviamo che

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \left\{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right\} - \frac{f}{2}\left[\cos(\boldsymbol{n}x) + i\cos(\boldsymbol{n}y)\right]\delta_S. \tag{42}$$

Applicando entrambi i membri dell'uguaglianza (42) alla funzione fondamentale φ, si ottiene una formula analoga alla (29):

$$\int_G \left(f\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\varphi\right) dx\,dy = \frac{1}{2}\int_S f\varphi\left[\cos(\boldsymbol{n}x) + i\cos(\boldsymbol{n}y)\right] dS =$$

$$= \frac{1}{2}\int_S f\varphi\,(dy - i\,dx) = -\frac{i}{2}\int_S f\varphi\,dz,$$

cioè

$$\int_G \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f\varphi)\,dx\,dy = -\frac{i}{2}\int_S f\varphi\,dz. \tag{43}$$

j) Dimostriamo che

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z} = \pi\delta(x, y). \tag{44}$$

La funzione $1/z$ è localmente integrabile in R^2. Per questa ragione, utilizzando la formula (43) per $f = 1/z$ e $G = [\varepsilon < |z| < R]$ (fig. 28), per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$, supp $\varphi \subset U_R$, si ottiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z}, \varphi\right) = -\left(\frac{1}{z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\varphi\right) =$$

$$= -\int_{U_R}\frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|z|<R}\frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon<|z|<R}\varphi\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z}\,dx\,dy + \frac{i}{2}\left(\int_{S_R} - \int_{S_\varepsilon}\right)\frac{\varphi}{z}\,dz\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|=\varepsilon}\varphi(z)\frac{dz}{z} = -\frac{i}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} i\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = \pi\varphi(0) =$$

$$= (\pi\delta, \varphi),$$

come si voleva dimostrare.

6. Esercizi. a) Dimostrare che

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathscr{P}\frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\mathscr{P}\frac{1}{x} = -\mathscr{P}\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta'(x) - \mathscr{P}\frac{1}{x^2},$$

dove

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,dx.$$

b) Dimostrare che le funzioni generalizzate che figurano nella colonna destra sono le soluzioni generali in $\mathscr{D}'(R^1)$ delle equazioni della colonna sinistra

$$xu' = 1, \qquad u = c_1 + c_2\theta(x) + \ln|x|,$$

$$xu' = \mathscr{P}\frac{1}{x}, \qquad u = c_1 + c_2\theta(x) - \mathscr{P}\frac{1}{x},$$

$$x^2u' = 1, \qquad u = c_1 + c_2\theta(x) + c_3\delta(x) - \mathscr{P}\frac{1}{x},$$

$$xu = \sin x, \qquad u = c\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{|x|},$$

dove

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|}, \varphi\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx,$$

$$(\sin x)\,u = 0, \quad u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta(x - k\pi).$$

Prestiamo attenzione al fatto che le soluzioni classiche delle equazioni differenziali del primo ordine contengono una sola costante arbitraria.

c) Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$a(x)\,\delta'(x) = -a'(0)\,\delta(x) + a(0)\,\delta'(x), \quad a \in C^1(R^1).$$

d) Dimostrare che se $f \in \mathscr{D}'$ e $f(x) = 0$, per $x < x_0$, esiste un'unica primitiva $f^{(-1)}$ che si annulla per $x < x_0$.

e) Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$(D^\alpha f)(x + h) = D^\alpha f(x + h), \quad f \in \mathscr{D}', \quad h \in R^n.$$

f) Dimostrare che, se una funzione generalizzata è invariante rispetto a tutti gli spostamenti, questa funzione è una costante.

g) Dimostrare che il sistema di funzioni generalizzate $D^\alpha\delta(x)$, $|\alpha| = m$, $m = 0, 1, \ldots$, è linearmente indipendente.

h) Dimostrare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\delta^{(k)}(x - k)$$

converge in $\mathscr{D}'$ per tutti i valori di α_k.

i) Dimostrare che in $\mathscr{D}'$ la soluzione generale dell'equazione $x^n u^{(n)} = 0$, $n > m$, è

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\theta(x)\,x^{m-1-k} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k\delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} d_k x^k,$$

dove c_k e d_k sono costanti arbitrarie.

§ 7. *Prodotto diretto e convoluzione delle funzioni generalizzate*

1. Definizione del prodotto diretto. Siano $f(x)$ e $g(y)$ funzioni localmente integrabili negli spazi R^n e R^m, rispettivamente. Anche la funzione $f(x)\,g(y)$ sarà localmente integrabile in R^{n+m}. Questa funzione definisce una funzione generalizzata (regolare) agente

sulle funzioni fondamentali $\varphi(x, y) \in \mathscr{D}$ secondo le formule

$$(f(x)\, g(y),\ \varphi) = \int f(x)\, g(y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int f(x) \int g(y)\, \varphi(x, y)\, dy\, dx =$$

$$= (f(x),\ (g(y),\ \varphi(x, y))), \tag{1}$$

$$(g(y)\, f(x),\ \varphi) = \int g(y)\, f(x)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int g(y) \int f(x)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= (g(y),\ (f(x),\ \varphi(x, y))). \tag{1'}$$

Queste uguaglianze esprimono il teorema di Fubini (si veda il § 1.4, esempio h)) sulla coincidenza degli integrali iterati con quelli multipli. Consideriamo l'uguaglianza (1) come definizione del *prodotto diretto* $f(x) \cdot g(y)$) delle funzioni generalizzate $f(x) \in \in \mathscr{D}'(R^n)$ e $g(y) \in \mathscr{D}'(R^m)$:

$$(f(x) \cdot g(y),\ \varphi) = (f(x),\ g(y),\ \varphi(x, y))),\quad \varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m}). \tag{2}$$

Verifichiamo che questa definizione sia corretta, cioè che il secondo membro della (2) definisca un funzionale lineare continuo su $\mathscr{D}(R^{n+m})$.

Dimostriamo prima il seguente

Lemma. *Per* $g \in \mathscr{D}'(R^m)$ *e* $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$ *qualunque la funzione* $\psi(x) = (g(y),\ \varphi(x, y))$ *appartiene a* $\mathscr{D}(R^n)$, *ed inoltre, per tutti i valori di* α, *si ha*

$$D^\alpha \psi(x) = (g(y),\ D_x^\alpha \varphi(x, y)). \tag{3}$$

Poi, se $\varphi_k \to 0$ *per* $k \to \infty$ *in* $\mathscr{D}(R^{n+m})$, *si ha*

$$\psi_k(x) = (g(y),\ \varphi_k(x, y)) \to 0,\quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}(R^n).$$

Dimostrazione. Visto che $\varphi(x, y) \in \mathscr{D}(R^m)$ per ogni $x \in R^n$, la funzione $\psi(x)$ è definita in R^n. Dimostriamo che questa funzione è continua in R^n. Fissiamo il punto x e supponiamo che $x_k \to x$ per $k \to \infty$. Si ha allora

$$\varphi(x_k, y) \to \varphi(x, y),\quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}(R^m), \tag{4}$$

poiché, in base al fatto che $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$, i supporti di $\varphi(x_k, y)$ sono limitati in R^m per tutti i valori di k (fig. 31) e

$$D_y^\beta \varphi(x_k, y) \overset{y \in R^m}{\Longrightarrow} D_y^\beta \varphi(x, y),\qquad k \to \infty.$$

Essendo il funzionale $g(y)$ continuo su $\mathscr{D}(R^m)$, dalla (4) segue la continuità di $\psi(x)$ nel punto x:

$$\psi(x_k) = (g(y),\ \varphi(x_k, y)) \to (g(y),\ \varphi(x, y)) = \psi(x),\qquad x_k \to x.$$

Dimostriamo ora la formula (3). Fissiamo il punto x ed introduciamo la notazione $h_i = (0, \ldots, \underbrace{h}_{i}, \ldots, 0)$. Si ha allora

$$\chi_h^{(i)}(y) = \frac{1}{h}[\varphi(x+h_i, y) - \varphi(x, y)] \to \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}, \quad h \to 0 \text{ in } \mathscr{D}(R^m), \tag{5}$$

poiché, in virtù del fatto che $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$, i supporti della $\chi_h^{(i)}$ sono limitati in R^m per tutti i valori di h e per tutti i valori di β si ha

$$D^\beta \chi_h^{(i)}(y) = \frac{1}{h}[D_y^\beta \varphi(x+h_i, y) - D_y^\beta \varphi(x, y)] \overset{y \in R^m}{\rightrightarrows}$$

$$\overset{y \in R^m}{\underset{!}{\rightrightarrows}} D_y^\beta \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}, \quad h \to 0.$$

Visto che $g \in \mathscr{D}'(R^m)$, utilizzando la (5), si ottiene

$$\frac{\psi(x+h_i) - \psi(x)}{h} = \frac{1}{h}[(g(y), \varphi(x+h_i, y)) - (g(y), \varphi(x, y))] =$$

$$= \left(g(y), \frac{\varphi(x+h_i, y) - \varphi(x, y)}{h}\right) = (g, \chi_h^{(i)}) \to$$

$$\to \left(g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}\right), \quad h \to 0,$$

da cui segue la validità della (3) per $\alpha = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0)$:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} = \left(g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Applicando di nuovo questi ragionamenti alla formula ottenuta, ci convinciamo che la (3) è valida per tutti i valori di α. Dato che la funzione $D^\alpha \varphi$, come pure φ, appartiene anch'essa a $\mathscr{D}(R^{n+m})$, concludiamo dalla formula (3), per quanto è stato dimostrato, che $D^\alpha \psi(x)$ è continua in R^n per tutti i valori di α. Quindi, ψ appartiene a $C^\infty(R^n)$. Inoltre, la funzione $\psi(x)$ è finita in R^n, poiché $\varphi(x, y) = 0$ per $|x| > R$ (fig. 31) e per questa ragione $\psi(x) = (g, 0) = 0$ per questi valori di x. Di conseguenza, $\psi \in \mathscr{D}(R^n)$.

Supponiamo che $\varphi_k(x, y) \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Dimostriamo che $\psi_k(x) \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}(R^n)$. Visto che i supporti di $\varphi_k(x, y)$ sono limitati in R^{n+m} per tutti i valori di k, i supporti di $\psi_k(x)$ sono anch'essi limitati in R^n per tutti i valori di k. Dobbiamo ancora dimostrare che

$$D^\alpha \psi_k(x) \overset{x \in R^n}{\rightrightarrows} 0, \quad k \to \infty$$

per tutti i valori di α.

Supponiamo che non sia così. Allora, esistono un numero positivo ε_0, un indice α_0 ed una successione di punti x_k tali che

$$|D^{\alpha_0} \psi_k(x_k)| \geqslant \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Essendo i supporti di ψ_k limitati in R^n indipendentemente da k, dalla (6) segue che la successione x_k, $k = 1, 2, \ldots$, è anch'essa limitata in R^n. Perciò, secondo il teorema di Bolzano-Weierstrass, da questa successione si può scegliere una sottosuccessione convergente $x_{k_i} \to x_0$ (per $i \to \infty$). Ma allora

$$D_x^{\alpha_0} \varphi_{k_i} (x_{k_i}, y) \to 0, \quad i \to \infty \text{ in } \mathscr{D}(R^m).$$

Di qui, in virtù della continuità del funzionale g su $\mathscr{D}(R^m)$, dalla formula (3) si ottiene

$$D^{\alpha_0} \psi_{k_i} (x_{k_i}) = (g(y), D_x^{\alpha_0} \varphi_{k_i} (x_{k_i}, y)) \to 0, \quad i \to \infty,$$

il che contraddice alle disuguaglianze (6). Il lemma è dimostrato

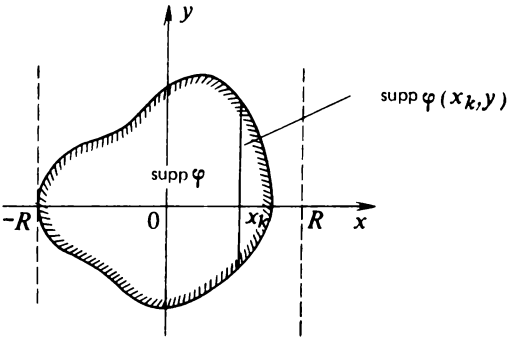


Fig. 31.

Ritorniamo alla definizione del prodotto diretto. Conformemente al lemma appena dimostrato, $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in \mathscr{D}(R^n)$ per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$. Per conseguenza, il secondo membro dell'uguaglianza (2) uguale a (f, ψ) ha senso per funzioni generalizzate f e g qualsiasi e, quindi, definisce un funzionale su $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Inoltre, dalla linearità dei funzionali f e g, segue anche la linearità di questo funzionale.

Dimostriamo che il funzionale costruito è continuo su $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Allora, in conformità con il lemma, si ha

$$(g(y), \varphi_k(x, y)) \to 0, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}(R^n),$$

e, quindi, in virtù della continuità del funzionale f su $\mathscr{D}(R^n)$, si ha $(f(x), (g(y), \varphi_k(x, y))) \to 0$ per $k \to \infty$, il che significa che il funzionale che figura nel secondo membro dell'uguaglianza (2), è continuo.

Dunque, il funzionale $f(x) \cdot g(y) \in \mathscr{D}'(R^{n+m})$, cioè è una funzione generalizzata.

2. Commutatività del prodotto diretto. Supponiamo che siano date due funzioni generalizzate: $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ e $g \in \mathscr{D}'(R^m)$. Insieme

con il prodotto diretto $f(x)\cdot g(y)$, conformemente alla formula (2), è definito il prodotto diretto $g(y)\cdot f(x)$:

$$(g(y)\cdot f(x),\ \varphi) = (g(y),\ f(x),\ \varphi(x,\ y))),\ \varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m}). \qquad (2')$$

Risulta che

$$f(x)\cdot g(y) = g(y)\cdot f(x), \qquad (7)$$

cioè l'operazione di prodotto diretto è *commutativa*.

Infatti, per le funzioni fondamentali $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$ della forma

$$\varphi(x, y) = \sum_{l=1}^{N} u_l(x)\, v_l(y), \qquad u_l \in \mathscr{D}(R^n), \qquad v_l \in \mathscr{D}(R^m), \qquad (8)$$

l'uguaglianza (7) segue dalle definizioni (2) e (2'):

$$(f(x)\cdot g(y), \varphi) = \Big(f, \sum_{l=1}^{N} u_l (g, v_l)\Big) = \sum_{l=1}^{N} (f, u_l)(g, v_l) =$$

$$= \Big(g, \sum_{l=1}^{N} v_l (f, u_l)\Big) = (g(y)\cdot f(x), \varphi).$$

Per estendere l'uguaglianza (7) a funzione fondamentale qualsiasi, dimostriamo un lemma che enuncia che l'insieme delle funzioni fondamentali di tipo (8) è denso in $\mathscr{D}(R^{n+m})$ (cfr. il § 1.7).

Lemma. *Per una funzione qualsiasi* $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$ *esiste una successione di funzioni fondamentali* $\varphi_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, *della forma* (8) *convergente a* φ *in* $\mathscr{D}(R^{n+m})$.

Dimostrazione. Supponiamo che supp $\varphi(x, y)$ sia contenuto in una sfera $\overline{U}_R$ (fig. 32). Secondo il teorema di Weirstrass (si veda il § 1.3), esistono polinomi $P_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$ tali che

$$|D^\alpha \varphi - D^\alpha P_k| < \frac{1}{k} \text{ per tutti gli } |\alpha| \leqslant k \text{ e } |x|^2 + |y|^2 \leqslant 8R^2. \qquad (9)$$

Siano $e(x)$ e $h(y)$ funzioni fondamentali uguali all'unità in una sfera di raggio R ed a zero all'infuori di una sfera di raggio $2R$ (per il lemma 1 del § 5.2 queste funzioni esistono). In questo caso la successione delle funzioni fondamentali

$$\varphi_k(x, y) = e(x)\, h(y)\, P_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

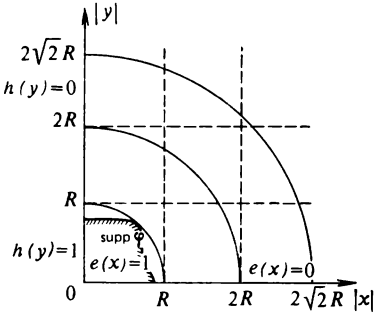


Fig. 32.

possiede le proprietà richieste. Infatti, le φ_k hanno la forma (8), i supporti di φ_k sono contenuti nella sfera $|x|^2 + |y|^2 \leqslant 8R^2$ e, in

virtù della (9), per tutti gli α e $k \geqslant |\alpha|$ si ha

$$|D^{\alpha}\varphi - D^{\alpha}\varphi_k| = |D^{\alpha}\varphi - D^{\alpha}(ehP_k)| \leqslant \frac{C_{\alpha}}{k},$$

$$|x|^2 + |y|^2 \leqslant 8R^2,$$

dove C_{α} sono certi numeri indipendenti da k. Ciò vuol dire che $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Il lemma è dimostrato.

Supponiamo che φ sia una funzione fondamentale arbitraria appartenente a $\mathscr{D}(R^{n+m})$. In virtù del lemma dimostrato esiste una successione $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ di funzioni fondamentali del tipo (8) convergente a φ in $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Da ciò, utilizzando la continuità dei funzionali $f(x)\cdot g(y)$ e $g(y)\cdot f(x)$ su $\mathscr{D}(R^{n+m})$ e l'uguaglianza dimostrata (7) sulle funzioni del tipo (8), si ottiene l'uguaglianza (7) e nel caso generale si ha

$$(f(x)\cdot g(y), \varphi) = \lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y), \varphi_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(g(y)\cdot f(x), \varphi_k) = (g(y)\cdot f(x), \varphi).$$

3. Altre proprietà del prodotto diretto.

a) *L'operazione di prodotto diretto* $f(x)\cdot g(y)$ *è lineare e continua rispetto a* f (da $\mathscr{D}'(R^n)$ in $\mathscr{D}'(R^{n+m})$) *e rispetto a* g (da $\mathscr{D}'(R^m)$ in $\mathscr{D}'(R^{n+m})$), per esempio,

$$[\lambda f(x) + \mu f_1(x)]\cdot g(y) = \lambda[f(x)\cdot g(y)] + \mu[f_1(x)\cdot g(y)],$$

$$f, f_1 \in \mathscr{D}'(R^n), \quad g \in \mathscr{D}'(R^m);$$

$$f_k(x)\cdot g(y) \to 0, \ k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}'(R^{n+m}),$$

$$\text{se } f_k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}'(R^n).$$

Dimostriamo la continuità. Supponiamo che sia $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$; secondo il lemma del § 7.1, $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in \mathscr{D}(R^n)$. Quindi, utilizzando la definizione (2) del prodotto diretto, si ottiene

$$(f_k(x)\cdot g(y), \varphi) = (f_k(x), (g(y), \varphi(x, y))) = (f_k, \psi) \to 0, \quad k\to\infty,$$

come si voleva dimostrare.

b) Associatività del prodotto diretto: se $f \in \mathscr{D}'(R^n)$, $g \in \mathscr{D}'(R^m)$ e $h \in \mathscr{D}'(R^k)$, si ha

$$f(x)\cdot[g(y)\cdot h(z)] = [f(x)\cdot g(y)]\cdot h(z). \tag{10}$$

Infatti, se $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m+k})$, si ha

$$(f(x)\cdot[g(y)\cdot h(z)], \varphi) = (f(x), (g(y)\cdot h(z), \varphi)) =$$

$$= (f(x), (g(y), (h(z), \varphi))) =$$

$$= (f(x)\cdot g(y), (h(z), \varphi)) = ([f(x)\cdot g(y)]\cdot h(z), \varphi).$$

c) Derivazione del prodotto diretto. Dimostriamo che

$$(D_x^{\alpha}[f(x)\cdot g(y)] = D^{\alpha}f(x)\cdot g(y). \tag{11}$$

Infatti, se $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$, si ha (si veda il § 6.1)

$$(D_x^\alpha [f(x)\cdot g(y)], \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f(x)\cdot g(y), D_x^\alpha \varphi) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} (g(y), (f(x), D_x^\alpha \varphi(x, y))) =$$
$$= (g(y), (D^\alpha f(x), \varphi)) = (D^\alpha f(x)\cdot g(y), \varphi).$$

d) Moltiplicazione del prodotto diretto: se $a \in C^\infty(R^n)$, si ha

$$a(x)[f(x)\cdot g(y)] = a(x) f(x)\cdot g(y). \tag{12}$$

Infatti, se $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$, si ha (si veda il § 5.10)

$$(a(x)[f(x)\cdot g(y)], \varphi) = (f(x)\cdot g(y), a\varphi) = (f(x), (g(y), a(x)\varphi(x, y))) =$$
$$= (f(x), a(x)(g(y), \varphi(x, y))) = (a(x) f(x), (g(y), \varphi(x, y))) =$$
$$= (a(x) f(x)\cdot g(y), \varphi).$$

e) Spostamento del prodotto diretto. Dimostriamo che

$$(f\cdot g)(x + h, y) = f(x + h)\cdot g(y). \tag{13}$$

Infatti, se $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$, si ha (si veda il § 5.9)

$$((f\cdot g)(x + h, y), \varphi) = (f(x)\cdot g(y), \varphi(x - h, y)) =$$
$$= (g(y), (f(x), \varphi(x - h, y))) =$$
$$= (g(y), (f(x + h), \varphi(x, y))) = (f(x + h)\cdot g(y), \varphi).$$

f) Si dice che una funzione generalizzata della forma $f(x)\cdot 1(y)$ *non dipende da y*. Questa funzione agisce secondo la seguente regola: se $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$, si ha

$$(f(x)\cdot 1(y), \varphi) = \left(f(x), \int \varphi(x, y)\, dy\right) = (1(y)\cdot f(x), \varphi) =$$
$$= \int (f(x), \varphi(x, y))\, dy.$$

Abbiamo, quindi ricavato l'uguaglianza

$$\left(f(x), \int \varphi(x, y)\, dy\right) = \int (f(x), \varphi(x, y))\, dy, \tag{14}$$

che è valida per tutte le $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ e $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$,

4. Convoluzione delle funzioni generalizzate. Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni localmente integrabili in R^n, e sia inoltre la funzione

$$h(x) = \int |\, g(y) f(x - y)\,|\, dy$$

anch'essa localmente integrabile in R^n. La funzione

$$(f * g)(x) = \int f(y)\, g(x - y)\, dy = \int g(y)\, f(x - y)\, dy = (g * f)(x) \tag{15}$$

si dice *convoluzione* $f * g$ delle due funzioni f e g.

Notiamo che le convoluzioni $f * g$ e $|f| * |g| = h$ esistono simultaneamente e soddisfano la disuguaglianza $|(f * g)(x)| \leqslant h(x)$ (per quasi tutti i valori di x), di modo che la convoluzione $f * g$ risulta anch'essa localmente integrabile in R^n (si veda il § 1.4, esempio *b*)). Perciò questa convoluzione definisce una funzione generalizzata (regolare) che agisce sulle funzioni fondamentali $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ conformemente alla regola

$$(f * g, \varphi) =$$

$$= \int (f * g)(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \int \left[\int g(y)\, f(\xi - y)\, dy \right] \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int g(y) \left[\int f(\xi - y)\, \varphi(\xi)\, d\xi \right] dy = \int g(y) \left[\int f(x)\, \varphi(x + y)\, dx \right] dy$$

in virtù del teorema di Fubini, si veda il § 1.4, esempio *h*)), e cioè

$$(f * g, \varphi) = \int f(x)\, g(y)\, \varphi(x + y)\, dx\, dy, \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^n). \tag{16}$$

Notiamo i tre casi in cui la condizione d'integrabilità locale della funzione $h(x)$ è verificata e, quindi, la convoluzione $f * g$ esiste ed è definita dalla formula (15).

1) Una delle funzioni f o g è finita, per esempio, supp $g \subset U_{R_1}$:

$$\int_{U_R} h(x)\, dx = \int_{U_{R_1}} |g(y)| \int_{U_R} |f(x - y)|\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{U_{R_1}} |g(y)|\, dy \int_{U_{R+R_1}} |f(\xi)|\, d\xi < \infty.$$

2) Le funzioni f e g si annullano per $x < 0$ ($n = 1$):

$$\int_{-R}^{R} h(x)\, dx = \int_0^R \int_0^x |g(y)|\, |f(x - y)|\, dy\, dx = \int_0^R |g(y)| \int_y^R |f(x - y)|\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^R |g(y)|\, dy \int_0^R |f(\xi)|\, d\xi < \infty.$$

3) Le funzioni f e g sono integrabili su R^n:

$$\int h(x)\, dx = \int |g(y)| \int |f(x - y)|\, dx\, dy = \int |g(y)|\, dy \int |f(\xi)|\, d\xi < \infty,$$

cosicché in questo caso la convoluzione $f * g$ è integrabile su R^n.

Diremo che una successione $\{\eta_k\}$ di funzioni fondamentali appartenenti a $\mathscr{D}(R^n)$ *converge* all'unità in R^n se:

a) per ogni compatto K esiste un numero N tale che $\eta_k(x) = 1$ per tutti gli $x \in K$ e $k \geqslant N$, e b) le funzioni $\{\eta_k\}$ sono uniformemente limitate in R^n insieme con tutte le loro derivate, cioè $|D^\alpha \eta_k(x)| < C_\alpha$, $x \in R^n$, $k = 1, 2, \ldots$, ed α è arbitrario. Un

grafico possibile delle funzioni della successione $\eta_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, per $n = 1$ è rappresentato nella fig. 33.

Notiamo che queste successioni esistono sempre, per esempio, $\eta_k(x) = \eta(x/k)$ dove $\eta \in \mathscr{D}$, $\eta(x) = 1$ in U_1.

Dimostriamo che l'uguaglianza (16) può essere riscritta nella forma

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f(x)\, g(y),\ \eta_k(x; y)\, \varphi(x+y)),\ \varphi \in \mathscr{D}(R^n), \quad (16')$$

dove $\eta_k(x; y)$, $k = 1, 2, \ldots$, è una successione arbitraria convergente all'unità in R^{2n}.

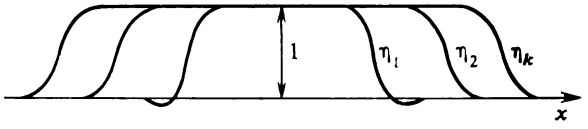


Fig. 33.

Infatti, per quanto abbiamo dimostrato sopra la funzione

$$c_0 \mid f(x) g(y)\, \varphi(x+y) \mid$$

è integrabile su R^{2n} e

$$f(x) g(y)\, \eta_k(x; y) \varphi(x+y) \leqslant c_0 \mid f(x) g(y) \varphi(x+y) \mid,\ k = 1, 2, \ldots$$

Inoltre,

$$f(x)\, g(y)\, \eta_k(x; y)\, \varphi(x+y) \to f(x)\, g(y)\, \varphi(x+y),$$
$$k \to \infty \text{ quasi ovunque in } R^{2n}.$$

Applicando il teorema di Lebesgue (si veda il § 1.4, esempio f)), si ottiene l'uguaglianza

$$\int f(x)\, g(y)\, \varphi(x+y)\, dx\, dy = \lim_{k\to\infty} \int f(x)\, g(y)\, \eta_k(x; y)\, \varphi(x+y)\, dx\, dy,$$

la quale, in virtù della (16), è equivalente all'uguaglianza (16').

In base alle uguaglianze (16) e (16') assumiamo la seguente definizione della convoluzione. Supponiamo che una coppia di funzioni generalizzate f e g appartenenti a $\mathscr{D}'(R^n)$ sia tale che il loro prodotto diretto $f(x) \cdot g(y)$ ammetta un prolungamento (si veda il § 1.10) $(f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y))$ su una funzione della forma $\varphi(x+y)$ dove φ è una qualunque funzione appartenente a $\mathscr{D}(R^n)$, nel seguente senso: comunque sia la successione $\{\eta_k\}$ appartenente a $\mathscr{D}(R^{2n})$ e convergente all'unità in R^{2n}, esiste il limite della successione numerica

$$\lim_{k\to\infty} (f(x) \cdot g(y),\ \eta_k(x; y)\, \varphi(x+y)) = (f(x) \cdot g(y),\ \varphi(x+y))$$

e questo limite non dipende dalla successione $\{\eta_k\}$. Notiamo che per ogni k la funzione $\eta_k(x; y)\, \varphi(x+y)$ appartiene a $\mathscr{D}(R^{2n})$, di modo che la nostra successione numerica è definita.

La *convoluzione* $f * g$ è il funzionale

$$(f * g,\ \varphi) = (f(x)\cdot g(y),\ \varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\varphi(x+y)),\ \varphi \in \mathscr{D}(R^n). \quad (17)$$

Dimostriamo che il funzionale $f * g$ appartiene a $\mathscr{D}'(R^n)$, cioè è una funzione generalizzata. Per ciò, in virtù della completezza dello spazio $\mathscr{D}'(R^n)$ (si veda il § 5.4), è sufficiente dimostrare la continuità dei funzionali lineari

$$(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)),\ k = 1,\ 2,\ \ldots, \quad (18)$$

su $\mathscr{D}(R^n)$. Supponiamo che $\varphi_\nu \to 0$ per $\nu \to \infty$ in $\mathscr{D}(R^n)$. Si ha allora

$$\eta_k(x;\ y)\ \varphi_\nu(x+y) \to 0,\ \nu \to \infty \text{ in } \mathscr{D}(R^{2n}),$$

poiché $\eta_k \in \mathscr{D}(R^{2n})$. Da ciò, in virtù della continuità del funzionale $f(x)\cdot g(y)$ su $\mathscr{D}(R^{2n})$ (si veda il § 7.1), si ottiene

$$(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\ \varphi_\nu(x+y)) \to 0,\quad \nu \to \infty.$$

il che dimostra la continuità dei funzionali (18) su $\mathscr{D}(R^n)$.

Osserviamo che, poiché $\varphi(x+y)$ non appartiene a $\mathscr{D}(R^{2n})$ (questa funzione non è finita in R^{2n}!), il secondo membro dell'uguaglianza (17) esiste non per tutte le coppie di funzioni generalizzate f e g e, quindi, la convoluzione non sempre esiste.

Esempio. *La convoluzione di ogni funzione generalizzata f con la funzione delta esiste ed è uguale a f:*

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Infatti, sia $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ e sia $\{\eta_k\}$ una qualunque successione di funzioni appartenenti a $\mathscr{D}(R^{2n})$ convergente all'unità in R^{2n}. Si ha allora $\eta_k(x;\ 0)\ \varphi(x) \to \varphi(x)$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}(R^n)$ e per questa ragione

$$\lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot\delta(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (f(x),\ \eta_k(x;\ 0)\,\varphi(x)) = (f,\ \varphi).$$

Da ciò, in virtù della definizione (17), segue che le convoluzioni $f * \delta$ e $\delta * f$ esistono e sono uguali a f, come si voleva dimostrare.

Osservazione. Il significato della formula $f = f * \delta$ consiste nel fatto che ogni funzione generalizzata f può essere sviluppata in termini delle funzioni delta che si scrive spesso nella forma:

$$f(x) = \int f(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi.$$

È precisamente questa formula che va presa in considerazione nel caso in cui si dice che ogni corpo materiale è composto di masse puntiformi, ogni sorgente consiste di sorgenti puntiformi ecc.

5. Proprietà della convoluzione.

a) L i n e a r i t à d e l l a c o n v o l u z i o n e. *La convoluzione $f * g$ è un'operazione lineare da $\mathscr{D}'$ in $\mathscr{D}'$ rispetto a f e g separatamente, per esempio*

$$(\lambda f + \mu f_1) * g = \lambda (f * g) + \mu (f_1 * g), \quad f, f_1, g \in \mathscr{D}',$$

a condizione che le convoluzioni $f * g$ e $f_1 * g$ esistano.

Questa proprietà della convoluzione segue direttamente dalla definizione (17) e dalla linearità del prodotto diretto $f(x) \cdot g(y)$ rispetto a f e g separatamente (si veda la proprietà *a*) del § 7.3).

Notiamo di passaggio che, in generale, la convoluzione $f*g$ non è un'operazione continua da $\mathscr{D}'$ in $\mathscr{D}'$ rispetto a f o g, per esempio, $\delta(x-k) \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'(R^1)$, ma

$$1 * \delta(x-k) = 1 \not\to 0, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}'(R^1).$$

b) C o m m u t a t i v i t à d e l l a c o n v o l u z i o n e. *Se la convoluzione $f * g$ esiste, esiste anche la convoluzione $g * f$ e queste convoluzioni sono uguali:*

$$f * g = g * f. \tag{19}$$

Quest'asserzione deriva dalla definizione della convoluzione e dalla commutatività del prodotto diretto (si veda il § 7.2):

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y) \varphi(x+y)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (g(y) \cdot f(x), \eta_k(x; y) \varphi(x+y)) = (g * f, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

c) D e r i v a z i o n e d e l l a c o n v o l u z i o n e. *Se la convoluzione $f * g$ esiste, esistono anche le convoluzioni $D^\alpha f * g$ e $f * D^\alpha g$ ed inoltre*

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g. \tag{20}$$

È sufficiente dimostrare quest'asserzione per ogni derivata prima D_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Supponiamo che $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ e che $\eta_k(x; y)$, $k = 1, 2, \ldots$, sia una successione arbitraria di funzioni appartenenti a $\mathscr{D}(R^{2n})$ convergente all'unità in R^{2n}. In questo caso anche la successione di funzioni $\eta_k + \partial\eta_k/\partial x_j$, $k = 1, 2, \ldots$, appartenenti a $\mathscr{D}(R^{2n})$ converge anch'essa all'unità in R^{2n}. Da ciò, utilizzando l'esistenza della convoluzione $f * g$ (si veda il § 7.4), si ottiene la seguente catena di uguaglianze:

$$\Big((D_j (f * g), \varphi) = -(f * g, D_j \varphi) =$$
$$= -\lim_{k\to\infty} \Big(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y) \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j}\Big) =$$
$$= -\lim_{k\to\infty} \Big(f(x) \cdot g(y), \frac{\partial [\eta_k \varphi(x+y)]}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \varphi(x+y)\Big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} [f(x) \cdot g(y)], \eta_k \varphi(x+y)\Big) +$$

$$\dotplus \lim_{k\to\infty} \left(f(x)\cdot g(y),\ \left(\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\right)\varphi(x+y)\right) -$$

$$- \lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot g(y),\ \eta_k \varphi(x+y)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (D_j f(x)\cdot g(y),\ \eta_k \varphi(x+y)) + (f * g,\ \varphi) - (f * g,\ \varphi) = (D_j f * g,\ \varphi),$$

da cui deriva la prima uguaglianza (20) per D_j. La seconda uguaglianza (20) segue dalla prima e dalla commutatività della convoluzione (si veda la proprietà *b*)):

$$D_j (f * g) = D_j (g * f) = D_j g * f = f * D_j g.$$

Dalle uguaglianze (20) derivano le seguenti uguaglianze:

$$D^\alpha f = D^\alpha \delta * f = \delta * D^\alpha f, \quad f \in \mathscr{D}'. \tag{21}$$

Osserviamo che l'esistenza delle convoluzioni $D^\alpha f * g$ e $f * D^\alpha g$, $|\alpha| \geqslant 1$, non è sufficiente per l'esistenza della convoluzione $f * g$ e per la validità dell'uguaglianza $D^\alpha f * g = f * D^\alpha g$, per esempio, $\theta' * 1 = \delta * 1 = 1$, ma $\theta * 1' = \theta * 0 = 0$. In altre parole, l'operazione di convoluzione non è, in generale, associativa:

$$(\theta * \delta') * 1 = \theta' * 1 = 1, \quad \text{ma} \quad \theta * (\delta' * 1) = \theta * 0 = 0.$$

d) Spostamento della convoluzione. *Se la convoluzione $f * g$ esiste, esiste anche la convoluzione $f(x + h) * g(x)$ ed inoltre*

$$f(x + h) * g(x) = (f * g)(x + h), \quad h \in R^n, \tag{22}$$

cioè le operazioni di spostamento e di convoluzione commutano.

Infatti, sia $\eta_k(x; y)$, $k = 1, 2, \ldots$, una qualunque successione di funzioni da $\mathscr{D}(R^{2n})$ convergente all'unità in R^{2n}. Allora, per ogni $h \in R^n$, la successione $\eta_k(x - h; y)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge all'unità in R^{2n}. Ora, utilizzando le definizioni dello spostamento (si veda il § 5.9) e della convoluzione (si veda il § 7.4), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$

$$((f * g)(x + h), \varphi) = (f * g,\ \varphi(x - h)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x-h;\ y)\varphi(x-h+y)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (f(x + h)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\varphi(x+y)) =$$

$$= (f(x + h) * g(x),\ \varphi),$$

come si voleva dimostrare. Qui abbiamo utilizzato la formula (13) per lo spostamento del prodotto diretto.

6. Esistenza della convoluzione. Stabiliamo alcune condizioni sufficienti (oltre a quelle menzionate nel § 7.4) per le quali la convoluzione esiste definitivamente in $\mathscr{D}'$.

Teorema. *Siano f e g le funzioni generalizzate arbitraria e finita, rispettivamente. Allora la convoluzione $f * g$ esiste in $\mathscr{D}'$ ed è rappresentata nella forma*

$$(f * g,\ \varphi) = (f(x) \cdot g(y),\ \eta(y)\,\varphi(x+y)),\quad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{23}$$

dove η è una qualunque funzione fondamentale uguale all'unità negli intorni di supp g. Inoltre, la convoluzione è continua rispetto a f e g separatamente: 1) *se $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$, si ha $f_k * g \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$;* 2) *se $g_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$ e* supp $g_k \subset U_R$ *per un certo R si ha $f * g_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$.*

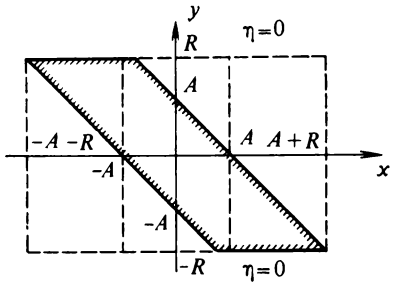


Fig. 34.

Dimostrazione. Sia supp $g \subset U_R$ e sia η una funzione appartenente a $\mathscr{D}(R^n)$, uguale all'unità negli intorni di supp g, e sia supp $\eta \subset U_R$. (Secondo il lemma 1 del § 5.2 queste funzioni esistono.) Siano, inoltre, φ una funzione arbitraria appartenente a $\mathscr{D}(R^n)$, supp $\varphi \subset U_A$, e $\eta_k(x; y)$, $k = 1, 2, \ldots$, una successione di funzioni appartenenti a $\mathscr{D}(R^{2n})$ convergente all'unità in R^{2n} (si veda il § 7.4). Allora, per tutti i valori di k sufficientemente grandi, si ha

$$\eta(y)\ \eta_k(x;,\ y)\ \varphi(x+y) = \eta(y)\ \varphi(x+y). \tag{24}$$

Per dimostrare l'uguaglianza (24) è sufficiente stabilire che la funzione $\eta(y)\ \varphi(x+y)$ appartiene a $\mathscr{D}(R^{2n})$. Ma ciò segue dal fatto che questa funzione è infinitamente derivabile ed il suo supporto è contenuto in un insieme limitato (fig. 34)

$$[(x,\ y):\ |x+y| \leqslant A,\ |y| \leqslant R] \subset \overline{U}_{A+R} \times \overline{U}_R.$$

Tenendo conto della relazione (24) e dell'uguaglianza $g = \eta g$ (si veda la formula (8) del § 5.10), validità della formula (23) è evidente:

$$\begin{aligned}(f * g,\ \varphi) &= \lim_{k\to\infty} (f(x) \cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)) = \\ &= \lim_{k\to\infty} (f(x) \cdot \eta(y)\, g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)) = \\ &= \lim_{k\to\infty} (f(x) \cdot g(y),\ \eta(y)\,\eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)) = \\ &= (f(x) \cdot g(y),\ \eta(y)\,\varphi(x+y)),\quad \varphi \in \mathscr{D}.\end{aligned}$$

La continuità della convoluzione $f * g$ rispetto a f e g deriva dalla rappresentazione (23) e dalla continuità del prodotto diretto $f(x) \cdot g(y)$ rispetto a f e g separatamente (si veda la proprietà a) del 7.3). Con ciò nel caso 2) la condizione supp $g_k \subset U_R$ fornisce la

possibilità di scegliere la funzione ausiliaria η che non dipende dal valore di k. Il teorema è dimostrato.

7. Algebra di convoluzione $\mathscr{D}'_+$ delle funzioni generalizzate. L'insieme di funzioni generalizzate appartenenti a $\mathscr{D}'(R^1)$ che si annullano per $t < 0$ è denotato con $\mathscr{D}'_+$.

Teorema. *Se $f \in \mathscr{D}'_+$ e $g \in \mathscr{D}'_+$, allora la loro convoluzione $f * g$ esiste in $\mathscr{D}'_+$ ed è rappresentata nella forma*

$$(f * g,\ \varphi) = (f(t) \cdot g(\tau),\ \eta_1(t)\eta_2(\tau)\ \varphi(t+\tau)),\ \varphi \in \mathscr{D}(R^1), \qquad (25)$$

dove $\eta_1(t)$ e $\eta_2(\tau)$ sono qualunque funzioni appartenenti alla classe $C^\infty(R^1)$ uguali all'unità negli intorni del semiasse $[0, \infty)$ e a 0 per

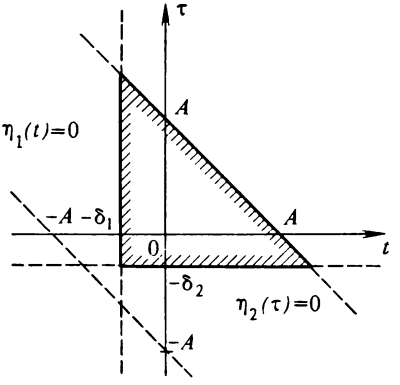


Fig. 35.

i valori negativi di t sufficientemente grandi (in valore assoluto). Qui la convoluzione è continua rispetto a f e g separatamente, per esempio: se $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$ e $f_k \in \mathscr{D}'_+$, si ha $f_k * g \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi(t)$ sia una qualunque funzione appartenente a $\mathscr{D}(R^1)$ ed inoltre supp $\varphi \subset (-A, A)$, e che $\eta_k(t; \tau)$, $k = 1, 2, \ldots$, sia una qualunque successione di funzioni da $\mathscr{D}(R^2)$ convergente all'unità in R^2 (si veda il § 7.4). Supponiamo anche che $\eta_i(t)$, $i = 1, 2$, siano funzioni arbitrarie che possiedono le proprietà menzionate nel teorema, ed inoltre $\eta_i(t) = 0$ per $t < -\delta_i$; si può ammettere che $A > \delta_1$ ed $A > \delta_2$. Allora, per tutti i k sufficientemente grandi, è valida l'uguaglianza

$$\eta_1(t)\ \eta_2(\tau)\ \eta_k(t; \tau)\ \varphi(t+\tau) = \eta_1(t)\ \eta_2(\tau)\ \varphi(t+\tau). \qquad (26)$$

Per dimostrare l'uguaglianza (26) è sufficiente stabilire che la funzione $\eta_1(t)\ \eta_2(\tau)\ \varphi(t+\tau) \in \mathscr{D}(R^2)$. Ma ciò segue dal fatto che questa funzione è infinitamente derivabile, mentre l'insieme

$$[(t, \tau):\ t \geqslant -\delta_1,\quad \tau \geqslant -\delta_2,\ |\ t+\tau\ | \leqslant A],$$

che contiene il suo supporto, è limitato in R^2 (fig. 35).

Quindi, per costruzione sia $\eta_1(t)$ che $\eta_2(\tau)$ sono uguali all'unità negli intorni di supp $f(t)$ e supp $g(\tau)$ rispettivamente. Di conseguenza, conformemente alla formula (8) del § 5.10 si ha

$$f(t) = \eta_1(t) f(t), \qquad g(\tau) = \eta_2(\tau)\, g(\tau).$$

Considerando queste uguaglianze e l'uguaglianza (26), si vede che la convoluzione $f * g$ in $\mathscr{D}'(R^1)$ esiste e la formula (25) è valida:

$$\begin{aligned}(f * g,\ \varphi) &= \lim_{k\to\infty} (f(t)\cdot g(\tau),\ \eta_k(t;\tau)\ \varphi(t+\tau)) = \\ &= \lim_{k\to\infty} (\eta_1(t) f(t)\cdot \eta_2(\tau) g(\tau),\ \eta_k(t;\tau)\ \varphi(t+\tau)) = \\ &= \lim_{k\to\infty} (f(t)\cdot g(\tau),\ \eta_1(t)\eta_2(\tau)\eta_k(t;\tau)\ \varphi(t+\tau)) = \\ &= (f(t)\cdot g(\tau),\ \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)).\end{aligned}$$

Dimostriamo che $f * g = 0$ per $t < 0$, cioè che $f * g$ appartiene a $\mathscr{D}'_+$. Supponiamo che $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ e che supp $\varphi \subset [t < 0]$. Visto che supp φ è un compatto in R^1, in virtù del lemma di Heine-Borel (si veda il § 1.1), si ha supp $\varphi \subset [t < -\varepsilon]$ per ε positivo. Ma allora, scegliendo le funzioni ausiliarie $\eta_1(t)$ e $\eta_2(\tau)$ uguali a zero per $t < -\varepsilon/2$, si ottiene $\eta_1(t)\,\eta_2(\tau)\,\varphi(t+\tau) = 0$ in R^2, da cui e dalla rappresentazione (25) segue che $(f * g,\ \varphi) = (f(t)\cdot g(\tau),\ 0) = 0$, come si voleva dimostrare, (si veda il § 5.5).

La continuità della convoluzione $f * g$ rispetto a f e g separatamente segue dalla rappresentazione (25) e dalla continuità del prodotto diretto $f(t)\cdot g(\tau)$ rispetto a f e g separatamente (si veda la proprietà *a*) del § 7.3). In questo caso le funzioni ausiliarie η_1 o η_2 si possono scegliere indipendenti da f_k o g_k, rispettivamente. Il teorema è dimostrato.

Corollario. *La convoluzione delle funzioni generalizzate appartenenti a* $\mathscr{D}'_+$ *è associativa (e commutativa)*:

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3 = f_2 * (f_1 * f_3). \tag{27}$$

Infatti, supponiamo che la funzione ausiliaria $\eta(t)$ soddisfi le condizioni del teorema; allora, in virtù della rappresentazione (23), per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ avremo

$$\begin{aligned}(f_1 * (f_2 * f_3),\ \varphi) &= (f_1(t)\cdot (f_2 * f_3)(\tau),\ \eta(t)\,\eta(\tau)\ \varphi(t + \\ &+ \tau)) = ((f_2 * f_3)(\tau),\ (f_1(t),\ \eta(t)\,\eta(\tau)\ \varphi(t+\tau))) = \\ &= (f_2(\tau)\cdot f_3(\tau'),\ \eta(\tau)\,\eta(\tau')\,(f_1(t),\ \eta(t)\,\eta(\tau + \\ &+ \tau')\,\varphi(t+\tau+\tau'))) = ([f_2(\tau)\cdot f_3(\tau')]\cdot f_1(t), \\ &\eta(\tau)\,\eta(\tau')\,\eta(t)\,\eta(\tau+\tau')\,\varphi(t+\tau+\tau')).\end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato il lemma del § 7.1 in base al quale si ha

$$(f_1(t),\ \eta(t)\,\eta(\tau)\,\varphi(t+\tau) \in \mathscr{D}(R^1).$$

Tenendo conto dell'uguaglianza

$$[(f_2(\tau)\cdot f_3(\tau')]\,\eta(\tau)\,\eta(\tau')\,\eta(\tau+\tau') = [f_2(\tau)\cdot f_3(\tau')]\,\eta(\tau)\,\eta(\tau')$$

(si veda la formula (8) del § 5.10), continuiamo la nostra catena di uguaglianze:

$$(f_1 * (f_2 * f_3),\ \varphi) = ([f_2(\tau)\cdot f_3(\tau')]\cdot f_1(t),\ \eta(t)\eta(\tau)\eta(\tau')\,\varphi(t+\tau+\tau')).$$

Permutando f_1, f_2, e f_3 nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando la commutatività (si veda il § 7.2) e l'associatività (vi veda la proprietà *b*) del § 7.3) del prodotto diretto, ci convinciamo della validità delle uguaglianze (27).

Definizione. Un insieme lineare $\mathcal{A}$ è detto *algebra* se, su questo insieme, è definita l'operazione di moltiplicazione lineare rispetto ad ogni fattore separatamente. L'algebra $\mathcal{A}$ è detta *associativa* se si ha sempre $x\,(yz) = (xy)\,z$; essa è detta *commutativa* se si ha sempre $xy = yx$.

Il teorema ed il suo corrollario dimostrati in questa sezione affermano che $\mathscr{D}'_+$ forma le algebre associativa e commutativa se per l'operazione di moltiplicazione si prende l'operazione di convoluzione $*$; $\mathscr{D}'_+$ è detta *algebra di convoluzione*. L'elemento unità, 1, è la funzione delta poiché $\delta * f = f$.

8. **Equazioni nell'algebra di convoluzione $\mathscr{D}'_+$.** Nell'algebra $\mathscr{D}'_+$ consideriamo l'equazione

$$a * u = f, \tag{28}$$

dove a e f sono funzioni generalizzate note ed u è una funzione generalizzata ignota tutte prese in $\mathscr{D}'_+$. La soluzione dell'equazione (28) per $f = \delta$, se esiste, è detta *soluzione fondamentale dell'operatore di convoluzione* $a*$ e viene denotata con a^{-1}. In altre parole, a^{-1} è l'elemento inverso di a nell'algebra $\mathscr{D}'_+$, $a * a^{-1} = \delta$.

Teorema. *Se a^{-1} esiste in $\mathscr{D}'_+$, per qualunque f appartenente a $\mathscr{D}'_+$, la soluzione dell'equazione* (28) *in $\mathscr{D}'_+$ esiste, è unica ed è espressa con la seguente formula*:

$$u = a^{-1} * f. \tag{29}$$

Infatti, la convoluzione $a^{-1} * f$ appartiene a $\mathscr{D}'_+$ e soddisfa l'equazione (28):

$$a * (a^{-1} * f) = (a * a^{-1}) * f = \delta * f = f.$$

Visto che l'equazione omogenea $a * u_0 = 0$ che corrisponde all'equazione (28) ha in $\mathscr{D}'_+$ una sola soluzione nulla, cioè

$$a^{-1} * (a * u_0) = (a^{-1} * a) * u_0 = \delta * u_0 = u_0 = a^{-1} * 0 = 0,$$

la soluzione dell'equazione (28) in $\mathscr{D}'_+$ è unica (si veda il § 1.11).

Il teorema dimostrato riduce il problema di risoluzione dell'equiazione (28), per un f *arbitraria* appartenente a $\mathscr{D}'_+$ al problema di una soluzione per una f *definita*, $f = \delta$, cioè alla definizione di a^{-1}.

La seguente proposizione è molto utile per costruire soluzioni fondamentali nell'algebra $\mathscr{D}'_+$: *se* a_1^{-1} *ed* a_2^{-1} *esistono in* $\mathscr{D}'_+$, *si ha allora*

$$(a_1 * a_2)^{-1} = a_1^{-1} * a_2^{-1}. \tag{30}$$

Infatti,

$$(a_1 * a_2) * (a_1^{-1} * a_2^{-1}) = (a_2 * a_1) * (a_1^{-1} * a_2^{-1}) = a_2 * (a_1 * (a_1^{-1} * a_2^{-1})) =$$
$$= a_2 * ((a_1 * a_1^{-1}) * a_2^{-1}) = a_2 * (\delta * a_2^{-1}) = a_2 * a_2^{-1} = \delta.$$

Nel § 10, utilizzando i metodi della teoria delle funzioni ad una variabile complessa, costruiremo un calcolo operazionale su una certa sottalgebra dell'algebra $\mathscr{D}'_+$. Qui ci limitiamo a definire (nell'algebra $\mathscr{D}'_+$) gli operatori di derivazione e d'integrazione frazionale.

Introduciamo una funzione generalizzata f_α che appartiene a $\mathscr{D}'_+$ e dipende da un parametro reale α:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x)}{\Gamma(a)}\, x^{\alpha-1}, & \alpha > 0, \\ f'_{\alpha+1}, & \alpha \leqslant 0. \end{cases}$$

Verifichiamo che

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}. \tag{31}$$

Infatti, se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, si ha (si veda il § 7.4)

$$f_\alpha * f_\beta = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}\, dy =$$

$$= \frac{\theta(x)\, x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt =$$

$$= \frac{\theta(x)\, x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, B(\alpha, \beta) = \frac{\theta(x)\, x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = f_{\alpha+\beta}.$$

Se, invece, $\alpha \leqslant 0$ o $\beta \leqslant 0$, allora, scegliendo gli interi $m > -\alpha$ e $n > -\beta$, si ottiene

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+m}^{(m)} * f_{\beta+n}^{(n)} = (f_{\alpha+m} * f_{\beta+n})^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta+m+n}^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta},$$

come si voleva dimostrare.

Consideriamo l'operatore di convoluzione $f_\alpha *$ nell'algebra $\mathscr{D}'_+$. Essendo $f_0 = \delta$, dalla (31) segue che la soluzione fondamentale f_α^{-1} dell'operatore $f_\alpha *$ esiste ed è uguale a $f_{-\alpha}$: $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$. Poi, per $n < 0$ intero si ha $f_n = \delta^{(n)}$ e perciò $f_n * u = \delta^{(n)} * u = u^{(n)}$, cioè l'operatore $f_n *$ è l'operatore di derivazione n-multipla. Infine, per

$n > 0$ intero si ha

$$(f_n * u)^{(n)} = f_{-n} * (f_n * u) = (f_{-n} * f_n) * u = \delta * u = u,$$

cioè $f_n * u$ è la primitiva di ordine n della funzione generalizzata u (si veda il § 6.3). Perciò l'operatore $f_\alpha *$ è detto operatore *di derivazione frazionale per* $\alpha < 0$ e *d'integrazione frazionale per* $\alpha > 0$ (*quest'operatore* è anche detto *operatore di Riemann-Liouville*).

9. Regolarizzazione delle funzioni generalizzate. Siano f una funzione generalizzata e ψ una funzione fondamentale. Essendo ψ finita, la convoluzione $f * \psi$ esiste conformemente al teorema del § 7.6.

Dimostriamo che

$$f * \psi = (f(y),\ \psi(x - y)) \in C^\infty(R^n). \tag{32}$$

Infatti, in virtù della (23) per tutte le $\psi \in \mathscr{D}$, abbiamo

$$(f * \psi,\ \varphi) = (f(y) \cdot \psi(\xi),\ \eta(\xi)\varphi(y+\xi)) =$$

$$= \left(f(y),\ \int \psi(\xi)\eta(\xi)\varphi(y+\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= \left(f(y),\ \int \psi(\xi)\varphi(y+\xi)\,d\xi\right) = \left(f(y),\ \int \varphi(x)\psi(x-y)\,dx\right).$$

dove la funzione ausiliaria η appartiene a $\mathscr{D}$ ed è uguale all'unità in un intorno di supp ψ. Notando ora che la funzione $\varphi(x)\psi(x-y)$ appartiene a $\mathscr{D}(R^{2n})$ ed utilizzando l'uguaglianza (14), otteniamo l'uguaglianza (32):

$$(f * \psi,\ \varphi) = \int \varphi(x)(f(y), \psi(x-y))\,dx = ((f(y),\ \psi(x-y)), \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

La derivabilità infinita del secondo membro dell'uguaglianza (32) è stabilita come nella dimostrazione del lemma del § 7.1.

Sia $\omega_\varepsilon(x)$ la « campana » (si veda il § 5.2). Allora la funzione infinitamente derivabile

$$f_\varepsilon(x) = f * \omega_\varepsilon = (f(y),\ \omega_\varepsilon(x - y))$$

è detta *regolarizzazione* della funzione generalizzata f.

Nel § 5.7 è stato dimostrato che $\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ per $\varepsilon \to +0$ in $\mathscr{D}'$. Da ciò, utilizzando la continuità della convoluzione $f * \omega_\varepsilon$ rispetto a ω_ε (si veda il teorema del § 7.6), si ottiene

$$f_\varepsilon(x) \to f(x),\ \varepsilon \to +0 \text{ in } \mathscr{D}'. \tag{33}$$

Quindi, ogni funzione generalizzata è un limite debole delle sue regolarizzazioni.

Utilizzando quest'enunciato, stabiliamo il risultato più forte.

Teorema. *Ogni funzione generalizzata f è un limite debole di funzioni fondamentali, cioè l'insieme $\mathscr{D}$ è denso in $\mathscr{D}'$.*

Dimostrazione. Sia $f_\varepsilon(x)$ una regolarizzazione di f e sia $\eta_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to +0$, una successione di funzioni fondamentali uguali all'unità nella sfera $U_{1/\varepsilon}$. Allora, la successione di funzioni fondamentali $\eta_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x)$ tende a f in $\mathscr{D}'$ per $\varepsilon \to +0$ poiché, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$, in virtù della (33), abbiamo

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (\eta_\varepsilon f_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} (f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} (f_\varepsilon, \varphi) = (f, \varphi),$$

come si voleva dimostrare.

Osservazione. Dalla completezza dello spazio $\mathscr{D}'$ (si veda il § 5.4) deriva l'asserzione inversa al teorema, e cioè: ogni limite debole di funzioni localmente integrabili è una funzione generalizzata appartenente a $\mathscr{D}'$. Per questa ragione si può costruire una teoria delle funzioni generalizzate a partire da successioni debolmente convergenti di funzioni ordinarie. A proposito di questo metodo si veda Antosik, Mikusinskij e Sikorskij [1].

10. Esempi di convoluzioni. Potenziale di Newton. a) Sia $f(x)$ una funzione continua in $R^n \setminus \{0\}$ con una singolarità integrabile in 0 e sia $\mu\delta_S(x)$ uno strato semplice su una superficie regolare a tratti limitata S con densità continua μ (si veda il § 5.7).

La loro convoluzione $f * \mu\delta_S$, funzione localmente integrabile in R^n, è espressa con il seguente integrale:

$$f * \mu\delta_S = \int_S \mu(y) f(x-y)\, dS_y. \tag{34}$$

Quest'asserzione deriva dalla rappresentazione (23):

$$\begin{aligned}(f * \mu\delta_S, \varphi) &= (\mu\delta_S(y) \cdot f(\xi), \eta(y) \varphi(y+\xi)) = \\ &= (\mu\delta_S(y), \eta(y)(f(\xi), \varphi(y+\xi))) = \\ &= \int_S \mu(y) \eta(y) \int f(\xi) \varphi(y+\xi)\, d\xi\, dS_y = \\ &= \int_S \mu(y) \int f(x-y) \varphi(x)\, dx\, dS_y = \\ &= \int \varphi(x) \int_S \mu(y) f(x-y)\, dS_y\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}.\end{aligned}$$

b) Sia ρ una funzione generalizzata. La convoluzione

$$V_n = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho, \quad n \geqslant 3, \quad V_2 = \ln \frac{1}{|x|} * \rho, \quad n = 2, \tag{35}$$

è detta *potenziale di Newton* con densità ρ (per $n = 2$ si dice *potenziale logaritmico*).

Se ρ è una funzione generalizzata finita, il potenziale V_n esiste in $\mathscr{D}'$ e soddisfa l'equazione di Poisson

$$\Delta V_n = -(n-2)\, \sigma_n \rho, \quad n \geqslant 3; \quad \Delta V_2 = -2\pi\rho, \quad n = 2. \tag{36}$$

L'esistenza del potenziale V_n deriva dal teorema del § 7.6. Utilizzando la (20) del § 7.5 e la (33) del § 6.6, concludiamo che per $n \geqslant 3$ il potenziale V_n soddisfa l'equazione di Poisson (36):

$$\Delta V_n = \Delta\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho\right) = \Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho =$$

$$= -(n-2)\,\sigma_n \delta * \rho = -(n-2)\,\sigma_n \rho;$$

in modo analogo procediamo nel caso con $n = 2$.

c) Se ρ è una funzione integrabile finita (assolutamente) su R^n, il corrispondente potenziale di Newton (logaritmico) V_n è detto *potenziale di volume* (*di area*).

Il potenziale di volume V_n è una funzione localmente integrabile in R^n ed è espressa come segue:

$$V_n(x) = \int \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy, \quad n \geqslant 3;$$
$$V_2(x) = \int \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|}\,dy, \quad n = 2. \tag{37}$$

Quest'asserzione segue dalla formula (15) per la convoluzione di una funzione integrabile finita ρ con una funzione localmente integrabile $|x|^{2-n}$, $n \geqslant 3$, e $-\ln|x|$, $n = 2$.

d) Sia S una superficie regolare a tratti, limitata, a due faccie con una normale fissa $\boldsymbol{n}$ e siano μ e ν funzioni continue su S. Siano inoltre

$$\mu\delta_S \text{ e } -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu\delta_S)$$

gli strati semplice e doppio su S con densità superficiale μ e ν (si veda il § 5.7 e l'esempio *a*) del § 6.5). I potenziali newtoniani (logaritmici) generati da questi strati

$$V_n^{(0)} = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu\delta_S, \quad n \geqslant 3; \quad V_2^{(0)} = \ln\frac{1}{|x|} * \mu\delta_S, \quad n = 2; \tag{38}$$

$$V_n^{(1)} = -\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu\delta_S), \quad n \geqslant 3;$$
$$V_2^{(1)} = -\ln\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu\delta_S), \quad n = 2 \tag{39}$$

sono rispettivamente detti *potenziali superficiali di strato semplice e di strato doppio* con densità μ e ν.

I potenziali superficiali $V_n^{(0)}$ e $V_n^{(1)}$ sono funzioni localmente integrabili in R^n e sono espresse con le seguenti formule:

$$V_n^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dS_y, \quad n \geqslant 3;$$

$$V_2^{(0)}(x) = \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|}\, dS_y, \quad n = 2; \tag{40}$$

$$V_n^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dS_y, \quad n \geqslant 3;$$

$$V_2^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|}\, dS_y, \quad n = 2. \tag{41}$$

Le formule (40) sono casi particolari della formula (34). Dimostriamo, per fissare le idee, la validità della formula (41) per il potenziale $V_n^{(1)}$, $n \geqslant 3$. Utilizzando la rappresentazione (23) per la convoluzione e la definizione di un doppio strato, si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
(V_n^{(1)}, \varphi) &= -\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu \delta_S), \varphi\right) = \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial n}(\nu \delta_S(y)) \cdot \frac{1}{|\xi|^{n-2}}, \eta(y)\varphi(y+\xi)\right) = \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial n}(\nu \delta_S(y)), \eta(y)\left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}}, \varphi(y+\xi)\right)\right) = \\
&= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n}\left[\eta(y) \int \frac{\varphi(y+\xi)}{|\xi|^{n-2}}\, d\xi\right] dS_y = \\
&= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n} \int \frac{\varphi(x)}{|x-y|^{n-2}}\, dx\, dS_y = \\
&= \int_S \nu(y) \int \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dx\, dS_y = \\
&= \int \varphi(x) \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dS_y\, dx,
\end{aligned}$$

da cui segue la formula richiesta (41).

La derivazione sotto il segno d'integrale è assicurata dal teorema del § 1.6 e la modifica dell'ordine d'integrazione dal teorema di Fubini (si veda il § 1.4, proprietà h)) in base all'esistenza dell'integrale iterato

$$\int_S |\nu(y)| \int |\varphi(x)| \left|\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right| dx\, dS_y.$$

11. Esrecizi. a) Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\frac{\partial^n [\theta(x_1) \ldots \theta(x_n)]}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = \delta(x_1) \ldots \delta(x_n) = \delta(x).$$

b) Dimostrare che supp $[f(x)\cdot g(y)] = \text{supp } f \times \text{supp } g$.

c) Dimostrare che, affinché una funzione generalizzata $f(x)$ non dipenda da x_i, è necessario e sufficiente che $\partial f/\partial x_i = 0$.

d) Dimostrare che, affinché una funzione generalizzata non dipenda da x_i, è necessario e sufficiente che questa funzione sia invariante rispetto a tutti gli spostamenti in x_i.

e) Dimostrare che

$$\text{supp } (f*g) \subset \overline{[x:\ x = y + z,\ y \in \text{supp } f,\ z \in \text{supp } g]}.$$

f) Dimostrare che, se una funzione generalizzata f non dipende da x_i, anche la convoluzione $f*g$ possiede la stessa proprietà. (Suggerimento: utilizzare i risultati degli esercizi *c*) o *d*).)

g) Utilizzando il risultato dell'esercizio *f*), dimostrare che, se la convoluzione $f*1$ esiste, questa convoluzione è una costante.

h) Verificare le seguenti uguaglianze:

(1) $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, $f_\alpha(x) = \dfrac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{ax}$, $\alpha > 0$;

(2) $f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} e^{-x^2/2\alpha^2}$, $\alpha > 0$;

(3) $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$, $\alpha > 0$.

i) Dimostrare che

$$[*(\delta' - \lambda\delta)^k]^{-1} = *[(\delta' - \lambda\delta)^{-1}]^k = \frac{\theta(x)}{(k-1)!} x^{k-1} e^{\lambda x};$$

qui è introdotta la notazione $*f^k = f* \ldots *f$ (k volte).

j) Utilizzando la formula (31) dimostrare che la funzione

$$u(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^x \frac{g'(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi$$

è una soluzione dell'equazione integrale di Abel

$$\int_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\alpha}\, d\xi = g(x), \quad g(0) = 0, \quad g \in C^1 (x \geqslant 0),$$

$$0 < \alpha < 1.$$

k) Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$e^{ax} f * e^{ax} g = e^{ax} (f * g), \quad f,\ g \in \mathscr{D}'_+.$$

l) Dimostrare che, se $f \in \mathscr{D}'(R^1)$ e $f*\varphi \in \mathscr{D}'_+$ per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}$ $(x < 0)$, si ha allora $f \in \mathscr{D}'_+$.

m) Denotiamo con $\mathscr{E}'$ lo spazio delle funzioni generalizzate finite della seguente convergenza: $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{E}'$ se a) $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$ e b) esiste un R positivo tale che supp $f_k \subset U_R$ per tutti i $k = 1, 2, \ldots$

Dimostrare il seguente teorema: affinché un operatore L, agente da $\mathscr{E}'$ in $\mathscr{D}'$, sia rappresentato nella forma di una convoluzione, $Lf = f_0 * f$, dove $f_0 \in \mathscr{D}'$, è necessario e sufficiente che questo operatore sia lineare e continuo da $\mathscr{E}'$ in $\mathscr{D}'$ e commuti con l'operazione di spostamento (si veda il § 7.5, proprietà d)). Inoltre, l'elemento f_0 è unico e $f_0 = L\delta$.

§ 8. *Funzioni generalizzate di crescita lenta*

Uno dei metodi più efficaci di risoluzione dei problemi della fisica matematica è il metodo delle trasformate di Fourier. Nel § 9 sarà esposta la teoria della trasformata di Fourier per le cosiddette funzioni generalizzate di crescita lenta (distribuzioni rinvenute). Per questa ragione si deve prima studiare la classe delle funzioni generalizzate di crescita lenta.

1. Spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{S}$. *Riportiamo nell'insieme delle funzioni fondamentali* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ *tutte le funzioni della classe* $C^\infty(R^n)$ *decrescenti, per* $|x| \to \infty$, *con tutte le derivate più rapidamente di ogni potenza di* $|x|^{-1}$. Definiamo la convergenza in $\mathcal{S}$ come segue: la successione delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, da $\mathcal{S}$ converge ad una funzione $\varphi \in \mathcal{S}$, cioè $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$, se, per tutti i valori di α e β, si ha

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in R^n} x^\beta D^\alpha \varphi(x), \quad k \to \infty. \tag{1}$$

È evidente che $\mathcal{S}$ è uno spazio lineare. Inoltre, $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ e *dalla convergenza in* $\mathcal{D}$ *segue la convergenza in* $\mathcal{S}$.

Infatti, se $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{D}$, allora, visto che i supporti di φ_k sono limitati indipendentemente da k, è valida la relazione limite (1) per tutti i valori di α e β, la quale dimostra che $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$.

Ma $\mathcal{S}$ non coincide con $\mathcal{D}$; per esempio, la funzione $e^{-|x|^2}$ appartiene a $\mathcal{S}$, ma non appartiene a $\mathcal{D}$.

Tuttavia $\mathcal{D}$ è *denso* in $\mathcal{S}$, cioè, per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}$, esiste una successione $\varphi_k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, tale che $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$.

Infatti, una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{D}$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\, \eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

dove $\eta \in \mathcal{D}$ e $\eta(x) = 1$, $|x| < 1$, converge a φ in $\mathcal{S}$.

Le operazioni di derivazione $D^\beta \varphi(x)$ *e di sostituzione lineare non singolare di variabili* $\varphi(Ay + b)$ *sono continue da* $\mathcal{S}$ *in* $\mathcal{S}$. Questo segue direttamente dalla definizione di convergenza nello spazio $\mathcal{S}$.

D'altro canto, la moltiplicazione per una funzione infinitamente derivabile può far uscire all'esterno dell'insieme $\mathcal{S}$, per esempio, $e^{-|x|^2} e^{|x|^2} = 1 \notin \mathcal{S}$.

Supponiamo che una funzione $a \in C^\infty(R^n)$ cresca all'infinito insieme con tutte le derivate non più rapidamente del polinomio

$$|D^\alpha a(x)| \leqslant C_\alpha (1 + |x|)^m \alpha. \tag{2}$$

Indichiamo con θ_M l'insieme di queste funzioni.

L'operazione di moltiplicazione per una funzione $a \in \theta_M$ *è continua da* $\mathcal{S}$ *in* $\mathcal{S}$.

Infatti, dalla disuguaglianza (2) segue che, se $\varphi \in \mathscr{S}$, si ha $a\varphi \in \mathscr{S}$, e se $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}$, per tutti i valori di α e β si ha

$$x^\beta D^\alpha (a\varphi_k) \xrightarrow[x \in R^n]{} 0,$$

cioè $a\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}$.

2. Spazio delle funzioni generalizzate di crescita lenta $\mathscr{S}'$. *Si dice funzione generalizzata di crescita lenta ogni funzionale lineare continuo sullo spazio $\mathscr{S}$ delle funzioni fondamentali.* Denotiamo con $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(R^n)$ l'insieme di tutte le funzioni generalizzate di crescita lenta. È evidente che $\mathscr{S}'$ è un insieme lineare (cfr. il § 5.3). Definiamo come *debole* la convergenza di una successione di funzionali: una successione di funzioni generalizzate $f_1, f_2, \ldots$, appartenenti a $\mathscr{S}'$, converge ad una funzione generalizzata $f \in \mathscr{S}'$, cioè $f_k \to f$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}'$ se, per qualunque $\varphi \in \mathscr{S}$ $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$ per $k \to \infty$. L'insieme lineare $\mathscr{S}'$ dotato di convergenza è detto *spazio $\mathscr{S}'$ delle funzioni generalizzate di crescita lenta.*

Da queste definizioni segue direttamente che $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$, *e dalla convergenza in $\mathscr{S}'$ segue la convergenza in $\mathscr{D}'$.*

Infatti, se $f \in \mathscr{S}'$, si ha $f \in \mathscr{D}'$, poiché $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ e dalla convergenza in $\mathscr{D}$ segue la convergenza in $\mathscr{S}$ (si veda il § 8.1). Quindi, se $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}'$, si ha $(f_k, \varphi) \to 0$ per $k \to \infty$ per tutte le φ appartenenti a $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ e, quindi, $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'$.

Teorema (di L. Schwartz). *Affinché un funzionale lineare f su $\mathscr{S}$ appartenga a $\mathscr{S}'$ (cioè sia continuo su $\mathscr{S}$), è necessario e sufficiente che esistano numeri $C > 0$ e $p \geqslant 0$ (essendo p un intero) tali che, per qualunque $\varphi \in \mathscr{S}$, sia valida la disuguaglianza*

$$|(f, \varphi)| \leqslant C \|\varphi\|_p, \tag{3}$$

dove

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leqslant p,\ x \leqslant R^n} (1 + |x|)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Dimostrazione. Sufficienza. Supponiamo che il funzionale lineare f su $\mathscr{S}$ soddisfi la disuguaglianza (3) per certi $C > 0$ e $p \geqslant 0$. Dimostriamo che $f \in \mathscr{S}'$. Sia $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}$. Si ha allora $\|\varphi_k\|_p \to 0$ per $k \to \infty$, e quindi $|(f, \varphi_k)| \leqslant C \|\varphi_k\|_p \to 0$ per $k \to \infty$. Ciò significa che f è un funzionale continuo su $\mathscr{S}$.

Necessità. Sia $f \in \mathscr{S}'$. Dimostriamo che esistono numeri $C > 0$ e $p \geqslant 0$ tali che, per qualunque $\varphi \in \mathscr{S}$, è valida la disuguaglianza (3). Supponiamo, invece, che i numeri menzionati C e p non esistano. Allora esiste una successione di funzioni φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, appartenenti a $\mathscr{S}$, tali che

$$|(f, \varphi_k)| \geqslant k \|\varphi_k\|_k. \tag{4}$$

La successione di funzioni

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

tende a 0 in $\mathscr{S}$, poiché per $k \geqslant |\alpha|$ e $k \geqslant |\beta|$ si ha

$$|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)| = \frac{|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)|}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Da ciò e dalla continuità del funzionale f su $\mathscr{S}$ segue che $(f, \psi_k) \to 0$ per $k \to \infty$. D'altro canto, la disuguaglianza (4) dà

$$|(f, \psi_k)| = \frac{1}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k} |(f, \varphi_k)| \geqslant \sqrt{k}.$$

La contraddizione ottenuta dimostra il teorema.

Il significato del teorema dimostrato consiste nel fatto che ogni funzione generalizzata di crescita lenta è un funzionale continuo rispetto ad una certa norma $\|\ \|_p$ (come si è soliti dire, ha *un ordine finito*).

3. Esempi di funzioni generalizzate di crescita lenta.

a) *Se $f(x)$ è una funzione localmente integrabile di crescita lenta all'infinito, cioè per un certo $m \geqslant 0$:*

$$\int |f(x)|\,(1 + |x|)^{-m}\,dx < \infty,$$

questa funzione definisce un funzionale regolare f appartenente a $\mathscr{S}'$ in conformità con la formula (11) *del* § 5.6:

$$(f, \varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{5}$$

Ma non tutte le funzioni localmente integrabili definiscono una funzione generalizzata di crescita lenta, per esempio, $e^x \overline{\in} \mathscr{S}'(R^1)$.

D'altro canto, non tutte le funzioni localmente integrabili appartenenti a $\mathscr{S}'$ sono di crescita lenta. Per esempio, la funzione $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$ non è una funzione di crescita lenta, eppure definisce una funzione generalizzata da $\mathscr{S}'$ mediante la formula

$$((\cos e^x)', \varphi) = -\int \cos e^x\,\varphi'(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Osservazione. Utilizzando il teorema di Schwartz (si veda il § 8.2), si può dimostrare [1] che ogni funzione generalizzata appartenente a $\mathscr{S}'$ è una derivata di una funzione continua di crescita lenta. Ciò spiega perché $\mathscr{S}'$ è detto spazio delle funzioni generalizzate di crescita lenta.

b) *Se f è una funzione generalizzata finita appartenente a $\mathscr{D}'$,*

[1] Si veda Schwartz [2], cap. VII.

questa funzione è prolungata su $\mathscr{S}$ in un modo unico come un elemento di $\mathscr{S}'$ in conformità con la formula

$$(f, \varphi) = (f, \eta\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{6}$$

in cui $\eta \in \mathscr{D}$ ed $\eta = 1$ nell'intorno del supporto f.

Infatti, il funzionale lineare $(f, \eta\varphi)$ che figura al secondo membro dell'uguaglianza (6), è continuo su $\mathscr{S}$: se $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}$, si ha $\eta\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}$, e quindi

$$(f, \eta\varphi_k) \to 0, \quad k \to \infty.$$

L'unicità del prolungamento del funzionale f su $\mathscr{S}$ segue dalla densità di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{S}$ (si veda il § 8.1). In particolare, il prolungamento (6) non dipende dalla funzione ausiliaria η.

c) *Se $f \in \mathscr{S}'$, allora ogni derivata $D^\alpha f \in \mathscr{S}'$.*

Infatti, visto che l'operazione di derivazione $D^\alpha\varphi$ è continua da $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S}$ (si veda il § 8.1), il secondo membro dell'uguaglianza

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha\varphi)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathscr{S}$ (cfr. il § 6.1).

d) *Se $f \in \mathscr{S}'$ e $\det A \neq 0$, si ha $f(Ay + b) \in \mathscr{S}'$.*

Infatti, dato che l'operazione di trasformazione $\varphi[A^{-1}(x - b)]$ è continua da $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S}$ (si veda il § 8.1), il secondo membro dell'uguaglianza

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathscr{S}$ (cfr. il § 5.9).

e) *Se $f \in \mathscr{S}'$, ed $a \in \theta_M$, si ha $af \in \mathscr{S}'$.*

Infatti, visto che l'operazione di moltiplicazione per una funzione a appartenente a θ_m è continua da $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S}$ (si veda il § 8.1), il secondo membro dell'uguaglianza

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathscr{S}$ (cfr. il § 5.10).

4. Struttura delle funzioni generalizzate a supporto puntiforme.

Teorema. *Se il supporto di una funzione generalizzata f è il punto $\{0\}$, questa funzione è unicamente rappresentabile nella forma*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} C_\alpha D^\alpha \delta(x). \tag{7}$$

Dimostrazione. Visto che la funzione generalizzata f ha il supporto $\{0\}$, appartiene a $\mathscr{S}'$ (si veda il § 8.3) e, in virtù della (18) del § 5.10, per ogni $k > 0$ si ha

$$f = \eta(kx) f, \tag{8}$$

dove $\eta(x)$ è una funzione fondamentale uguale all'unità in un intorno del punto 0 ed a zero per $|x| > 1$. Inoltre, conformemente al teorema di Schwartz (si veda il § 8.2), è valida l'uguaglianza

$$(f, \varphi) \leqslant C \| \varphi \|_m, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{9}$$

per $m \geqslant 0$ e $C > 0$ indipendenti da φ.

Sia φ una funzione arbitraria appartenente a $\mathscr{D}$. Poniamo che

$$\psi_k(x) = \varphi_m(x)\,\eta(kx), \quad \varphi_m(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!}\, x^\alpha. \tag{10}$$

Applicando la disuguaglianza (9) alla funzione ψ_k ed utilizzando il fatto che

$$D^\gamma \varphi_m(x) = O(|x|^{m+1-|\gamma|}), \quad x \to 0 \; (|\gamma| \leqslant m),$$
$$D^\delta \eta(kx) = O(k^{|\delta|}), \qquad k \to \infty,$$

si ottiene

$$|(f, \psi_k)| \leqslant C \| \psi_k \|_m = C \sup_{|\beta| \leqslant m,\ x \leqslant \frac{1}{k}} (1 + |x|^m)\, D^\beta [\varphi_m(x)\,\eta(kx)]| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \max_{|\beta| \leqslant m,\ |x| \leqslant \frac{1}{k}} \sum_{|\gamma|=0}^{|\beta|} |D^\gamma \varphi_m(x)|\; |D^{\beta-\gamma} \eta(kx)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \max_{|\beta| \leqslant m} \sum_{|\gamma|=0}^{|\beta|} k^{-m-1+|\gamma|} k^{|\beta-\gamma|} = \frac{C_2}{k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Ma, in virtù della (8), (f, ψ_k) non dipende da k. Di conseguenza, in base a quanto abbiamo dimostrato, si ha

$$(f, \psi_1) = \lim_{k \to \infty} (f, \psi_k) = 0.$$

Di qui, utilizzando le (8) e (10), otteniamo la rappresentazione (7) per $k = 1$

$$(f, \varphi) = (\eta f, \varphi) = (f, \eta\varphi) = \left(f, \psi_1 + \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!}\, x^\alpha \eta(x)\right) =$$

$$= (f, \psi_1) + \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} (f, x^\alpha \eta(x)) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} C_\alpha (D^\alpha \delta, \varphi),$$

dove si è introdotta la notazione

$$C_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (f, x^\alpha \eta).$$

Dimostriamo l'unicità della rappresentazione (7). Supponiamo che

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} C'_\alpha D^\alpha \delta(x)$$

sia un'altra rappresentazione di f, di modo che

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} (C_\alpha - C'_\alpha) D^\alpha \delta(x) = 0.$$

Applicando quest'uguaglianza al monomio x^β, $|\beta| \leqslant m$, si ottiene

$$0 = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (C_\alpha - C'_\alpha)(D^\alpha \delta, x^\beta) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} (C_\alpha - C'_\alpha)(\delta, D^\alpha x^\beta) = (-1)^{|\beta|} \beta! (C_\beta - C'_\beta),$$

cioè $C_\beta = C'_\beta$. Il teorema è dimostrato.

5. Prodotto diretto delle funzioni generalizzate di crescita lenta. Siano $f(x) \in \mathcal{S}'(R^n)$ e $g(y) \in \mathcal{S}'(R^m)$. Poiché $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$, il prodotto diretto $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$ (si veda il § 7.1).

Dimostriamo che $f(x) \cdot g(y) = \mathcal{S}'(R^{n+m})$.

Per la definizione del funzionale $f(x) \cdot g(y)$ (si veda il § 7.1)

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))). \tag{11}$$

Dimostriamo che il secondo membro dell'equazione (11) è *un funzionale lineare continuo su* $\mathcal{S}(R^{n+m})$.

Per ciò, stabiliamo il seguente lemma analogo a quello del § 7.1.

Lemma. *Per qualunque* $g \in \mathcal{S}'(R^m)$ *e* $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$ *possiamo costruire una funzione* $\psi(x)$ *simile a*

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in \mathcal{S}(R^n)$$

ed è valida l'uguaglianza

$$D^\alpha \psi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)). \tag{12}$$

Inoltre, se $\varphi_k \to 0$ *per* $k \to \infty$ *in* $\mathcal{S}(R^{n+m})$, *si ha*

$$\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x, y)) \to 0, \quad k \to \infty \text{ in } \mathcal{S}(R^n). \tag{13}$$

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del lemma del § 7.1, sono stabilite la validità dell'uguaglianza (12) per tutti i valori di α e la continuità del suo secondo membro. Di conseguenza, $\psi \in C^\infty(R^n)$. Dimostriamo che $\psi \in \mathcal{S}(R^n)$. Visto che $g(y) \in \mathcal{S}'(R^m)$, e, per ogni $x \in R^n$, si ha $\varphi(x, y) \in \mathcal{S}(R^m)$, allora, conformemente al teorema di Schwartz (si veda il § 8.2) esistono numeri $C > 0$ e $p \geqslant 0$ tali che per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$, α e $x \in R^n$ è valida la disugua-

glianza

$$|(g(y),\ D_x^\alpha \varphi(x,\ y))| \leqslant C \sup_{y \in R^m,\ |\gamma| \leqslant p} (1+|y|)^p\, |D_y^\gamma D_x^\alpha \varphi(x,\ y)|.$$

Da ciò, in virtù della (12), per tutti i $x \in R^n$, si ottiene la disuguaglianza

$$|x^\beta D^\alpha \psi(x)| \leqslant C \sup_{y \in R^m,\ |\gamma| \leqslant p} (1+|y|^p)\, |x^\beta D_y^\gamma D_x^\alpha \varphi(x,\ y)|. \qquad (14)$$

Visto che $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$, dalla disuguaglianza (14) segue che $\psi \in \mathcal{S}(R^n)$.

Dimostriamo ora la relazione limite (13). Sia $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}(R^{n+m})$. Da ciò, applicando la disuguaglianza (14) alla successione φ_k, $k \to \infty$, si ottiene

$$|x^\beta D^\alpha \psi_k| \leqslant C \sup_{y \in R^m,\ |\gamma| \leqslant p} (1+|y|)^p\, |x^\beta D_y^\gamma D_x^\alpha \varphi_k| \overset{x \in R^n}{\rightrightarrows} 0, \quad k \to \infty,$$

cioè $\psi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}(R^n)$. Il lemma è dimostrato.

Dal lemma dimostrato deriva che il secondo membro dell'uguaglianza (11) uguale a $(f,\ \psi)$, dove $\psi(x) = (g(y),\ \varphi(x,\ y))$, è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}(R^{n+m})$, di modo che $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{S}'(R^{n+m})$, (cfr. il § 7.1).

Il prodotto diretto delle funzioni generalizzate di crescita lenta è commutativo ed associativo in $\mathcal{S}'$:

$$f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x),\ f(x) \cdot (g(y) \cdot h(z)) = (f(x) \cdot g(y)) \cdot h(z).$$

Queste asserzioni derivano dalle corrispondenti proprietà del prodotto diretto in $\mathcal{D}'$ (si veda il § 7.2 e la proprietà b) del § 7.3) e dal fatto che $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{S}$ (si veda il § 8.2).

In particolare, l'uguaglianza $f(x) \cdot 1(y) = 1(y) \cdot f(x)$ dove $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ significa che

$$\left(f,\ \int \varphi(x,\ y)\, dy\right) = \int (f,\ \varphi(x,\ y))\, dy, \quad \varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m}). \qquad (15)$$

Infine, *il prodotto diretto* $f(x) \cdot g(y)$ *delle funzioni generalizzate* $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ *e* $g \in \mathcal{S}'(R^m)$ *è lineare e continuo rispetto a* f (da $\mathcal{S}'(R^n)$ in $\mathcal{S}'(R^{n+m})$) *e rispetto a* g (da $\mathcal{S}'(R^m)$ in $\mathcal{S}'(R^{n+m})$).

La dimostrazione è analoga alla corrispondente dimostrazione per lo spazio $\mathcal{D}'$ (si veda il § 7.3, proprietà a)).

6. Convoluzione delle funzioni generalizzate di crescita lenta. Supponiamo che f appartenga a $\mathcal{S}'$ e che g sia una funzione generalizzata finita. Allora la convoluzione $f * g$ esiste in $\mathcal{D}'$ (si veda il § 7.5). Dimostriamo che $f * g$ *appartiene a* $\mathcal{S}'$ *ed è rappresentata nella forma*

$$(f * g,\ \varphi) = (f(x) \cdot g(y),\ \eta(y)\ \varphi(x + y)),\ \varphi \in \mathcal{S}, \qquad (16)$$

dove η *è una qualunque funzione appartenente a* $\mathscr{D}$ *uguale all'unità nell'intorno di supp g.*

Infatti, secondo il teorema del § 7.6 la formula (16) è valida sulle funzioni fondamentali φ da $\mathscr{D}$. Dimostriamo che il secondo membro dell'uguaglianza (16) definisce un funzionale lineare continuo su $\mathscr{S}$. Sia $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$. Allora, in virtù del carattere finito della funzione η, si ha $\eta(y)\varphi(x+y) \in \mathscr{S}(R^{2n})$, e poiché $f(x)\cdot g(y)$ è un funzionale lineare su $\mathscr{S}(R^{2n})$, il secondo membro della (16) è un funzionale lineare su $\mathscr{S}(R^n)$. Dimostriamo la sua continuità. Sia $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ in $\mathscr{S}$. Allora per qualunque α, β e γ si ha

$$x^\alpha y^\beta D^\gamma [\eta(y)\varphi_k(x+y)] \xrightarrow[x\in R^n,\ y\in R^n]{} 0, \quad k \to \infty,$$

e perciò

$$\eta(y)\varphi_k(x+y) \to 0, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{S}(R^{2n}).$$

Visto che $f(x)\cdot g(y) \in \mathscr{S}'(R^{2n})$ (si veda il § 8.5), ne deriva la continuità del secondo membro della (16) su $\mathscr{S}(R^n)$:

$$(f(x)\cdot g(y), \quad \eta(y)\varphi_k(x+y)) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Dunque, $f * g \in \mathscr{S}'$.

Introduciamo la notazione $\mathscr{S}'_+ = \mathscr{D}'_+ \cap \mathscr{S}'$, dove $\mathscr{D}'_+$ è un'algebra di convoluzione definita nel § 7.7. Dimostriamo che *se* f *e* g *appartengono a* $\mathscr{S}'_+$, *si ha* $f * g \in \mathscr{S}'_+$ ed *è rappresentata* nella forma

$$(f * g, \varphi) = (f(t)\cdot g(\tau), \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)), \varphi \in \mathscr{S}(R^1), \quad (17)$$

dove η_1 *e* η_2 *sono qualunque funzioni della classe* $C^\infty(R^1)$ *uguali all'unità nell'intorno di* $[0, \infty)$ *e a zero per grandi valori negativi di* t.

Infatti, secondo il teorema del § 7.7, la formula (17) è valida sulle funzioni fondamentali φ appartenenti a $\mathscr{D}(R^1)$. Dimostriamo che il secondo membro dell'uguaglianza (17) definisce un funzionale lineare continuo su $\mathscr{S}(R^1)$. Supponiamo che $\varphi \in \mathscr{S}(R^1)$. Allora, in virtù delle proprietà delle funzioni $\eta_1(t)$ e $\eta_2(\tau)$, si ha $\eta_1(t)\times$ $\times\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau) \in \mathscr{S}(R^2)$ ed il secondo membro della (17) è un funzionale lineare su $\mathscr{S}(R^1)$. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}(R^1)$. Allora, com'è stato constatato sopra, si ha

$$\eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi_k(t+\tau) \to 0, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{S}(R^2).$$

Visto che $f(t)\cdot g(\tau) \in \mathscr{S}'(R^2)$ (si veda il § 8.5); ne segue la continuità del secondo membro della (17) su $\mathscr{S}(R^1)$. Quindi, $f * g$ appartiene a $\mathscr{S}'(R^1)$.

Vediamo che l'*insieme delle funzioni generalizzate* $\mathscr{S}'_+$ *forma un'algebra di convoluzione, una sottalgebra dell'algebra* $\mathscr{D}'_+$ (si veda il § 7.7).

§ 9. *Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate di crescita lenta*

La proprietà rimarchevole della classe delle funzioni generalizzate di crescita lenta consiste nel fatto che l'operazione di trasformazione di Fourier non porta fuori dai limiti di questa classe.

1. Trasformazione di Fourier delle funzioni fondamentali appartenenti a $\mathcal{S}$. Visto che le funzioni fondamentali appartenenti a $\mathcal{S}$ sono assolutamente integrabili su R^n, su queste funzioni è definita l'operazione F di trasformazione di Fourier

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

In questo caso la funzione $F[\varphi](\xi)$ la quale rappresenta la *trasformata di Fourier della funzione* $\varphi(x)$, è limitata e continua in R^n. La funzione fondamentale $\varphi(x)$ decresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza di $|x|^{-1}$ e perciò la sua trasformata di Fourier può essere derivata sotto il segno d'integrale un numero di volte arbitrario:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (ix)^\alpha \varphi(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi), \tag{1}$$

da cui segue che $F[\varphi] \in C^\infty(R^n)$. Inoltre, possiede le stesse proprietà ogni derivata $D^\alpha\varphi$ e quindi

$$F[D^\alpha\varphi](\xi) = \int D^\alpha\varphi(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi). \tag{2}$$

Infine, dalle formule (1) e (2) si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = \xi^\beta F[(ix)^\alpha \varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta(x^\alpha\varphi)](\xi). \tag{3}$$

Dall'uguaglianza (3) segue che, per tutti gli α e β, i valori di $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ sono uniformemente limitati rispetto a $\xi \in R^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leqslant \int |D^\beta(x^\alpha\varphi)|\, dx. \tag{4}$$

Ciò vuol dire che $F[\varphi] \in \mathcal{S}$ (si veda il § 8.1). Dunque, la trasformata di Fourier trasforma lo spazio $\mathcal{S}$ in se stesso.

Notiamo che lo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni fondamentali non è trasformato in se stesso con la trasformazione di Fourier, poiché la trasformata di Fourier di una funzione finita è una funzione analitica e, quindi, non è finita o è nulla.

Visto che la trasformata di Fourier $F[\varphi]$ di una funzione φ appartenente a $\mathcal{S}$ è una funzione integrabile e continuamente derivabile su R^n, allora, come deriva dalla teoria generale della trasformazione di Fourier [1], la funzione $\varphi(x)$ è espressa in termini della sua trasformata di Fourier $F[\varphi](\xi)$ mediante l'operazione di tra-

[1] Si veda, per esempio, Kudrjavtsev [1], cap. VII.

sformazione inversa di Fourier F^{-1}:

$$\varphi(x) = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{5}$$

dove

$$F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(\xi)\, e^{-i(\xi, x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(-\xi)\, e^{i(\xi, x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)]. \tag{6}$$

Dalle formule (5) e (6) deriva che ogni funzione φ appartenente a $\mathcal{S}$ è la trasformata di Fourier della funzione $\psi = F^{-1}[\varphi]$ appartenente a $\mathcal{S}$, con $\varphi = F[\psi]$, e se $F[\varphi] = 0$, anche $\varphi = 0$. Ciò vuol dire che la *trasformazione di Fourier F trasforma $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ ed inoltre in modo univoco.*

Lemma. *Operazione di trasformazione di Fourier F è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Allora, applicando la (4) alle funzioni φ_k, si ottiene per tutti gli α e β

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| \leqslant \int |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in R^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)|\, (1+|x|)^{n+1} \int \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}},$$

da cui segue che

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k]| \overset{\xi \in R^n}{\Longrightarrow} 0, \quad k \to \infty,$$

cioè $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$ (si veda il § 8.1). Il lemma è dimostrato.

L'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1} possiede proprietà analoghe.

2. Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate appartenenti a $\mathcal{S}'$. Sia prima $f(x)$ una funzione (assolutamente) integrabile su R^n. Allora la sua trasformata di Fourier

$$F[f](\xi) = \int f(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx, \quad |F[f](\xi)| \leqslant \int |f(x)|\, dx < \infty,$$

è una funzione continua limitata in R^n e per conseguenza, definisce una funzione generalizzata appartenente a $\mathcal{S}'$:

$$(F[f], \varphi) = \int F[f](\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Utilizzando il teorema di Fubini (si veda il § 1.4, proprietà h)) sul cambiamento dell'ordine d'integrazione, trasformiamo l'ultimo integrale come segue:

$$\int F[f](\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \int \left[\int f(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx\right] \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int f(x) \int \varphi(\xi)\, e^{i(\xi, x)}\, d\xi\, dx = \int f(x)\, F[\varphi](x)\, dx,$$

cioè

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Assumiamo quest'uguaglianza come definizione di trasformata di Fourier $F[f]$ di qualunque funzione generalizzata di crescita lenta f:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad f \in \mathscr{S}', \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{7}$$

Verifichiamo che il secondo membro di quest'uguaglianza definisce un funzionale lineare continuo su $\mathscr{S}$, cioè che $F[f] \in \mathscr{S}'$. Infatti, visto che $F[\varphi] \in \mathscr{S}$ per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$ (si veda il § 9.1), $(f, F[\varphi])$ è un funzionale (evidentemente, lineare) su $\mathscr{S}$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}$. Per il lemma del § 9.1, $F[\varphi_k] \to$ $\to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}$ e quindi, in virtù del fatto che f appartiene a $\mathscr{S}'$, si ha $(f, F[\varphi_k]) \to 0$ per $k \to \infty$, di modo che il funzionale $(f, F[\varphi])$ è continuo su $\mathscr{S}$.

Dunque, l'operazione di trasformazione di Fourier F porta lo spazio $\mathscr{S}'$ in $\mathscr{S}'$.

Inoltre, *F è un'operazione lineare e continua da $\mathscr{S}'$ in $\mathscr{S}'$.*

La linearità di F è evidente. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}'$. In questo caso, in base alla (7), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Ciò significa che $F[f_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{S}'$, cioè l'operazione F è continua da $\mathscr{S}'$ in $\mathscr{S}'$.

Introduciamo in $\mathscr{S}'$ ancora un'operazione di trasformazione di Fourier che denotiamo con F^{-1}:

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \quad f \in \mathscr{S}'. \tag{8}$$

Dimostriamo che l'operazione F^{-1} è un'operazione inversa di F cioè

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f, \quad f \in \mathscr{S}'. \tag{9}$$

Infatti, dalle (5)-(8) per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$, si ottengono le ugua, glianze

$$(F^{-1}[F[f]], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f](-\xi)], \varphi) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f](-\xi), F[\varphi]) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) =$$

$$= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi),$$

dalle quali seguono le formule (9).

Dalle formule (9) deriva che ogni funzione generalizzata f appartenente a $\mathscr{S}'$ è la trasformata di Fourier della funzione generalizzata $g = F^{-1}[f]$ appartenente a $\mathscr{S}'$, con $f = F[g]$, e se $F[f] = 0$,

si ha anche $f = 0$. Abbiamo, quindi, dimostrato che le *trasformazioni di Fourier F e F^{-1} trasformano $\mathscr{S}'$ in $\mathscr{S}'$ in modo biunivoco e bicontinuo.*

Supponiamo che $f(x, y) \in \mathscr{S}'(R^{n+m})$ dove $x \in R^n$ ed $y \in R^m$. Introduciamo la trasformata di Fourier $F_x[f]$ rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ponendo per qualunque $\varphi(\xi, y) \in \mathscr{S}(R^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \tag{10}$$

Come nel lemma del § 9.1, si stabilisce che

$$F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y)\, e^{i(\xi, x)}\, d\xi \in \mathscr{S}(R^{n+m})$$

e l'operazione $F_\xi[\varphi]$ è continua da $\mathscr{S}(R^{n+m})$ in $\mathscr{S}(R^{n+m})$, di modo che la formula (10) definisce realmente una funzione generalizzata $F_x[f](\xi, y)$ appartenente a $\mathscr{S}'(R^{n+m})$.

Esempio. Dimostriamo che

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)}. \tag{11}$$

Infatti,

$$(F[\delta(x-x_0)], \varphi) = (\delta(x-x_0), F[\varphi]) = F[\varphi](x_0) =$$
$$= \int \varphi(\xi)\, e^{i(\xi, x_0)}\, d\xi = (e^{i(\xi, x_0)}, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Ponendo nella (11) $x_0 = 0$, si ottiene

$$F[\delta] = 1, \tag{12}$$

da cui

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

di modo che

$$F[1] = (2\pi)^n\, \delta(\xi). \tag{13}$$

3. Proprietà della trasformazione di Fourier.

a) Derivazione della trasformata di Fourier. Se $f \in \mathscr{S}'$, si ha

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]. \tag{14}$$

Infatti, utilizzando la (2), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$

$$(D^\alpha F[f], \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, F[D^\alpha \varphi]) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}(f, (-ix)^\alpha F[\varphi]) = ((ix)^\alpha f, F[\varphi]) =$$
$$= (F[(ix)^\alpha f], \varphi),$$

da cui segue la formula (14).

In particolare, ponendo nella (14) $f = 1$ ed utilizzando la formula (13), abbiamo

$$F[x^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi). \tag{15}$$

b) Trasformata di Fourier di una variabile. Se $f \in \mathscr{S}'$, si ha

$$F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]. \tag{16}$$

Infatti, utilizzando la formula (1), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$

$$(F[D^\alpha f], \varphi) = (D^\alpha f, F[\varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha F[\varphi]) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}(f, F[(i\xi)^\alpha \varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(F[f], (i\xi)^\alpha \varphi) =$$
$$= ((-i\xi)^\alpha F[f], \varphi),$$

da cui segue la formula (16).

In particolare, ponendo nella (16) $f = \delta$ ed utilizzando la formula (12), abbiamo

$$F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha F[\delta] = (-i\xi)^\alpha. \tag{17}$$

c) Trasformata di Fourier di una traslazione. Se $f \in \mathscr{S}'$, si ha

$$F[f(x-x_0)] = e^{i(x_0, \xi)} F[f]. \tag{18}$$

Infatti, abbiamo per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$

$$(F[f(x-x_0)], \varphi) = (f(x-x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x+x_0)) =$$
$$= (f, F[\varphi e^{i(x_0, \xi)}]) = (F[f], e^{i(x_0, \xi)}\varphi) = (e^{i(x_0, \xi)} F[f], \varphi),$$

da cui segue la formula (18).

d) Traslazione della trasformata di Fourier. Se $f \in \mathscr{S}'$, si ha

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, x)} f](\xi). \tag{19}$$

Infatti, utilizzando la formula (18), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$

$$(F[f](\xi+\xi_0), \varphi) = (F[f], \varphi(\xi-\xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi-\xi_0)]) =$$
$$= (f, e^{i(\xi_0, x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0, x)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0, x)} f], \varphi),$$

da cui segue la formula (19).

e) Trasformata di Fourier di similitudine (con riflessione). Se $f \in \mathscr{S}'$, per tutti i valori reali di $c \neq 0$ si ha

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \tag{20}$$

poiché per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$ abbiamo (si veda il § 5.9)

$$(F[f(cx)], \varphi) = \left(f(cx), F[\varphi]\right) = \frac{1}{|c|^n}\left(f, F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{|c|^n}\left(f, \int \varphi(\xi) e^{i\left(\frac{x}{c}, \xi\right)} d\xi\right) = \left(f, \int \varphi(c\xi') e^{i(x, \xi')} d\xi'\right) =$$
$$= (f, F[\varphi(c\xi)]) = (F[f], \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n}\left(F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \varphi\right).$$

f) Trasformata di Fourier del prodotto diretto. Se $f \in \mathscr{S}'(R^n)$ e $g \in \mathscr{S}'(R^m)$, si ha

$$F[f(x)\cdot g(y)] = F_x[f(x)\cdot F[g](\eta)] = \\ = F_y[F[f](\xi)\cdot g(y)] = F[f](\xi)\cdot F[g](\eta). \tag{21}$$

Infatti, per tutte le $\varphi(\xi, \eta) \in \mathscr{S}(R^{n+m})$ abbiamo

$$(F[f(x)\cdot g(y)], \varphi) = (f(x)\cdot g(y), F[\varphi]) = \\ = (f(x), (g(y), F_\eta F_\xi[\varphi])) = (f(x), (F[g], F_\xi[\varphi])) = \\ = (f(x)\cdot F[g](\eta), F_\xi[\varphi]) = (F_x[f(x)\cdot F[g](\eta)], \varphi) = \\ = (F[g](\eta), (f(x), F_\xi[\varphi])) = (F[g](\eta), (F[f](\xi), \varphi)) = \\ = (F[f](\xi)\cdot F[g](\eta), \varphi),$$

da cui seguono le uguaglianze (21).

g) Formule analoghe sono anche valide per la trasformazione di Fourier F_x, per esempio: se $f(x, y) \in \mathscr{S}'(R^{n+m})$, si ha

$$D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x[f] = F_x[(ix)^\alpha D_y^\beta f], \\ F_x[D_x^\alpha D_y^\beta f] = (-i\xi)^\alpha D_y^\beta F_x[f]. \tag{22}$$

4. Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate a supporto compatto.

Teorema. *Se f è una funzione generalizzata finita, la sua trasformata di Fourier appartiene alla classe θ_M ed è rappresentata con la formula*

$$F[f](\xi) = (f(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)}), \tag{23}$$

dove η è una funzione arbitraria appartenente a $\mathscr{D}$ ed uguale all'unità nell'intorno del supp f.

Dimostrazione. Tenendo conto delle uguaglianze (6) del § 8.3 e (16) del § 9.3, si ottiene, per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$

$$(D^\alpha F[f], \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F[f], D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, F[D^\alpha\varphi]) = \\ = (-1)^{|\alpha|}(f, \eta(x)(-ix)^\alpha F[\varphi]) = (f(x), \int \eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)}\, d\xi).$$

Notando ora che

$$\eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)} \in \mathscr{S}(R^{2n}),$$

ed utilizzando la formula (15) del § 8.5, e cioè

$$\left(f(x), \int \eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)}\, d\xi\right) = \int (f, \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)})\varphi(\xi)\, d\xi,$$

dalle equazioni precedenti deriviamo l'uguaglianza

$$(D^\alpha F[f], \varphi) = \int (f, \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)})\varphi(\xi)\, d\xi,$$

dalla quale segue che

$$D^{\alpha}F[f](\xi) = (f,\ \eta(x)(ix)^{\alpha}e^{i(\xi, x)}). \tag{24}$$

Da ciò, per $\alpha = 0$, segue la formula (23).

Dalla rappresentazione (24), come pure nella dimostrazione del lemma del § 7.1 deduciamo che $D^{\alpha}F[f] \in C(R^n)$, di modo che $F[f] \in \in C^{\infty}(R^n)$. Inoltre, secondo il teorema di Schwartz (si veda il § 8.2) esistono numeri $C > 0$ e $p \geqslant 0$ (p intero) per i quali è valida la disuguaglianza (3) del § 8.2. Applicando questa disuguaglianza al secondo membro dell'uguaglianza (24), si ottiene la seguente stima:

$$|D^{\alpha}F[f](\xi)| = |(f,\ \eta(x)(ix)^{\alpha}e^{i(\xi, x)})| \leqslant$$

$$\leqslant C \| \eta(x)(ix)^{\alpha}e^{i(\xi, x)} \|_p = C \sup_{|\beta| \leqslant p,\ x \in R^n} (1 + |x|)^p \times$$

$$\times |D^{\beta}[\eta(x)\, x^{\alpha}e^{i(\xi, x)}]| \leqslant C_{\alpha}(1 + |\xi|)^p, \quad \xi \in R^n,$$

dalla quale segue che $F[f] \in \theta_M$ (si veda il § 8.1). Il teorema è dimostrato.

5. Trasformazione di Fourier della convoluzione. *Supponiamo che $f \in \mathscr{S}'$ e che g sia una funzione generalizzata finita. Si ha allora*

$$F[f * g] = F[g]\, F[f]. \tag{25}$$

Infatti, conformemente al § 8.6 la convoluzione $f * g \in \mathscr{S}'$ è rappresentata nella forma

$$(f * g,\ \varphi) = (f(x),\ (g(y),\ \eta(y)\ \varphi(x + y))), \quad \varphi \in \mathscr{S},$$

dove $\eta \in \mathscr{D}$ e $\eta = 1$ nell'intorno di supp g. Prendendo in considerazione questa rappresentazione, per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$ si ottiene

$$(F[f * g],\ \varphi) = (f * g,\ F[\varphi]) =$$

$$= \left(f(x),\ \left(g(y),\ \eta(y) \int \varphi(\xi)\, e^{i((x+y), \xi)}\, d\xi\right)\right).$$

Tenendo conto del fatto che, secondo il teorema del § 9.4, si ha $F[g] \in \theta_M$, ed utilizzando la formula (15) del § 8.5 e la (23) del presente paragrafo, trasformiamo l'uguaglianza ottenuta:

$$(F[f * g],\ \varphi) = \left(f,\ \int (g,\ \eta(y)\, e^{i(\xi, y)})\, e^{i(\xi, x)}\varphi(\xi)\, d\xi\right) =$$

$$= \left(f,\ \int F[g](\xi)\, \varphi(\xi)\, e^{i(\xi, x)}\, d\xi\right) = (f,\ F[F[g]\varphi]) =$$

$$= (F[f],\ F[g]\varphi) = (F[g]\, F[f],\ \varphi),$$

da cui segue la formula (25).

6. Esempi, $n = 1$.

a) $$F[\theta(R - |x|)] = \int_{-R}^{R} e^{ix\xi}\, dx = 2\,\frac{\sin R\xi}{\xi}. \tag{26}$$

b) $$F[e^{-\alpha^2 x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}. \tag{27}$$

Infatti,

$$F[e^{-\alpha^2 x^2}] = \int e^{-\alpha^2 x^2 + i\xi x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\int e^{-\sigma^2 + i\frac{\xi}{\alpha}\sigma}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}} \int e^{-\left(\sigma + \frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} d\sigma = \frac{1}{\alpha}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}} \int_{\operatorname{Im}\zeta = -\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\zeta^2}\, d\zeta.$$

Non resta altro da dimostrare che la linea d'integrazione $\operatorname{Im}\zeta =$

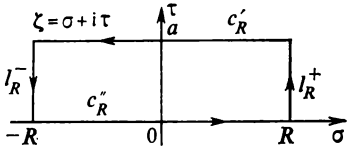


Fig. 36.

$= \xi/2\alpha$ nell'ultimo integrale può essere spostata sull'asse reale, cioè per tutti gli a si ha

$$\int_{\operatorname{Im}\zeta = a} e^{-\zeta^2}\, d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2}\, d\sigma = \sqrt{\pi}. \tag{28}$$

Conformemente al teorema di Cauchy, per un qualunque R positivo abbiamo

$$\int_{C_R} e^{-\zeta^2}\, d\zeta = 0, \quad \zeta = \sigma + i\tau, \tag{29}$$

dove il contorno $C_R = c'_R \cup c''_R \cup l^+_R \cup l^-_R$ è illustrato nella fig. 36. Ma sui segmenti $l^{\pm}_R = [0 \leqslant \tau \leqslant a,\ \sigma = \pm R]$ si ottiene

$$|e^{-\zeta^2}| = |e^{-\sigma^2 + \tau^2 - 2i\sigma\tau}| = e^{-R^2 + \tau^2} \xrightarrow{\tau \in [0,\, a]} 0. \quad R \to \infty,$$

e perciò è valida l'uguaglianza

$$\lim_{R\to\infty} \left(\int_{l^+_R} + \int_{l^-_R} \right) e^{-\zeta^2}\, d\zeta = 0,$$

dalla quale, utilizzando la (29), otteniamo l'uguaglianza (28):

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{-\zeta^2}\,d\zeta=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{c'_R}+\int_{c''_R}\right)e^{-\zeta^2}\,d\zeta=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\,d\sigma-\int_{\tau=ia}e^{-\zeta^2}\,d\zeta=0.$$

(c)
$$F[e^{ix^2}]=\sqrt{\pi}\,e^{-i(\xi^2-\pi)/4}. \tag{30}$$

Infatti, dalla convergenza dell'integrale improprio (integrale di Fresnel)

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy^2}\,dy=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$$

segue la convergenza, uniforme rispetto a ξ, su ogni intervallo finito del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2+ix\xi}\,dx=\lim_{\substack{N\to\infty\\M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{ix^2+ix\xi}\,dx=\lim_{\substack{N\to\infty\\M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{i\left(x+\frac{\xi}{2}\right)^2-\frac{i}{4}\xi^2}\,dx=$$

$$=e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\lim_{\substack{N\to\infty\\M\to\infty}}\int_{-M+\frac{\xi}{2}}^{N+\frac{\xi}{2}}e^{iy^2}\,dy=e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy^2}\,dy=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)}.$$

Abbiamo, quindi, dimostrato l'uguaglianza (30) punto per punto a condizione che la trasformata di Fourier sia intesa come un integrale improprio. Dimostriamo la validità di quest'uguaglianza in $\mathcal{S}'$. Utilizzando il risultato ottenuto, per tutte le $\varphi\in\mathcal{D}$, con $\operatorname{supp}\varphi\subset$ $\subset(-R,\ R)$ abbiamo

$$(F[e^{ix^2}],\ \varphi)=(e^{ix^2},\ F[\varphi])=\int e^{ix^2}F[\varphi](x)\,dx=$$

$$=\lim_{\substack{N\to\infty\\M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{ix^2}\int_{-R}^{R}\varphi(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi\,dx=\lim_{\substack{N\to\infty\\M\to\infty}}\int_{-R}^{R}\varphi(\xi)\int_{-M}^{N}e^{ix^2+ix\xi}\,dx\,d\xi=$$

$$=\int_{-R}^{R}\varphi(\xi)\lim_{\substack{N\to\infty\\M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{ix^2+ix\xi}\,dx\,d\xi=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\int\varphi(\xi)\,e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\,d\xi,$$

da cui concludiamo che l'uguaglianza (30) è valida su tutte le funzioni fondamentali appartenenti a $\mathcal{D}$. Ma $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{S}$ (si veda il § 8.1). Quindi, quest'uguaglianza è valida sulle funzioni fondamentali appartenenti a $\mathcal{S}$.

d)
$$F[\theta]=\pi\delta(\xi)+i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}, \tag{31}$$

$$F[\theta(-x)]=\pi\delta(\xi)-i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}. \tag{31'}$$

Infatti, per tutti gli a positivi abbiamo

$$F[\theta(x)\,e^{-ax}] = \int_0^\infty e^{-ax+ix\xi}\,dx = \frac{i}{\xi+ia}. \tag{32}$$

Visto che

$$\theta(x)\,e^{-ax} \to \theta(x), \quad a \to +0 \text{ in } \mathscr{S}',$$

passando al limite per $a \to +0$ nella formula (32) ed utilizzando la continuità della trasformata di Fourier su $\mathscr{S}'$ (si veda il § 9.2), troviamo che

$$F[\theta] = \frac{i}{\xi+i0}. \tag{33}$$

Applicando ora la formula di Sochotskij (10) del § 5.8, otteniamo l'uguaglianza (31). L'uguaglianza (31′) è stabilita in modo analogo

e) $$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|}\right] = -2C - 2\ln|\xi|, \tag{34}$$

dove C è la costante d'Eulero,

$$C = \int_0^1 \frac{1-\cos u}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{\cos u}{u}\,du,$$

e la funzione generalizzata $\mathscr{P}\frac{1}{|x|}$ è definita nell'esercizio b) del § 6.6).

Infatti, per tutte le $\varphi \in \mathscr{S}$ abbiamo

$$\left(F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|}\right], \varphi\right) = \left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|}, F[\varphi]\right) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi)\,(e^{ix\xi}-1)\,d\xi\,dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \int \varphi(\xi)\,\frac{\cos x\xi - 1}{x}\,d\xi\,dx + 2\int_1^\infty \int \varphi(\xi)\,\frac{\cos x\xi}{x}\,d\xi\,dx =$$

$$= 2\int \varphi(\xi) \int_0^1 \frac{\cos x\xi - 1}{x}\,dx\,d\xi - 2\int_1^\infty \int \varphi'(\xi)\,\frac{\sin x}{x^2}\,d\xi\,dx =$$

$$= 2\int \varphi(\xi) \int_0^{|\xi|} \frac{\cos u - 1}{u}\,du\,d\xi - 2\int \varphi'(\xi) \int_1^\infty \frac{\sin x\xi}{x^2}\,dx\,d\xi =$$

$$= 2\int \varphi(\xi)\left[\int_0^{|\xi|} \frac{\cos u - 1}{u}\,du + \frac{d}{d\xi}\int_1^\infty \frac{\sin x\xi}{x^2}\,dx\right]d\xi =$$

$$= -2\int \varphi(\xi)\,(C + \ln|\xi|)\,d\xi,$$

da cui deriva la formula (34).

f) Nel § 6.4, esempio d), è stata stabilita l'uguaglianza

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}. \tag{35}$$

È facile vedere che le serie dell'uguaglianza (35) convergono in $\mathscr{S}'$. Utilizzando la formula (11), riscriviamo l'uguaglianza (35) nella forma

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x-k)].$$

Applicando quest'uguaglianza a $\varphi \in \mathscr{S}$, si ottiene

$$2\pi \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi k),\ \varphi \right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x-2\pi k),\ \varphi) =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x-k)],\ \varphi \right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x-k),\ F[\varphi]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k),$$

cioè

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k). \tag{36}$$

L'uguaglianza (36) è detta *formula di sommatoria di Poisson*. Ponendo nella formula (36)

$$\varphi(x) = e^{-\frac{tx^2}{4\pi^2}}, \quad F[\varphi](\xi) = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2\pi^2}{t}}, \quad t > 0,$$

si ottiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-tk^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{t}}. \tag{37}$$

La formula (37) è utilizzata nella teoria delle funzioni ellittiche.

7. Esempi, $n \geqslant 2$.

a) Supponiamo che la forma quadratica

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = (Ax,\ x), \quad A = (a_{ij}),$$

sia reale e definita positiva

$$(Ax,\ x) \geqslant \sigma \mid x \mid^2, \quad \sigma > 0.$$

Si ha allora

$$F[e^{-(Ax,\,x)}] = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}(\xi,\ A^{-1}\xi)}. \tag{38}$$

Per ottenere la formula (38) per mezzo di una trasformazione reale non singolare $x = By$ riduciamo la forma quadratica (Ax, x) alla forma diagonale

$$(Ax, x) = (ABy, By) = (B'ABy, y) = |y|^2,$$

di modo che

$$A^{-1} = BB', \det A (\det B)^2 = 1.$$

Da ciò, utilizzando la formula (25), si ottiene

$$F[e^{-(Ax, x)}] = \int e^{-(Ax, x)+i(\xi, x)} dx = |\det B| \int e^{-(ABy, By)+i(\xi, By)} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int e^{-|y|^2+i(B'\xi, y)} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{j=1}^{n} \int e^{-y_j^2-i(B'\xi)_j y_j} dy_j = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}|B'\xi|^2} =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}(\xi, BB'\xi)} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}(\xi, A^{-1}\xi)}.$$

b) Analogamente, utilizzando la formula (30), si ottiene

$$F[e^{i(Ax, x)}] = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{i\frac{\pi n}{4}} e^{-\frac{i}{4}(\xi, A^{-1}\xi)}. \tag{39}$$

c) Supponiamo che $\delta_{S_R}(x)$ sia uno strato semplice sulla sfera S_R in R^3. Si ha allora

$$F[\delta_{S_R}] = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \tag{40}$$

Infatti, visto che δ_{S_R} è una funzione generalizzata finita, applicando la formula (23) si ottiene

$$F[\delta_{S_R}] = (\delta_{S_R}(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)}) =$$

$$= \int_{S_R} \eta(x) e^{i(\xi, x)} dS_x = R^2 \int_{S_1} e^{iR(\xi, s)} ds =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{iR|\xi|\cos\theta} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

d) Supponiamo che sia $n = 2$. Introduciamo la funzione generalizzata $\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}$ appartenente a $\mathcal{S}'$ mediante la formula

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}, \varphi\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx$$

assumendo che φ appartenga a $\mathscr{S}$. Si ha allora

$$F\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}\right) = -2\pi \ln|\xi| - 2\pi C_0, \tag{41}$$

dove

$$C_0 = \int_0^1 \frac{1-J_0(u)}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u}\,du$$

e J_0 è la funzione di Bessel (si veda il § 23).

Infatti, per tutte le $\varphi \in \mathscr{C}$ è valida la seguente successione di equazioni:

$$\left(F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi\right) = \left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}, F[\varphi]\right) =$$

$$= \int_{|x|<1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|^2}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|^2}\,dx =$$

$$= \int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi)\,[e^{i(x,\,\xi)} - 1]\,d\xi\,dx +$$

$$+ \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi)\,e^{i(x,\,\xi)}\,d\xi\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) \int_0^{2\pi} (e^{ir|\xi|\cos\theta} - 1)\,d\theta\,d\xi\,dr +$$

$$+ \int_1^\infty \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) \int_0^{2\pi} e^{ir|\xi|\cos\theta}\,d\theta\,d\xi\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r} \int \varphi(\xi)\,[J_0(r|\xi|) - 1]\,d\xi\,dr +$$

$$+ 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r} \int \varphi(\xi)\,J_0(r|\xi|)\,d\xi\,dr =$$

$$= 2\pi \int \varphi(\xi) \left[\int_0^1 \frac{J_0(r|\xi|) - 1}{r}\,dr + \int_1^\infty \frac{J_0(r|\xi|)}{r}\,dr\right] d\xi =$$

$$= 2\pi \int \varphi(\xi) \left[\int_0^{|\xi|} \frac{J_0(u) - 1}{u}\,du + \int_{|\xi|}^\infty \frac{J_0(u)}{u}\,du\right] d\xi =$$

$$= -2\pi \int \varphi(\xi)\,(C_0 + \ln|\xi|)\,d\xi,$$

da cui segue l'uguaglianza (41).

e) $$F\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{2\pi i}{\zeta}, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{42}$$

Applicando ad entrambi i membri dell'uguaglianza del § 6.5 la trasformazione di Fourier, si ottiene

$$F\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{z}\right]=\frac{-i\zeta}{2}F\left[\frac{1}{z}\right]=\pi F[\delta]=\pi.$$

Visto che $1/\zeta$ è una funzione localmente integrabile in R^2, l'ultima uguaglianza può essere divisa per ζ in $\mathcal{S}'(R^2)$. Di conseguenza, si ottiene la formula (42).

f) $$F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right]=2\pi\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|},\quad n=2. \tag{43}$$

Infatti,

$$F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right]=\int\limits_{|x|<R}\frac{e^{i(\xi,\,x)}}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^R\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\int\limits_0^{2\pi}e^{ir|\xi|\cos\varphi}\,d\varphi\,dr=$$

$$=2\pi\int\limits_0^R\frac{rJ_0(r|\xi|)}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr=2\pi R\int\limits_0^1 J_0(R|\xi|u)\frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}}=2\pi\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

Abbiamo utilizzato la formula 6.554, 2) dal manuale di Gradštein e Ryžik [1].

g) $$F\left[\frac{1}{|x|^2}\right]=\frac{2\pi^2}{|\xi|},\quad n=3. \tag{44}$$

Considerando che la funzione $|x|^{-2}$ è localmente integrabile in R^3, per tutte le $\varphi\in\mathcal{S}$ si ottiene la seguente successione di uguaglianze:

$$\left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right],\varphi\right)=\left(\frac{1}{|x|^2},\,F[\varphi]\right)=\int\frac{1}{|x|^2}F[\varphi]\,dx=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|x|<R}\frac{1}{|x|^2}\int\varphi(\xi)\,e^{i(\xi,\,x)}\,d\xi\,dx=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int\varphi(\xi)\int\limits_{|x|<R}\frac{e^{i(\xi,\,x)}}{|x|^2}\,dx\,d\xi=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int\varphi(\xi)\int\limits_0^R\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i|\xi|\rho\cos\theta}}{\rho^2}\rho^2\,d\psi\sin\theta\,d\theta\,d\rho\,d\xi=$$

$$=2\pi\lim_{R\to\infty}\int\varphi(\xi)\int\limits_0^R\int\limits_{-1}^1 e^{i|\xi|\rho\mu}\,d\mu\,d\rho\,d\xi=$$

$$=4\pi\lim_{R\to\infty}\int\frac{\varphi(\xi)}{|\xi|}\int\limits_0^R\frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}\,d\rho\,d\xi. \tag{45}$$

Visto che

$$|\xi|\left|\int_R^\infty \frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}d\rho\right| = \left|\frac{\cos|\xi|R}{R} - \int_R^\infty \frac{\cos|\xi|\rho}{\rho^2}d\rho\right| \leqslant \frac{1}{R} + \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2}{R},$$

è possibile il passaggio limite per $R \to \infty$ sotto il segno d'integrale nell'ultimo termine delle uguaglianze (45). Tenuto in conto che

$$\int_0^\infty \frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}d\rho = \frac{\pi}{2}, \quad |\xi| \neq 0,$$

in definitiva, si ottiene

$$\left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi\right) = 4\pi \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2}|\xi| \int_0^\infty \frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}d\rho\, d\xi = 2\pi^2 \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|}d\xi,$$

da cui segue la formula (44).

8. **Esercizi.** Utilizzando le formule (31) e (31′) e l'uguaglianza $\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2} = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right)'$ (si veda l'esercizio a) del § 6.6) dimostrare che

a) $F[\operatorname{sgn} x] = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$, $F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = i\pi \operatorname{sgn}\xi$;

b) $F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\right] = -\pi|\xi|$, $F[|x|] = -2\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}$;

c) $F[\theta(x)\,x] = -i\pi\delta'(\xi) - \mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}$.

d) Dimostrare che la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k), \quad |a_k| \leqslant c(1+|k|)^m,$$

converge in $\mathcal{S}'(R^1)$ e che

$$F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ihx}.$$

e) Utilizzando il teorema del § 8.4, dimostrare che, se $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ ha simmetria sferica (cioè $f(Ax) = f(x)$ per tutte le rotazioni di A in R^n) o è invariante secondo Lorentz (si veda il § 5.9) e supp $f = \{0\}$, si ha rispettivamente $f(x) = P(\Delta)\,\delta(x)$ o $f(x) = P(\Box)\,\delta(x)$, dove P è un certo polinomio.

f) Supponiamo che $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ e supp $f \subset \overline{U}_a$ e che η sia, inoltre, una qualunque funzione della classe $\mathcal{D}(R^n)$ uguale all'unità nell'intorno di supp f. Dimostrare che la funzione

$$\widetilde{f}(z) = (f(\xi), \eta(\xi)\, e^{i(z,\xi)}), \quad z = (z_1, \ldots, z_n) = x + iy \tag{46}$$

non dipende da η, è intera e soddisfa, per un certo $m \geqslant 0$ e per $\varepsilon > 0$ qualsiasi la stima

$$|\widetilde{f}(x+iy)| \leqslant C_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|y|}(1+|x|)^m. \tag{47}$$

Inversamente, se una funzione intera $\widetilde{f}(z)$ soddisfa la disuguaglianza (47) per un $\varepsilon > 0$ qualsiasi, esiste una funzione (unica) $f \in \mathcal{D}'(R^n)$, supp $f \subset \overline{U}_a$, tale che ha luogo la rappresentazione (46) (t e o r e m a d i P a l e y - W i e n e r - S c h w a r t z).

§ 10. *Trasformazione di Laplace delle funzioni generalizzate (calcolo operazionale)*

Il metodo di trasformazione di Laplace è uno dei mezzi più potenti per la risoluzione dei problemi della fisica matematica. Nelle applicazioni, per esempio, alla teoria dei circuiti elettrici, questo metodo è spesso detto *calcolo operazionale*, o metodo di Heaviside. La teoria della trasformazione di Laplace delle funzioni generalizzate è basata sui lavori di Schwartz [3] e Lions [1]. Per semplificare l'esposizione ci limitiamo all'esame della teoria della trasformazione di Laplace delle funzioni generalizzate ad una variabile indipendente [1].

1. Trasformazione di Laplace delle funzioni localmente integrabili. Supponiamo che $f(t)$ sia una funzione localmente integrabile in R^1, $f(t) = 0$ per $t < 0$, e

$$|f(t)| \leqslant Ae^{at} \text{ per } t \to +\infty. \tag{1}$$

L'integrale

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad p = \sigma + i\omega, \tag{2}$$

si dice *trasformazione di Laplace* della funzione f.

La funzione $\mathcal{F}(p)$ *è analitica nel semipiano* $\sigma > a$ *ed inoltre* $\mathcal{F}(p) \overset{\omega}{\Rightarrow} 0$ *per* $\sigma \to +\infty$.

Infatti, nel semipiano $\sigma > a$ la funzione integranda nella (2), in virtù della (1), vale

$$|f(t)\, e^{-pt}| \leqslant Ae^{-(\sigma - a)t}, \quad t \to +\infty,$$

e, di conseguenza, è assolutamente integrabile. Pertanto l'integrale (2) converge uniformemente in ogni semipiano chiuso $\sigma \geqslant a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, definendo con ciò una funzione analitica $\mathcal{F}(p)$ per $\sigma > a$ che tende a 0 per $\sigma \to +\infty$ uniformemente rispetto a ω.

La formula (2) in termini della trasformata di Fourier assume la forma

$$\mathcal{F}(p) = F[f(t)\, e^{-\sigma t}]\ (-\omega), \quad \sigma > a.$$

Prendiamo questa formula come punto di partenza nella definizione della trasformazione di Laplace delle funzioni generalizzate.

Esempio.

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}, \quad \sigma > 0. \tag{3}$$

2. Trasformazione di Laplace delle funzioni generalizzate. Denotiamo con $\mathcal{D}'_+(a)$ la raccolta delle funzioni generalizzate $f(t)$

[1] Si veda anche Ditkin e Prudnikov [1] e Bryčkov e Prudnikov [1].

appartenenti a $\mathscr{D}'_+$ (si veda il § 7.7), tali che

$$f(t)\, e^{-\sigma t} \in \mathscr{S}'_+ \text{ per tutte le } \sigma > a \text{ [1]}. \tag{4}$$

Si veda la definizione di $\mathscr{S}'_+$ nel § 8.6, dove è stato dimostrato che $\mathscr{S}'_+$ era un'algebra di convoluzione. È evidente che $\mathscr{D}'_+(a_1) \subset \mathscr{D}'_+(a_2)$ se $a_1 \leqslant a_2$.

È valida la seguente inclusione: $\mathscr{S}'_+ \subset \mathscr{D}'_+(0)$.

Infatti, se $f \in \mathscr{S}'$, supp $f \subset [0, \infty)$, e η è una qualunque funzione della classe C^∞ con le proprietà: $\eta(t) = 0$ per $t < -\delta$, $\eta(t) = 1$ per $t > -\delta/2$ ($\delta > 0$ è arbitrario), per ogni $\sigma > 0$ si ha $\eta(t)\, e^{-\sigma t} \in \mathscr{S}$, $f = \eta f$ (si veda il § 5.10), e pertanto

$$f(t)\, e^{-\sigma t} = f(t)\, \eta(t)\, e^{-\sigma t} \in \mathscr{S}'.$$

Se $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, *si ha* $bf \in \mathscr{D}'_+(a)$, $b \in \theta_M$;

$$f(kt) \in \mathscr{D}'_+(ka), \quad k > 0; \quad f(t)\, e^{\lambda t} \in \mathscr{D}'_+(a + \operatorname{Re}\lambda).$$

Queste affermazioni seguono direttamente dalle definizioni (si veda § 8.3).

Se f *e* g *appartengono a* $\mathscr{D}'_+(a)$, *si ha* $f * g \in \mathscr{D}'_+(a)$ *ed è valida la seguente uguaglianza*:

$$(f * g)\, e^{-\sigma t} = f e^{-\sigma t} * g e^{-\sigma t}, \quad \sigma > a. \tag{5}$$

Infatti, utilizzando la formula (17) del § 8.6, per ogni $\sigma > a$ e $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$, abbiamo

$$\begin{aligned}(f e^{-\sigma t} * g e^{-\sigma t},\ \varphi) &= (f(t)\, e^{-\sigma t} \cdot g(\tau)\, e^{-\sigma\tau},\ \eta_1(t)\, \eta_2(\tau)\, \varphi(t+\tau)) = \\ &= (f(t) \cdot g(\tau),\ \eta_1(t)\, \eta_2(\tau)\, e^{-\sigma(t+\tau)} \varphi(t+\tau)) = \\ &= (f * g,\ \varphi e^{-\sigma t}) = (e^{-\sigma t}(f * g),\ \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue l'uguaglianza (5). Visto che $f e^{-\sigma t}$ e $g e^{-\sigma t}$ appartengono a $\mathscr{S}'_+$ e $\mathscr{S}'_+$ è un'algebra di convoluzione, dalla (5) segue che $(f * g)\, e^{-\sigma t} \in \mathscr{S}'_+$, per $\sigma > a$, cioè $f * g \in \mathscr{D}'_+(a)$.

Abbiamo dunque dimostrato che $\mathscr{D}'_+(a)$ è *un'algebra di convoluzione*; essa è una sottalgebra dell'algebra di convoluzione $\mathscr{D}'_+$ (si veda il § 7.7).

In particolare, se $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, si ha $f(t-\tau) = f * \delta(t-\tau) \in \mathscr{D}'_+(a)$ per $\tau \geqslant 0$; $f^{(m)} = f * \delta^{(m)} \in \mathscr{D}'_+(a)$, $m = 1, 2, \ldots$; se $a \geqslant 0$, la primitiva m-esima $f_{(m)} = \underbrace{\theta * \ldots * \theta}_{m \text{ volte}} * f \in \mathscr{D}'_+(a)$, $m = 1, 2, \ldots$ (si vedano i §§ 6.3 e 7.8).

Sia $f \in \mathscr{D}'_+(a)$. Dalla condizione (4) segue che, per ogni $\sigma > a$, la funzione generalizzata $f(t)\, e^{-\sigma t}$ ha la trasformata di Fourier e perciò

$$\mathscr{F}(p) = F[f(t)\, e^{-\sigma t}](-\omega) = 2\pi F^{-1}[f(t)\, e^{-\sigma t}](\omega) \in \mathscr{S}', \quad \sigma > a. \tag{6}$$

[1] Di solito come a viene preso inf di quelle σ per le quali è valida la (4).

Fissiamo un numero arbitrario $\sigma_0 > a$. Dimostriamo che

$$\mathcal{F}(p) = (f(t)\, e^{-\sigma_0 t},\quad \eta(t)\, e^{-(p-\sigma_0)t}),\quad \sigma > \sigma_0, \tag{7}$$

dove $\eta(t)$ è la funzione arbitraria ausiliare introdotta sopra.

Infatti, sia $\sigma > \sigma_0 > a$ e $\varphi \in \mathcal{S}$. Si ha allora

$$(\mathcal{F}(\sigma + i\omega),\ \varphi) = (F[f(t)\, e^{-\sigma t}](-\omega),\ \varphi) = (f(t)\, e^{-\sigma t},\ F[\varphi(-\omega)]) =$$
$$= (\eta(t) f(t)\, e^{-\sigma_0 t},\ e^{-(\sigma-\sigma_0)t} F[\varphi](-t)) =$$
$$= \left(f(t)\, e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)\, e^{-(\sigma-\sigma_0)t} \int \varphi(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega\right).$$

Ma per ogni $\sigma > \sigma_0$ si ha

$$\eta(t) e^{-(\sigma-\sigma_0)t - i\omega t}\, \varphi(\omega) \in \mathcal{S}(R^2).$$

Perciò l'integrale dell'ultima espressione può essere portato fuori del segno di funzionale (si veda la (15) del § 8.5), e si ottiene

$$(\mathcal{F}(\sigma + i\omega),\ \varphi) = \int (f(t)\, e^{-\sigma_0 t},\ \eta(t)\, e^{-(p-\sigma_0)t})\, \varphi(\omega)\, d\omega,$$

da cui segue la formula (7).

$\mathcal{F}(p)$ è una funzione analitica nel semipiano $\sigma > a$ e, in ogni semipiano $\sigma > \sigma_0 > a$, è valida la formula di derivazione

$$\mathcal{F}^{(m)}(p) = (f(t)\, e^{-\sigma_0 t},\ \eta(t)(-t)^m e^{-(p-\sigma_0)t}),\quad m = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

La dimostrazione di quest'asserzione è analoga alla dimostrazione del lemma del § 8.4 se si tiene conto del fatto che

$$\eta(t)\, \frac{e^{-(p+\Delta p-\sigma_0)t} - e^{-(p-\sigma_0)t}}{\Delta p} \to -t\eta(t)\, e^{-(p-\sigma_0)t},\ \Delta p \to 0 \text{ in } \mathcal{S}.$$

La funzione $\mathcal{F}(p)$ si dice *trasformata di Laplace* della funzione generalizzata $f(t)$ appartenente a $\mathcal{D}'_+(a)$.

Nel calcolo operazionale la funzione (generalizzata) $f(t)$ si dice funzione *originale* e $\mathcal{F}(p)$ è detta funzione *immagine*

$$f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p),\quad \sigma > a. \tag{9}$$

Osserviamo che tra la funzione originale $f(t)$ e quella immagine $\mathcal{F}(p)$ si ha *una corrispondenza biunivoca* [1]. Quest'asserzione deriva dalla definizione (6) e dal carattere biunivoco della trasformazione di Fourier (si veda il § 9.2).

È evidente che la trasformazione di Laplace è un'operazione *lineare*: se $f_k(t) \leftrightarrow \mathcal{F}_k(p)$, $\sigma > a_k$, $k = 1, 2$, si ha

$$\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) \leftrightarrow \lambda \mathcal{F}_1(p) + \mu \mathcal{F}_2(p),\ \sigma > \max(a_1, a_2).$$

Esempio.

$$\delta(t - \tau) \leftrightarrow e^{-\tau p},\ p \text{ è un numero arbitrario},\ \tau \geqslant 0. \tag{10}$$

[1] Perciò la corrispondenza (9) è simmetrica.

3. Proprietà della trasformazione di Laplace.

a) Derivazione della trasformazione di Laplace. Se $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, si ha

$$(-t)^m f(t) \leftrightarrow \mathscr{F}^{(m)}(p), \quad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Infatti, $(-t)^m f \in \mathscr{D}'_+(a)$ (si veda il § 10.2). Applicando le formule (7) e (8) a $(-t)^m f$, per ogni $\sigma > \sigma_0 > a$ si ottiene la corrispondenza (11)

$$(-t)^m f(t) \leftrightarrow ((-t)^m f(t) e^{-\sigma_0 t}, \eta(t) e^{-(p-\sigma_0)t}) =$$
$$= (f(t) e^{-\sigma_0 t}, \eta(t) (-t)^m e^{-(p-\sigma_0)t}) = \mathscr{F}^{(m)}(p).$$

b) Trasformazione di Laplace di una derivata. Se $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, si ha

$$f^{(m)}(t) \leftrightarrow p^m \mathscr{F}(p), \quad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

È sufficiente dimostrare questa corrispondenza per $m = 1$. Sappiamo che $f' \in \mathscr{D}'_+(a)$ (si veda il § 10.2). Pertanto si ha

$$f'(t) \leftrightarrow F[f'(t) e^{-\sigma t}](-\omega) = F[(f(t) e^{-\sigma t})' + \sigma f(t) e^{-\sigma t}](-\omega) =$$
$$= (\sigma + i\omega) F[f(t) e^{-\sigma t}](-\omega) = p\mathscr{F}(p),$$

come si voleva dimostrare.

c) Traslazione della trasformazione di Laplace. Se $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, si ha

$$f(t) e^{\lambda t} \leftrightarrow \mathscr{F}(p - \lambda), \quad \sigma > a + \operatorname{Re} \lambda. \tag{13}$$

Abbiamo dimostrato nel § 10.2 che $f(t) e^{\lambda t} \in \mathscr{D}'_+(a + \operatorname{Re} \lambda)$; perciò in virtù della proprietà d) del § 9.3 si ha

$$f(t) e^{\lambda t} \leftrightarrow F[f(t) e^{\lambda t} e^{-\sigma t}](-\omega) = F[f(t) e^{-(\sigma-\lambda)t}](-\omega) =$$
$$= \mathscr{F}(p - \lambda).$$

d) Trasformazione di Laplace della similitudine. Se $f \in \mathscr{D}'_+(a)$ e $k > 0$, si ha

$$f(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} \mathscr{F}\left(\frac{p}{k}\right), \quad \sigma > ka. \tag{14}$$

Infatti, $f(kt) \in \mathscr{D}'_+(ka)$ (si veda il § 10.2) e, in virtù della proprietà e) del § 9.3, si ha

$$f(kt) \leftrightarrow F[f(kt) e^{-\sigma t}](-\omega) = F[f(kt) e^{-\frac{\sigma}{k} kt}](-\omega) =$$
$$= \frac{1}{k} F[f(t) e^{-\frac{\sigma}{k} t}]\left(-\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{k} \mathscr{F}\left(\frac{p}{k}\right).$$

e) Trasformazione di Laplace della convoluzione. Se f e g appartengono a $\mathscr{D}'_+(a)$ e se $f \leftrightarrow \mathscr{F}$ e $g \leftrightarrow \mathscr{G}$,

$\sigma > a$, si ha

$$(f * g)\ (t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)\ \mathcal{G}\ (p), \quad \sigma > a, \tag{15}$$

e quindi la trasformazione di Laplace è moltiplicativa.

Abbiamo $f * g \in \mathscr{D}'_+\ (a)$ (si veda il § 10.2) e per tutti i $\sigma > > \sigma_0 > a$ otteniamo

$$(f * g)\ (t) \leftrightarrow ((f * g)\ (t)\ e^{-\sigma_0 t},\ \eta\ (t)\ e^{-(p-\sigma_0)t}) =$$

$$= (f e^{-\sigma_0 t} * g e^{-\sigma_0 t},\ \eta\ (t)\ e^{-(p-\sigma_0)t}).$$

Ma $\eta\ (t)\ e^{-(p-\sigma_0)t} \in \mathscr{S}$, e perciò, in base alla formula (17) del § 8.6, avremo

$$(f * g)\ (t) \leftrightarrow (f\ (t)\ e^{-\sigma_0 t} \cdot g\ (\tau)\ e^{-\sigma_0 \tau},\ \eta_1\ (t)\ \eta_2\ (\tau)\ \eta(t+\tau)\ e^{-(p-\sigma_0)(t+\tau)}).$$

Tenendo ora conto del fatto che, mediante una certa scelta delle fun-

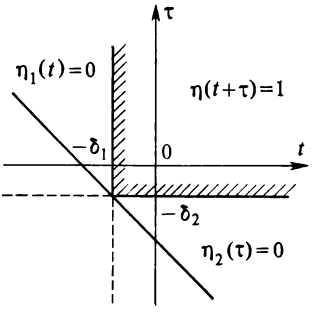


Fig. 37.

zioni ausiliari η_1, η_2 e η, diventa valida l'identità (fig. 37)

$$\eta_1\ (t)\ \eta_2\ (\tau)\ \eta\ (t + \tau) = \eta_1\ (t)\ \eta_2\ (\tau),$$

ed utilizzando la definizione del prodotto diretto in $\mathscr{S}'$ (si veda il § 8.5), si ottiene la formula (15):

$$(f * g)\ (t) \leftrightarrow (f\ (t)\ e^{-\sigma_0 t} \cdot g\ (\tau)\ e^{-\sigma_0 \tau},\ \eta_1\ (t)\ \eta_2\ (\tau)\ e^{-(p-\sigma_0)(t+\tau)}) =$$

$$= (f\ (t)\ e^{-\sigma_0 t},\ \eta_1\ (t)\ e^{-(p-\sigma_0)t})\ (g\ (\tau)\ e^{-\sigma_0 \tau},\ \eta_2\ (\tau)\ e^{-(p-\sigma_0)\tau}) =$$

$$= \mathcal{F}\ (p)\ \mathcal{G}\ (p),$$

se prendiamo ancora una volta in considerazione la formula (7).

f) Trasformazione di Laplace della traslazione (ritardo). Se $f \in \mathscr{D}'_+\ (a)$, per $\tau \geqslant 0$, si ha

$$f\ (t - \tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} \mathcal{F}\ (p), \quad \sigma > a. \tag{16}$$

Infatti, $f\ (t - \tau) \in \mathscr{D}'_+\ (a)$ (si veda il § 10.2) e, in virtù delle (15) e (10), si ha

$$f\ (t - \tau) = f * \delta\ (t - \tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} \mathcal{F}\ (p).$$

g) Trasformazione di Laplace di una primitiva. Se $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, $a \geqslant 0$, si ha

$$f^{(-m)}(t) \leftrightarrow \frac{\mathscr{F}(p)}{p^m}, \quad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Infatti, $f^{(-m)} \in \mathscr{D}'_+(a)$ (si veda il § 10.2) e, in virtù delle (15) e (3) si ha

$$f^{(-m)}(t) = \underbrace{\theta * \ldots * \theta}_{m \text{ volte}} * f \leftrightarrow \frac{1}{p^m} \mathscr{F}(p).$$

4. Trasformazione di Laplace inversa. Sorgono i seguenti problemi: 1) come dare una descrizione interna delle funzioni immagine appartenenti all'algebra $\mathscr{D}'_+(a)$ e 2) come ristabilire la funzione originale (unica) a partire dalla funzione immagine data? Le risposte a queste questioni sono contenute nel seguente teorema fondamentale.

Introduciamo prima una classe $H(a)$ che consiste di funzioni $\mathscr{F}(p)$, analitiche nel semipiano $\sigma > a$ e soddisfacenti la seguente condizione di crescita: per $\varepsilon > 0$ e $\sigma_0 > a$ esistono numeri $C_\varepsilon(\sigma_0) \geqslant 0$ e $m = m(\sigma_0) \geqslant 0$ tali che

$$|\mathscr{F}(p)| \leqslant C_\varepsilon(\sigma_0)\, e^{\varepsilon\sigma}(1 + |p|^m), \quad \sigma > \sigma_0. \tag{18}$$

Evidentemente, $H(a)$ è un'algebra con la regola usuale di moltiplicazione di funzioni analitiche.

Teorema fondamentale. *Affinché $f(t)$ appartenga a $\mathscr{D}'_+(a)$, è necessario e sufficiente che la sua trasformata di Laplace $\mathscr{F}(p)$ appartenga a $H(a)$. A queste condizioni per tutti i $b \leqslant a$, $\sigma > \sigma_0 > a$ e per i $k > m(\sigma_0) + 1$ interi è valida la seguente rappresentazione:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{d}{dt} - b\right)^k \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\mathscr{F}(p)\, e^{pt}}{(p-b)^k}\, dp, \tag{19}$$

ed inoltre il secondo membro della (19) *non dipende da b, σ e k.*

Dimostrazione. Necessità. Sia $f \in \mathscr{D}'_+(a)$. Allora la sua trasformata di Laplace $\mathscr{F}(p)$ è una funzione analitica nel semipiano $\sigma > a$ (si veda il § 10.2) e per qualunque $\sigma_0 > a$, nel semipiano $\sigma > \sigma_0$, è valida la rappresentazione (7). Applicando a questa rappresentazione il teorema di Schwartz (si veda il § 8.2), per qualunque $\varepsilon > 0$ e per certi $C_\varepsilon(\sigma_0) \geqslant 0$ e $m = m(\sigma_0) \geqslant 0$ otteniamo la disuguaglianza (18):

$$|\mathscr{F}(p)| \leqslant C(\sigma_0) \sup_{\substack{0 \leqslant \alpha \leqslant m \\ t \geqslant -\varepsilon}} |(\eta(t)\, e^{-(p-\sigma_0)t})^{(\alpha)}| \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon(\sigma_0)\, e^{\varepsilon\sigma}(1 + |p|^m), \quad \sigma > \sigma_0,$$

di modo che $\mathscr{F} \in H(a)$.

Sufficienza. Sia $\mathcal{F} \in H(a)$. Si deve dimostrare che la funzione $\mathcal{F}(p)$ è la trasformata di Laplace della funzione generalizzata f appartenente a $\mathcal{D}'_+(a)$ rappresentabile dalla formula (19). Consideriamo prima il caso in cui la funzione $\mathcal{F}(p)$ per tutti i $\sigma > \sigma_0 > a$ soddisfi la stima

$$|\mathcal{F}(p)| \leqslant \frac{C_\varepsilon(\sigma_0)\, e^{\varepsilon\sigma}}{|p-a|^\alpha}, \quad \alpha > 1. \tag{20}$$

In questo caso l'integrale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{F}(p)\, e^{pt}\, dp \qquad (\sigma > a) \tag{21}$$

converge uniformemente rispetto a t in ogni intervallo finito e definisce una funzione continua, $f(t)$, per $-\infty < t < \infty$.

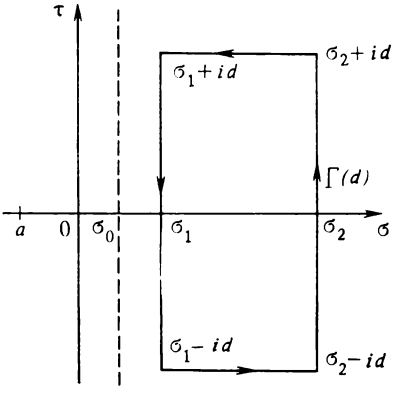


Fig. 38.

Dimostriamo che $f(t)$ non dipende da $\sigma > a$. Supponiamo che $\sigma_2 > \sigma_1 > a$. Conformemente al teorema di Cauchy abbiamo

$$\int_{\Gamma(d)} \mathcal{F}(p)\, e^{pt}\, dp = 0, \tag{22}$$

dove il contorno $\Gamma(d)$ è illustrato nella fig. 38. Considerando il fatto che, in virtù della (20) si ha

$$\left| \int_{\sigma_1+id}^{\sigma_2+id} \mathcal{F}(p)\, e^{pt}\, dp \right| \leqslant \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\mathcal{F}(\sigma+id)|\, e^{\sigma t}\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon(\sigma_1) \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{e^{\sigma(\varepsilon+t)}\, d\sigma}{[(\sigma-a)^2+d^2]^{\alpha/2}} \to 0$$

e passando al limite nell'uguaglianza (22) per $d \to +\infty$, si ottiene

$$\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \mathcal{F}(p)\, e^{pt}\, dp = \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \mathcal{F}(p)\, e^{pt}\, dp,$$

come si voleva dimostrare.

Riscriviamo l'uguaglianza (21) in una forma equivalente:

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\sigma+i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad \sigma > a. \tag{23}$$

Utilizzando la disuguaglianza (20) e ponendo $\sigma > \sigma_0 > a$, abbiamo la seguente disuguaglianza per $f(t)$:

$$|f(t)| \leqslant \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\sigma + i\omega)|\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_\varepsilon(\sigma_0)}{2\pi} e^{\sigma(\varepsilon+t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{[(\sigma-a)^2+\omega^2]^{\alpha/2}} \leqslant C'_\varepsilon(\sigma_0)\, e^{\sigma(\varepsilon+t)}.$$

Sia $t < -\varepsilon$. Facendo tendere σ a $+\infty$ nella stima ottenuta, troviamo che $f(t) = 0$. Da ciò, tenendo conto del fatto che $\varepsilon > 0$ è arbitrario, concludiamo che $f(t) = 0$ per $t < 0$. Dalla (23) segue anche che $f(t)\, e^{-\sigma t} \in \mathcal{S}'$ e

$$\mathcal{F}(p) = 2\pi F^{-1}[f(t)\, e^{-\sigma t}](\omega), \quad \sigma > a.$$

Dunque, $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ e $f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)$, $\sigma > a$.

Consideriamo ora il caso generale. Fissiamo $b \leqslant a$, $\sigma_0 > 0$ arbitrari e $k > m(\sigma_0) + 1$ intero ed introduciamo la funzione

$$\mathcal{F}_1(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{(p-b)^k},$$

che è analitica nel semipiano $\sigma > a$ e soddisfa, per tutti i $\sigma > \sigma_0$, la disuguaglianza del tipo (20):

$$|\mathcal{F}_1(p)| = \frac{|\mathcal{F}(p)|}{|p-b|^k} \leqslant \frac{C_\varepsilon(\sigma_0)\, e^{\varepsilon\sigma}\,(1+|p|^m)}{|p-a|^k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_\varepsilon(\sigma_0)\, e^{\varepsilon\sigma}}{|p-a|^{k-m}} \frac{1+|p|^m}{|p-a|^m} \leqslant \frac{C'_\varepsilon(\sigma_0)\, e^{\varepsilon\sigma}}{|p-a|^{k-m}}, \quad k-m > 1.$$

Per quanto è stato dimostrato, esiste una funzione continua f_1 appartenente a $\mathcal{D}'_+(\sigma_0)$ tale che

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{F}_1(p)\, e^{pt}\, dp \leftrightarrow \mathcal{F}_1(p), \quad \sigma > \sigma_0. \tag{24}$$

Da ciò, utilizzando la formula (12), troviamo che

$$\left(\frac{d}{dt} - b\right)^k f_1(t) \leftrightarrow (p-b)^k \mathcal{F}_1(p) = \mathcal{F}(p), \quad \sigma > \sigma_0.$$

Introducendo la notazione

$$f(t) = \left(\frac{d}{dt} - b\right)^k f_1(t),$$

concludiamo che $f \in \mathcal{D}'_+(\sigma_0)$ (si veda il § 10.2), $f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)$ per $\sigma > \sigma_0$, e, in base alla (24), è valida la rappresentazione (19). Si deve solo notare che la funzione generalizzata costruita f, appartenente a

$\mathscr{D}'_+(\sigma_0)$ (per qualunque $\sigma_0 > a$), è unica e perciò non dipende dalla scelta dei parametri ausiliari $b \leqslant a$, $\sigma_0 > a$ e $k > m(\sigma_0) + 1$. Ma allora $f \in \mathscr{D}'_+(a)$ e $f(t) \leftrightarrow F(p)$, per $\sigma > a$. Il teorema è dimostrato.

Corollario. *Supponiamo che la funzione* $\mathscr{F}(\sigma + i\omega)$ *sia assolutamente integrabile rispetto a* ω *su* R^1 *per un certo* $\sigma > a$. *Allora è valida la formula d'inversione classica*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathscr{F}(p)\, e^{pt}\, dp.$$

Per dimostrazione, è sufficiente notare che nella formula (19) è possibile la derivazione sotto il segno d'integrale k volte (si veda il § 1.5), e poi si può utilizzare l'identità

$$\left(\frac{d}{dt} - b\right)^k e^{pt} = (p-b)^k e^{pt}.$$

Il teorema dimostrato stabilisce una corrispondenza biunivoca $\leftrightarrow$ tra le algebre $\mathscr{D}'_+(a)$ e $H(a)$, ed inoltre questa corrispondenza è lineare e moltiplicativa. Queste algebre sono dette *isomorfe*.

Osservazione. Utilizzando la tecnica delle funzioni generalizzate, si può dimostrare [1] che ogni funzione $\mathscr{F}$ appartenente all'algebra $H(a)$ soddisfa una restrizione di crescita più forte di quella della (18): per $\sigma_0 > a$ qualsiasi esistono numeri $C(\sigma_0) \geqslant 0$ e $M = M(\sigma_0) \geqslant 0$ tali che

$$|\mathscr{F}(p)| \leqslant C(\sigma_0)\,(1 + |p|^M), \quad \sigma > \sigma_0.$$

5. Esempi ed applicazioni.

a) $\delta^{(m)}(t - \tau) \leftrightarrow p^m e^{-\tau p}$, p è un numero arbitrario, $\tau \geqslant 0$, $m = 0, 1; \ldots$ (25)

Questo segue dalle formule (10) e (12).

b) $\dfrac{\theta(t)\, t^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{\lambda t} \leftrightarrow \dfrac{1}{(p-\lambda)^m}$, $\sigma > \operatorname{Re}\lambda$, $m = 0, 1, \ldots$ [2]. (26)

Segue dalle formule (3), (11) e (13).

c) Supponiamo che f appartenga a $\mathscr{D}'_+(a)$, $f \in C^n(t \geqslant 0)$ e $f \leftrightarrow \mathscr{F}$, $\sigma > a$. Si ha allora

$$\{f^{(n)}(t)\} \leftrightarrow p^n \mathscr{F}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0)\, p^{n-k-1}, \quad \sigma > a. \tag{27}$$

---

[1] Si veda Vladimirov [2], § 26.

[2] La relazione $\theta(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p}$ va spesso scritta come segue: $1 \leftrightarrow \dfrac{1}{p}$; il che non è rigorosamente corretto.

Infatti, utilizzando la formula (14) del § 6.4 n volte e tenendo inoltre conto del fatto che $f(t) = 0$ per $t < 0$, si ottiene

$$\{f^{(n)}(t)\} = f^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0)\,\delta^{(n-k-1)}(t),$$

da cui, in virtù delle (12) e (25), segue la formula (27).

d) Supponiamo che f e g siano funzioni localmente integrabili appartenenti a $\mathscr{D}'_+(a)$, $g \in C^1$ $(t \geqslant 0)$ e $f \leftrightarrow \mathscr{F}$, $g \leftrightarrow \mathscr{G}$, $\sigma > a$. Si ha allora

$$\int_0^t f(\tau)\{g'(t-\tau)\}\,d\tau \leftrightarrow p\mathscr{F}(p)\mathscr{G}(p) - g(+0)\mathscr{F}(p), \quad \sigma > a. \tag{28}$$

Infatti,

$$g' = \{g'(t)\} + g(+0)\,\delta(t), \quad f * g \leftrightarrow \mathscr{F}\mathscr{G}, \quad \sigma > a.$$

e perciò

$$\int_0^t f(\tau)\{g'(t-\tau)\}\,d\tau = f * \{g'\} = f * [g' - g(+0)\,\delta] =$$

$$= f * g' - g(+0)\,f * \delta = (f * g)'(t) - g(+0)\,f(t) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow p\mathscr{F}(p)\mathscr{G}(p) - g(+0)\mathscr{F}(p), \quad \sigma > a.$$

La formula (28) si dice *integrale di Duhamel* ed è spesso utilizzata nella teoria dei circuiti elettrici.

e) Le equazioni nell'algebra $\mathscr{D}'_+(a)$ hanno la forma

$$g * u = f, \tag{29}$$

dove g e f sono elementi $\mathscr{D}'_+(a)$. Tutti i ragionamenti del § 7.8 relativi all'algebra $\mathscr{D}'_+$ sono validi anche per l'algebra $\mathscr{D}'_+(a)$. In aggiunta al § 7.8 rileviamo il seguente risultato:

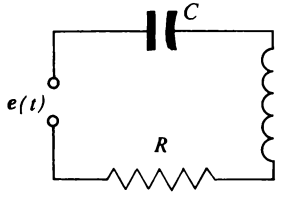


Fig. 39.

Affinché un operatore $g *$ abbia un inverso $g^{-1} *$ nell'algebra $\mathscr{D}'_+(a)$ è necessario e sufficiente che $\frac{1}{\mathscr{G}(p)} \in H(a)$, *dove* $g(t) \leftrightarrow \mathscr{G}(p)$, *per* $\sigma > a$; *si ha inoltre* $g^{-1}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\mathscr{G}(p)}$ *per* $\sigma > a$.

Quest'asserzione segue direttamente dalle uguaglianze equivalenti (in virtù della (15)) $g * g^{-1} = \delta$ e $\mathscr{G}(p)\,\frac{1}{\mathscr{G}(p)} = 1$ per $\sigma > a$, e dalla corrispondenza biunivoca tra gli elementi delle algebre $\mathscr{D}'_+(a)$ e $H(a)$ stabilita nel teorema fondamentale.

f) Consideriamo un circuito elettrico composto da una resistenza R, da una induttanza L, da una capacità C e da una sorgente di f.e.m.

dipendente dal tempo ed inserita all'istante $t = 0$ (fig. 39). Allora, in conformità con le leggi di Kirchhoff, l'intensità di corrente elettrica $i(t)$ nel circuito soddisfa l'equazione integro-differenziale

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = e(t),$$

o

$$g * i = e, \tag{30}$$

dove

$$g(t) = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\theta(t) \in \mathscr{D}'_+(0).$$

Troviamo l'operatore inverso $a* = g^{-1}*$. Abbiamo

$$g(t) \leftrightarrow Lp + R + \frac{1}{Cp}, \quad \sigma > 0,$$

e pertanto, in virtù degli esempi e) e b), si ha

$$a(t) \leftrightarrow \frac{1}{Lp+R+\frac{1}{Cp}} = \frac{p}{L(p-p_+)(p-p_-)} =$$

$$= \frac{1}{L(p_+-p_-)}\left(\frac{p_+}{p-p_+} - \frac{p_-}{p-p_-}\right) \leftrightarrow \frac{\theta(t)}{2L\omega i}(p_+e^{p_+t} - p_-e^{p_-t}),$$

$$p_\pm = -\frac{R}{2L} \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Dunque,

$$a(t) = \frac{\theta(t)}{L\omega}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\omega\cos\omega t - \frac{R}{2L}\sin\omega t\right),$$

e la soluzione dell'equazione (30) si esprime (si veda il § 7.8) mediante la seguente formula:

$$i(t) = a * e = \frac{1}{L\omega}\int_0^t e^{-\frac{R}{2L}(t-\tau)}\left[\omega\cos\omega(t-\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{R}{2L}\sin\omega(t-\tau)\right] a(\tau)\,d\tau. \tag{31}$$

La formula (31) nella forma esplicita esprime la *reazione*, o la *risposta*, $i(t)$, del circuito al segnale d'entrata $e(t)$. Nella teoria dei circuiti elettrici $g(t)$ è detto *impedenza* (resistenza generalizzata) ed $a(t)$ si dice *ammettenza* (conduttanza generalizzata). È facile vedere che $a * \theta = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$ è la risposta del circuito sul «gradino unitario» θ (funzione d'inserzione).

g) Troviamo l'inverso $\mathscr{E} *$ all'operatore $q*$ dove

$$q(t) = \delta^{(m)}(t) + a_1\delta^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m\delta(t), \tag{32}$$

cioè

$$\mathscr{E}^{(m)} + a_1\mathscr{E}^{(m-1)} + \ldots + a_m\mathscr{E} = \delta.$$

In virtù della (25) abbiamo

$$q(t) \leftrightarrow Q(p) = p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_m = (p-\lambda_1)^{k_1} \ldots (p-\lambda_n)^{k_n},$$

e perciò, in virtù dell'esempio e), abbiamo

$$\mathscr{E}(t) \leftrightarrow \frac{1}{Q(p)}, \quad \sigma > a = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_j. \tag{33}$$

Sviluppando $\frac{1}{Q(p)}$ in frazioni parziali

$$\frac{1}{Q(p)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{c_{j,\,k_j}}{(p-\lambda_j)^{k_j}} + \ldots + \frac{c_{j,\,1}}{p-\lambda_j} \right],$$

ed utilizzando la (26), si ottiene dalla (33)

$$\mathscr{E}(t) = \theta(t) \sum_{j=1}^{n} \left[c_{j,\,k_j} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} + \ldots + c_{j,\,1} \right] e^{\lambda_j t}. \tag{34}$$

In virtù dell'unicità della soluzione fondamentale dell'operatore q^* nell'algebra $\mathscr{D}'_+$ (si veda il § 7.8) la funzione $\mathscr{E}(t)$ coincide con la soluzione fondamentale costruita nel § 6.4, esempio f) (nel caso di coefficienti costanti).

6. Esercizi. a) Sia $f_\alpha(t)$, $-\infty < \alpha < \infty$, la funzione generalizzata introdotta nel § 7.8. Dimostrare che

$$f_\alpha(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^\alpha}, \quad \sigma > 0,$$

dove per p^α si prende il suo braccio nel semipiano $\sigma > 0$ per il quale $p^\alpha > 0$ per p positivi;

b) $f_\alpha(t)\, e^{\lambda t} \leftrightarrow \frac{1}{(p-\lambda)^\alpha}$, $\sigma > \operatorname{Re} \lambda$;

c) $\theta(t)\, e^{i\omega t} \leftrightarrow \frac{1}{p-i\omega}$, $\theta(t)\, e^{-i\omega t} \leftrightarrow \frac{1}{p+i\omega}$, $\sigma > 0$;

d) $\theta(t) \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\theta(t) \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\sigma > 0$.

e) Sia $|a_k| \leqslant c\,(1+k)^m$, $k = 0, 1, \ldots$. Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(t-k) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kp}, \quad \sigma > 0.$$

f) Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo T (assolutamente) integrabile sul periodo (fig. 40). Dimostrare che

$$\theta(t)\, f(t) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad \sigma > 0.$$

g) Verificare che

(1) $(\theta \cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$, $\mathscr{E}(t) = \delta'(t) + \theta(t)$;

(2) $(\theta t \cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$, $\mathscr{E}(t) = \delta''(t) + 3\delta(t) + 4\theta(t) \operatorname{sin\,h} t$;

(3) $\mathscr{E} + 2(\theta \cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$, $\mathscr{E}(t) = \delta(t) - 2\theta(t) e^t (1 - t)$;

(4) $\theta * u_1 + \delta' * u_2 = \delta(t)$, $\delta * u_1 + \delta' * u_2 = 0$,
$u_1(t) = -\delta(t) - \theta(t) e^t$, $u_2(t) = \theta(t) e^t$.

h) Utilizzando la formula (27), dimostrare che

(1) $u' + au = f(t)$, $u(0) = u_0$,

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)\, e^{-a(t-\tau)}\, d\tau + u_0 e^{-at};$$

(2) $u'' + \omega^2 u = f(t)$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$,

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega (t-\tau)\, d\tau + u_0 \cos \omega t + u_1 \frac{\sin \omega t}{\omega};$$

in questo caso si è supposto che $f \in C\ (t \geqslant 0) \cap \mathscr{D}'_+(a)$.

i) Sia $\mathscr{E}_1$ la soluzione dell'equazione $g * \mathscr{E}_1 = \theta$ nell'algebra $\mathscr{D}'_+(a)$, ed inoltre $\mathscr{E}_1 \in C^1\ (t \geqslant 0)$. Utilizzando l'integrale di Duhamel (28) dimostrare che la

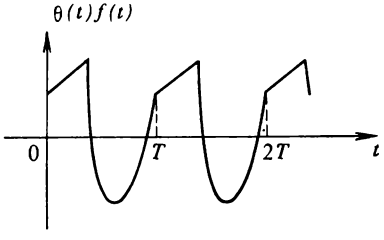


Fig. 40.

soluzione, nell'algebra $\mathscr{D}'_+(a)$, dell'equazione $g * u = f$, in cui f è una funzione localmente integrabile appartenente a $\mathscr{D}'_+(a)$, è espressa con la seguente formula:

$$u(t) = \mathscr{E}_1(+0) f(t) + \int_0^t f(\tau) \{\mathscr{E}'_1(t-\tau)\}\, d\tau.$$

j) Dimostrare che

$$\theta(t) J_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \sigma > 0.$$

k) Utilizzando l'esercizio j), dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sin t = \int_0^t J_0(t-\tau) J_0(\tau)\, d\tau.$$

III. Soluzioni fondamentali e problema di Cauchy

In questo capitolo la teoria di funzioni generalizzate viene applicata alla costruzione di soluzioni fondamentali ed alla soluzione del problema di Cauchy per l'equazione d'onda e per l'equazione di conduzione termica. Perciò il problema di Cauchy viene considerato in un contesto generalizzato il che permette di includere condizioni iniziali nelle sorgenti che agiscono istantaneamente (del tipo di strato semplice e doppio sulla superficie $t = 0$). In questo modo il problema di Cauchy è ridotto alla ricerca di una soluzione dell'equazione (generalizzata) data (con il secondo membro modificato) tale che s'annulli per $t < 0$. L'ultimo problema viene risolto con il metodo standard di sommatoria delle perturbazioni generate da ogni punto della sorgente, di modo che la sua soluzione sia rappresentata nella forma della convoluzione della soluzione fondamentale con il secondo membro.

Viene anche studiato il problema di Cauchy per l'equazione iperbolica a due variabili (metodo di Riemann).

§ 11. *Soluzioni fondamentali degli operatori lineari differenziali*

Per costruire le soluzioni fondamentali degli operatori lineari differenziali a coefficienti costanti si utilizza il metodo di trasformazione di Fourier. È naturale che, con questo metodo si possono ottenere le sole soluzioni fondamentali di crescita lenta.

1. Soluzioni generalizzate delle equazioni differenziali lineari. Sia

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f(x), \quad f \in \mathscr{D}', \tag{1}$$

un'equazione differenziale lineare di ordine m a coefficienti $a_\alpha \in \in C^\infty(R^n)$. Introducendo l'operatore differenziale

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\, D^\alpha,$$

riscriviamo quest'equazione nella forma

$$L(x, D)\, u = f(x). \tag{1'}$$

Ogni funzione generalizzata $u \in \mathscr{D}'$ che soddisfa l'equazione (1) in una regione G nel senso generalizzato, cioè

$$(L(x, D)\, u, \varphi) = (f, \varphi) \tag{2}$$

per qualunque $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ (si veda il § 5.2), è detta *soluzione generalizzata dell'equazione* (1) in G. L'equazione (2) è equivalente a

$$(u, L^*(x, D)\varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(G), \tag{2'}$$

dove

$$L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi). \tag{3}$$

Infatti,

$$(L(x, D)u, \varphi) = \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha u, \varphi\Big) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (a_\alpha D^\alpha u, \varphi) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{m} (D^\alpha u, a_\alpha \varphi) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha (a_\alpha \varphi)) =$$

$$= \Big(u, \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)\Big) = (u, L^*(x, D)\varphi).$$

È chiaro che ogni soluzione classica è anche una soluzione generalizzata. Formuliamo l'enunciato inverso sotto forma del seguente lemma.

Lemma. *Se $f \in C(G)$ e se la soluzione generalizzata $u(x)$ dell'equazione* (1) *nel dominio G appartiene alla classe $C^m(G)$, questa soluzione è anche la soluzione classica dell'equazione nella regione G.*

Dimostrazione. Visto che $u \in \mathscr{D}' \cap C^m(G)$, le derivate generalizzate e classiche della funzione u, incluso l'ordine m, coincidono nella regione G (si veda il § 6.1). Essendo u la soluzione generalizzata dell'equazione (1) nella regione G, la funzione $L(x, D)\, u - f$, continua in G, si annulla in G nel senso delle funzioni generalizzate. Conformemente al lemma di Du Bois Reymond (si veda il § 5.6), $L(x, D)\, u(x) - f(x) = 0$ in tutti i punti di G e quindi u soddisfa l'equazione (1) nella regione G nel senso classico. Il lemma è dimostrato.

2. Soluzioni fondamentali. Supponiamo che L sia un operatore differenziale a coefficienti costanti, $a_\alpha(x) = a_\alpha$:

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha, \quad L^*(D) = L(-D). \tag{4}$$

Una funzione generalizzata $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'$ che soddisfa in R^n l'equazione

$$L(D)\, \mathscr{E} = \delta(x) \tag{5}$$

si dice *soluzione fondamentale* (*funzione d'influenza*) dell'operatore $L(D)$.

Una soluzione fondamentale $\mathscr{E}(x)$ dell'operatore $L(D)$, in generale, non è unica; questa soluzione si determina a meno di un termine $\mathscr{E}_0(x)$ che è una soluzione arbitraria dell'equazione omogenea $L(D)\,\mathscr{E}_0 = 0$.

Infatti, la funzione generalizzata $\mathscr{E}(x) + \mathscr{E}_0(x)$ è anch'essa una soluzione fondamentale dell'operatore $L(D)$:

$$L(D)\,(\mathscr{E} + \mathscr{E}_0) = L(D)\,\mathscr{E} + L(D)\,\mathscr{E}_0 = \delta(x).$$

Lemma. *Affinché una funzione generalizzata $\mathscr{E}$ appartenente a $\mathscr{S}'$ sia una funzione fondamentale dell'operatore $L(D)$, è necessario e sufficiente che la sua trasformata di Fourier $F[\mathscr{E}]$ soddisfi l'equazione*

$$L(-i\xi)\,F[\mathscr{E}] = 1, \tag{6}$$

dove

$$L(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Dimostrazione. Sia $\mathscr{E} \in \mathscr{S}'$ una soluzione fondamentale dell'operatore $L(D)$. Applicando la trasformazione di Fourier ad entrambi i membri dell'uguaglianza (5), si ottiene

$$F[L(D)\,\mathscr{E}] = F[\delta] = 1. \tag{7}$$

Tenendo conto della formula (16) del § 9.3, abbiamo

$$F[L(D)\,\mathscr{E}] = F\Big[\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha \mathscr{E}\Big] = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha F[D^\alpha \mathscr{E}] =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha (-i\xi)^\alpha F[\mathscr{E}] = L(-i\xi)\,F[\mathscr{E}]; \tag{8}$$

di cui e dalla (7) segue che $F[\mathscr{E}]$ soddisfa l'equazione (6).

Inversamente, se $\mathscr{E} \in \mathscr{S}'$ soddisfa l'equazione (6), allora, in virtù della (8), $\mathscr{E}$ soddisfa l'equazione (7), da cui segue che $\mathscr{E}$ soddisfa l'equazione (5), cioè è una soluzione fondamentale dell'operatore $L(D)$. Il lemma è dimostrato.

Il lemma dimostrato riduce il problema della costruzione di soluzioni fondamentali di crescita lenta degli operatori differenziali lineari a coefficienti costanti alla risoluzione in $\mathscr{S}'$ di equazioni algebriche della forma

$$P(\xi)\,X = 1, \tag{9}$$

dove P è un polinomio arbitrario.

Come si vede dall'equazione (9), ognuna delle sue soluzioni appartenenti a $\mathscr{D}'$ (se questa soluzione esiste) deve coincidere con la funzione $1/P(\xi)$ fuori dell'insieme N_P degli zeri del polinomio $P(\xi)$,

e cioè

$$N_P = [\xi\colon P(\xi) = 0].$$

Ne segue che, se $N_P \neq \varnothing$, la soluzione dell'equazione (9) non è unica: le diverse soluzioni differiscono l'una dall'altra per una funzione generalizzata a supporto in N_P. Come esempio, di differenti soluzioni dell'equazione $\xi X = 1$ servono le funzioni generalizzate

$$\frac{1}{\xi + i0}, \quad \frac{1}{\xi - i0} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}\frac{1}{\xi},$$

che differiscono l'una dall'altra per un termine di tipo costante $\delta(\xi)$ (si veda le formule di Sochotskij (15) e (15′) del § 5.8).

Se la funzione $1/P(\xi)$ è localmente integrabile in R^n, questa funzione (o, più precisamente, il funzionale regolare definito da questa funzione) è una soluzione, in $\mathcal{S}'$, dell'equazione (9). Se, invece, la funzione $1/P(\xi)$ non è localmente integrabile in R^n, sorge il problema non banale di costruire in $\mathcal{S}'$ una soluzione dell'equazione (9). Hörmander [2] ha dimostrato che l'equazione (9) è sempre risolvibile in $\mathcal{S}'$ se $P(\xi) \not\equiv 0$.

Denotiamo con reg $(1/P(\xi))$ una qualunque soluzione dell'equazione (9) appartenente a $\mathcal{S}'$. La costruzione di questa soluzione dipende sostanzialmente dalla struttura dell'insieme N_P e può essere realizzata per ogni polinomio P concreto.

Dunque, l'equazione (6) è sempre risolvibile in $\mathcal{S}'$, e cioè

$$F[\mathscr{E}] = \operatorname{reg}\frac{1}{L(-i\xi)}.$$

Di conseguenza, *ogni operatore differenziale lineare $L(D)$ a coefficienti costanti ha una soluzione fondamentale di crescita lenta e questa soluzione è data dalla formula*

$$\mathscr{E} = F^{-1}\left[\operatorname{reg}\frac{1}{L(-i\xi)}\right] = \frac{1}{(2\pi)^n} F\left[\operatorname{reg}\frac{1}{L(i\xi)}\right]. \tag{10}$$

3. Equazioni con il secondo membro. Mediante una soluzione fondamentale $\mathscr{E}(x)$ dell'operatore $L(D)$ si può costruire una soluzione dell'equazione

$$L(D)\, u = f(x) \tag{11}$$

con un secondo membro arbitrario f. Più precisamente, è valido il seguente

Teorema. *Supponiamo che $f \in \mathcal{D}'$ sia tale che la convoluzione $\mathscr{E} * f$ esiste in $\mathcal{D}'$. In questo caso l'equazione* (11) *ha una soluzione in $\mathcal{D}'$ che è data dalla formula*

$$u = \mathscr{E} * f. \tag{12}$$

Questa soluzione è unica nella classe delle funzioni generalizzate appartenenti a $\mathcal{D}'$ per le quali esiste una convoluzione con $\mathscr{E}$.

Dimostrazione. Utilizzando la formula di derivazione della convoluzione (si veda la formula (20) del § 7.5) e tenendo conto dell'uguaglianza (5), si ottiene

$$L(D)(\mathscr{E} * f) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha (\mathscr{E} * f) =$$

$$= \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha \mathscr{E} \right) * f = L(D)\mathscr{E} * f = \delta * f = f.$$

Perciò la formula $u = \mathscr{E} * f$ è una soluzione dell'equazione (11).

Dimostriamo l'unicità di una soluzione dell'equazione (11) nella classe di quelle funzioni generalizzate appartenenti a $\mathscr{D}'$ per le quali la convoluzione con $\mathscr{E}$ esiste in $\mathscr{D}'$. Perciò è sufficiente dimostrare che la corrispondente equazione omogenea

$$L(D)\, u = 0$$

ha solo una soluzione nulla in questa classe (si veda il § 1.11). E così, in virtù del fatto che

$$u = u * \delta = u * L(D)\mathscr{E} = L(D)\, u * \mathscr{E} = 0.$$

Il teorema è dimostrato.

Corollario. *Se $u \in \mathscr{D}'$ e la convoluzione $u * \mathscr{E}$ esiste in $\mathscr{D}'$, è valida l'uguaglianza*

$$u = L(D)\, u * \mathscr{E}. \tag{13}$$

Il significato fisico della soluzione $u = \mathscr{E} * f$ è il seguente. Rappresentiamo la sorgente $f(x)$ sotto forma di una « somma » di sorgenti puntiformi $f(\xi)\,\delta(x - \xi)$ (si veda l'osservazione alla fine del § 7.4):

$$f(x) = \delta * f = \int f(\xi)\,\delta(x - \xi)\, d\xi.$$

In base alla (5) ogni sorgente puntiforme $f(\xi)\,\delta(x - \xi)$ definisce l'influenza di $f(\xi)\,\mathscr{E}(x - \xi)$. Per questa ragione la soluzione

$$u(x) = \mathscr{E} * f = \int f(\xi)\,\mathscr{E}(x - \xi)\, d\xi.$$

è *la sovrapposizione di queste funzioni d'influenza.*

4. Metodo di discesa. Consideriamo un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti nello spazio R^{n+1} delle variabili $(x, t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$:

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f(x) \cdot \delta(t), \quad f \in \mathscr{D}'(R^n), \tag{14}$$

dove

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{q=1}^{p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} L_q(D) + L_0(D)$$

e $L_q(D)$ sono operatori differenziali nelle variabili x.

Supponiamo che la funzione generalizzata u, appartenente a $\mathscr{D}'(R^{n+1})$, ammetta un prolungamento sulle funzioni della forma $\varphi(x)\,1(t)$, dove $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$, nel seguente senso: comunque sia la successione di funzioni fondamentali $\eta_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, appartenenti a $\mathscr{D}(R^1)$, convergente all'unità in R^1 (si veda il § 7.4), esiste il limite

$$\lim_{k\to\infty} (u,\ \varphi(x)\,\eta_k(t)) = (u,_{.}\varphi(x)\,1(t)) \tag{15}$$

e questo limite non dipende dalla successione $\{\eta_k\}$.

Denotiamo il funzionale (15) con u_0, cioè

$$(u_0,\ \varphi) = (u,\ \varphi(x)\,1(t)) = \lim_{k\to\infty} (u,\ \varphi(x)\,\eta_k(t)),\ \varphi \in \mathscr{D}(R^n). \tag{16}$$

Evidentemente, per ogni k il funzionale $(u,\ \varphi(x)\,\eta_k(t))$ è lineare e continuo su $\mathscr{D}(R^n)$, cioè appartiene a $\mathscr{D}'(R^n)$. Quindi, secondo il teorema della completezza dello spazio $\mathscr{D}'(R^n)$ (si veda il § 5.4), il funzionale limite u_0 appartiene anch'esso a $\mathscr{D}'(R^n)$.

Riportiamo qui due esempi di costruzione del prolungamento u_0.

a) Sia $u(x, t)$ tale che $\int |u(x, t)|\,dt$ sia una funzione localmente integrabile in R^n. Allora $u_0(x)$ è una funzione localmente integrabile in R^n ed è rappresentata dall'integrale

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\,dt. \tag{17}$$

Infatti, in questo caso la funzione $u(x, t)$ è localmente integrabile in R^{n+1} e, in virtù dei teoremi di Lebesgue e di Fubini (si veda il § 1.4), il limite

$$\lim_{k\to\infty} (u, \varphi(x)\,\eta_k(t)) = \lim_{k\to\infty} \int u(x,\ t)\,\varphi(x)\,\eta_k(t)\,dx\,dt =$$

$$= \int u(x,\ t)\,\varphi(x)\,dx\,dt = \int \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} u(x,\ t)\,dt\,dx,$$

esiste per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ e non dipende dalla successione $\{\eta_k\}$. Da ciò, in virtù della (16), deriva la formula (17).

b) Sia $u = f(x)\cdot\delta(t)$, dove $f \in \mathscr{D}'(R^n)$. Si ha allora $u_0 = f$, poiché

$$(u_0,\ \varphi) = \lim_{k\to\infty} (u,\ \varphi(x)\,\eta_k(t)) = \lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot\delta(t),\ \varphi(x)\,\eta_k(t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (f(x),\ \varphi(x)\,\eta_k(0)) = (f,\ \varphi),\quad \varphi \in \mathscr{D}(R^n).$$

Teorema. *Se la soluzione* $u \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$ *dell'equazione* (14) *ammette il prolungamento* (16), *la funzione generalizzata* u_0 *appartenente a* $\mathscr{D}'(R^n)$ *soddisfa l'equazione*

$$L_0(D)\,u_0 = f(x). \tag{18}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\eta_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, sia una successione di funzioni appartenenti a $\mathscr{D}(R^1)$ convergente all'unità in R^1. Allora per $q = 1, 2, \ldots$ le successioni delle funzioni $\eta_k(t) + \eta_k^{(q)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, convergono anch'esse all'unità in R^1 e di conseguenza, per tutte le φ appartenenti a $\mathscr{D}(R^n)$ (cfr. il § 7.5, proprietà c)) si ha

$$\lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)\eta_k^{(q)}(t)) = \lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)[\eta_k(t) + \eta_k^{(q)}(t)]) - \\ - \lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)\eta_k(t)) = (u_0, \varphi) - (u_0, \varphi) = 0. \quad (19)$$

Tenendo conto della (19), verifichiamo che la funzione generalizzata u_0 soddisfi l'equazione (18):

$$(L_0(D)u_0, \varphi) = (u_0, L_0(-D)\varphi) = \lim_{k\to\infty}(u, L_0(-D)\varphi(x)\eta_k(t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(u, L_0(-D)\varphi(x)\eta_k(t) + \sum_{q=1}^{p}(-1)^q L_q(-D)\varphi(x)\eta_k^{(q)}(t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(u, L\left(-D, -\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x)\eta_k(t)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)u, \varphi(x)\eta_k(t)\right) = \lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot\delta(t), \varphi(x)\eta_k(t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(f(x), \varphi(x)\eta_k(0)) = (f, \varphi).$$

Il teorema è dimostrato.

Il metodo che abbiamo elaborato per ottenere la soluzione $u_0(x)$ dell'equazione (18) in n variabili nei termini della soluzione $u(x, t)$ dell'equazione (14) in $n + 1$ variabili si dice *metodo di discesa rispetto alla variabile t.*

Il metodo di discesa è particolarmente utile per costruire soluzioni fondamentali. Infatti, applicando il teorema dimostrato, per $f = \delta(x)$, si ottiene la seguente asserzione: *se* $\mathscr{E}(x, t)$ *è una soluzione fondamentale dell'operatore* $L(D, \partial/\partial t)$ *e ammette il prolungamento* $\mathscr{E}_0$ *del tipo* (16), *la funzione generalizzata*

$$(\mathscr{E}_0, \varphi) = (\mathscr{E}, \varphi(x)1(t)), \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^n), \quad (20)$$

è una soluzione fondamentale dell'operatore $L_0(D)$; *in particolare, se* $\mathscr{E}(x, t)$ *è tale che la funzione* $\int |\mathscr{E}(x, t)|\,dt$ *è localmente integrabile in* R^n, *si ha*

$$\mathscr{E}_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(x, t)\,dt. \quad (21)$$

Le soluzioni fondamentali $\mathscr{E}_0$ e $\mathscr{E}$ soddisfano la seguente relazione:

$$\mathscr{E}_0(x)\cdot 1(t) = \mathscr{E} * [\delta(x)\cdot 1(t)].$$

Il significato fisico di questa formula consiste nel fatto che $\mathscr{E}_0(x)$ è una perturbazione (indipendente da t) generata dalla sorgente $\delta(x) \cdot 1(t)$ concentrata lungo l'asse t (cfr. il § 11.3).

5. Soluzione fondamentale di un operatore differenziale lineare con derivate ordinarie.

$$L\mathscr{E} \equiv \frac{d^n\mathscr{E}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}\mathscr{E}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n\mathscr{E} = \delta(t).$$

Nel § 6.4, esempio f) (si veda anche il § 10.5, esempio g)), è stato dimostrato che la soluzione fondamentale di quest'operatore è data dalla formula

$$\mathscr{E}(t) = \theta(t)\, Z(t),$$

dove $Z(t)$ soddisfa l'equazione omogenea $LZ = 0$ e le condizioni iniziali

$$Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1.$$

In particolare, le funzioni

$$\mathscr{E}(t) = \theta(t)\, e^{-at}, \tag{22}$$

$$\mathscr{E}(t) = \theta(t) \frac{\sin at}{a} \tag{23}$$

sono rispettivamente le soluzioni fondamentali degli operatori

$$\frac{d}{dt} + a, \quad \frac{d^2}{dt^2} + a^2.$$

6. Soluzione fondamentale dell'operatore di conduzione termica.

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - a^2\Delta\mathscr{E} = \delta(x, t). \tag{24}$$

Nell'esempio f) del § 6.5 è stato mostrato che la soluzione dell'equazione (24) è espressa mediante la formula

$$\mathscr{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} \tag{25}$$

e, di conseguenza, questa funzione è la soluzione fondamentale dell'operatore di conduzione termica.

Mediante il metodo di trasformazione di Fourier introduciamo la formula (25). Per farlo, applicchiamo la trasformazione di Fourier F_x (si veda il § 9.2) all'uguaglianza (24), il che ci dà:

$$F_x\left[\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}\right] - a^2 F_x[\Delta\mathscr{E}] = F_x[\delta(x, t)]$$

ed utilizziamo le formule (21) e (22) del § 9.3:

$$F_x[\delta(x, t)] = F_x[\delta(x) \cdot \delta(t)] = F[\delta](\xi) \cdot \delta(t) = 1(\xi) \cdot \delta(t),$$

$$F_x\left[\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t} F_x[\mathscr{E}], \quad F_x[\Delta\mathscr{E}] = -|\xi|^2 F_x[\mathscr{E}].$$

In definitiva, per la funzione generalizzata $\widetilde{\mathscr{E}}(\xi, t) = F_x[\mathscr{E}](\xi, t)$ si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{\partial \widetilde{\mathscr{E}}(\xi, t)}{\partial t} + a^2 |\xi|^2 \widetilde{\mathscr{E}}(\xi, t) = 1(\xi) \cdot \delta(t). \tag{26}$$

Utilizzando la formula (22), con la sostituzione di a con $a^2 | \xi |^2$, concludiamo che la funzione

$$\widetilde{\mathscr{E}}(\xi, t) = \theta(t) e^{-a^2|\xi|^2 t}$$

è la soluzione dell'equazione (26) in $\mathscr{S}'$. Da ciò, applicando la trasformazione di Fourier inversa F_ξ^{-1} ed utilizzando la formula (38) del § 9.7, si ottiene l'uguaglianza (25):

$$\mathscr{E}(x, t) = F_\xi^{-1}[\widetilde{\mathscr{E}}(\xi, t)] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \int e^{-a^2|\xi|^2 t - i(\xi, x)} d\xi =$$

$$= \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

7. Soluzione fondamentale dell'operatore d'onda.

$$\Box_a \mathscr{E}_n = \delta(x, t). \tag{27}$$

Applicando all'uguaglianza (27) la trasformazione di Fourier F_x e procedendo come nella sezione precedente, al posto dell'equazione (26) otteniamo, per la funzione generalizzata $F_x[\mathscr{E}_n] = \widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi, t)$, la seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi, t)}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi, t) = 1(\xi) \cdot \delta(t). \tag{28}$$

Utilizzando la formula (23) nella quale sostituiamo a con $a | \xi |$, concludiamo che la funzione

$$\widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi, t) = \theta(t) \frac{\sin a |\xi| t}{a |\xi|}$$

è la soluzione della (28) in $\mathscr{S}'$. Di conseguenza,

$$\mathscr{E}_n(x, t) = F_\xi^{-1}[\widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi, t)] = \theta(t) F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a |\xi| t}{a |\xi|}\right]. \tag{29}$$

Sia $n = 3$. Allora dalla formula (40) del § 9.7 deduciamo che

$$F^{-1}\left[\frac{\sin a |\xi| t}{|\xi|}\right] = \frac{1}{4\pi a t} \delta_{S_{at}}(x),$$

da cui e dalla (29) otteniamo

$$\mathscr{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) \equiv \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2), \tag{30}$$

dove la funzione generalizzata $\mathscr{E}_3$ è soggetta alla regola

$$(\mathscr{E}_3,\ \varphi)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty(\delta_{S_{at}},\ \varphi)\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\frac{1}{t}\int_{S_{at}}\varphi\,(x,\ t)\,dS_x\,dt.\quad\varphi\in\mathscr{S}\,(R^4).\qquad(31)$$

Analogamente, utilizzando le formule (26) del § 9.6 e (43) del § 9.7, si ottiene (cfr. il § 6.5, esempio g))

$$\mathscr{E}_1\,(x,\ t)=\frac{1}{2a}\,\theta\,(at-|x|),$$
$$\mathscr{E}_2\,(x,\ t)=\frac{\theta\,(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}.\qquad(32)$$

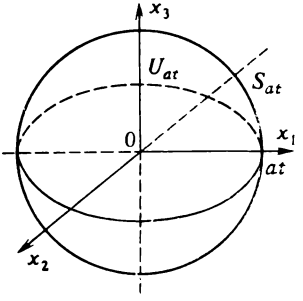


Fig. 41.

Per ottenere la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_2\ (x,\ t)$, $x=(x_1,\ x_2)$, utilizziamo lo stesso metodo di discesa rispetto alla variabile x_3 (si veda il § 11.4). Per ciò, si deve dimostrare che $\mathscr{E}_3\ (x,\ x_3,\ t)$ ammette il prolungamento (16) sulle funzioni della forma $\varphi\ (x,\ t)\ 1\ (x_3)$, in cui $\varphi\in\mathscr{D}\ (R^3)$.

Supponiamo che $\eta_k\in\mathscr{D}\ (R^1)$ e che la successione $\eta_k\ (x_3)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, tenda all'unità in R^1. Allora, utilizzando la (31), otteniamo per tutte le $\varphi\in\mathscr{D}\ (R^3)$

$$\lim_{k\to\infty}(\mathscr{E}_3,\ \varphi\,(x,\ t)\,\eta_k\,(x_3))=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\frac{1}{t}\int_{S_{at}}\varphi\,(x,\ t)\,\eta_k\,(x_3)\,dS\,dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\frac{1}{t}\int_{S_{at}}\varphi\,(x,\ t)\,dS\,dt=(\mathscr{E}_3,\ \varphi\,(x,\ t)\,1\,(x_3)),$$

di modo che questo limite esiste e non dipende dalla successione $\{\eta_k\}$. Da ciò, applicando la formula (20), concludiamo che, per tutte le $\varphi\in\mathscr{D}\ (R^3)$, si ha

$$(\mathscr{E}_2,\ \varphi)=(\mathscr{E}_3,\ \varphi\,(x,\ t)\,1\,(x_3))=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\frac{1}{t}\int_{S_{at}}\varphi\,(x,\ t)\,dS\,dt.$$

Trasformiamo l'ultimo integrale. Visto che φ non dipende da x_3, sostituendo l'integrale di superficie sulla sfera $S_{at}=[|x|^2+x_3^2=a^2t^2]$ con l'integrale doppio sul cerchio $|x|<at$ (fig. 41), si ot-

tiene

$$(\mathscr{E}_2,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^{\infty}\int_{|x|<at}\frac{\varphi(x,\ t)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\,dx\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int\frac{\theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\,\varphi(x,\ t)\,dx\,dt,$$

da cui segue la formula (32) per $\mathscr{E}_2$.

Analogamente, utilizzando la formula (21), otteniamo, mediante il metodo di discesa rispetto alla variabile x_2, la formula (32) per la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_1(x,\ t)$:

$$\mathscr{E}_1(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}_2(x,\ x_2,\ t)\,dx_2=\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(at-\sqrt{x^2+x_2^2})}{\sqrt{a^2t^2-x^2-x_2^2}}\,dx_2=$$

$$=\frac{\theta(at-|x|)}{\pi a}\int_0^{\sqrt{a^2t^2-x^2}}\frac{dx_2}{\sqrt{a^2t^2-x^2-x_2^2}}=$$

$$=\frac{\theta(at-|x|)}{\pi a}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2a}\,\theta(at-|x|).$$

8. Soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace.

$$\Delta\mathscr{E}_n=\delta(x). \tag{33}$$

Nel § 6.5, esempio d), abbiamo dimostrato che le funzioni

$$\mathscr{E}_2(x)=\frac{1}{2\pi}\ln|x|,\quad \mathscr{E}_n(x)=-\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}|x|^{-n+2},\quad n\geqslant 3, \tag{34}$$

sono soluzioni fondamentali dell'operatore di Laplace. Calcoliamo queste soluzioni fondamentali mediante il metodo della trasformazione di Fourier. Applicando la trasformazione di Fourier all'uguaglianza (33), otteniamo

$$-|\xi|^2\,F[\mathscr{E}_n]=1. \tag{35}$$

Sia $n=2$. Verifichiamo che la funzione generalizzata $-\mathscr{P}\frac{1}{|\xi|^2}$ (si veda il § 9.7, esempio d)) soddisfa l'equazione (35). Infatti,

$$\left(|\xi|^2\mathscr{P}\frac{1}{|\xi|^2},\ \varphi\right)=\left(\mathscr{P}\frac{1}{|\xi|^2},\ |\xi|^2\varphi\right)=$$

$$=\int_{|\xi|<1}\frac{|\xi|^2\varphi(\xi)-|\xi|^2\varphi(\xi)|_{\xi=0}}{|\xi|^2}\,d\xi+$$

$$+\int_{|\xi|>1}\frac{|\xi|^2\varphi(\xi)}{|\xi|^2}\,d\xi=\int\varphi(\xi)\,d\xi=(1,\ \varphi),\quad \varphi\in\mathscr{S}.$$

Di conseguenza, conformemente allo schema del § 11.2 possiamo porre

$$F[\mathscr{E}]_2=\operatorname{reg}\frac{1}{-|\xi|^2}=-\mathscr{P}\frac{1}{|\xi|^2}.$$

Da ciò, utilizzando la formula (41) del § 9.7, si ottiene

$$\mathscr{E}_2(x) = F^{-1}\left[-\mathscr{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right] = -\frac{1}{4\pi^2}F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\ln|x| + \frac{C_0}{2\pi}. \quad (36)$$

Visto che la costante soddisfa l'equazione di Laplace omogenea, eliminando nella (36) il termine $C_0/2\pi$, la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_2(x)$ può essere presa uguale a $(1/2\pi)\ln|x|$.

Sia ora $n \geqslant 3$. In questo caso la funzione $-|\xi|^{-2}$ è localmente integrabile in R^n e, quindi, conformemente al § 11.2, si ha

$$F[\mathscr{E}_n] = -\frac{1}{|\xi|^2}, \quad \mathscr{E}_n = -F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right].$$

Da ciò, utilizzando la formula (44) del § 9.7, otteniamo per $n = 3$

$$\mathscr{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \quad (37)$$

In modo analogo si calcola $\mathscr{E}_n(x)$ per $n > 3$.

È particolarmente semplice costruire $\mathscr{E}_n(x)$, $n \geqslant 3$, applicando il metodo di discesa rispetto alla variabile t (si veda il § 11.4) dalle soluzioni fondamentali dell'operatore di conduzione termica o dell'operatore d'onda. Per esempio, utilizzando la formula (21), dalla (25) per $a = 1$ si ottiene la formula (34):

$$\mathscr{E}_n(x) = -\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(x, t)\,dt = -\int_0^{\infty}\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dt =$$

$$= -\frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{\frac{n}{2}-2}du = -\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} =$$

$$= -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}|x|^{-n+2}, \quad n \geqslant 3.$$

9. Soluzione fondamentale dell'operatore di Helmholtz.

$$(\Delta + k^2)\mathscr{E}_n = \delta(x). \quad (38)$$

Nell'esempio c) del § 6.5 abbiamo dimostrato che

$$\mathscr{E}_3(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \bar{\mathscr{E}}_3(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|} \quad (39)$$

sono soluzioni fondamentali d'operatore di Helmholtz per $n = 3$. Le formule (39) sono valide anche per i valori complessi di k.

Calcoliamo $\mathscr{E}_2(x)$ mediante il metodo di trasformazione di Fourier. Dalla (38) abbiamo

$$(-|\xi|^2 + k^2)F[\mathscr{E}_2] = 1. \quad (40)$$

Prendiamo la soluzione di quest'equazione nella seguente forma:

$$F[\mathscr{E}_2] = \lim_{\varepsilon \to +0}\frac{1}{k^2 + i\varepsilon - |\xi|^2} = \frac{1}{k^2 + i0 - |\xi|^2},$$

e, in base alla continuità della trasformazione di Fourier, perveniamo al risultato:

$$\mathscr{E}_2(x) = F^{-1}\left[\frac{1}{k^2+i0-|\xi|^2}\right] = \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|<R}\frac{e^{-i(\xi,\,x)}}{k^2+i\varepsilon-|\xi|^2}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{\rho}{k^2+i\varepsilon-\rho^2}\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\,|x|\cos\varphi}\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{\rho J_0(\rho\,|x|)}{k^2+i\varepsilon-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}K_0\left(-i\sqrt{k^2+i\varepsilon}\,|x|\right) = -\frac{1}{2\pi}K_0(-ik\,|x|) =$$

$$= -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\,|x|).$$

Abbiamo qui utilizzato la formula 6.532, 4) dal manuale di Gradštein e Ryžik [1]; $H_0^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, sono funzioni di Hankel (si veda il § 23.8); i limiti sono intesi nel senso di convergenza nello spazio $\mathscr{S}'$.

Dunque, le funzioni

$$\mathscr{E}_2(x) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|), \quad \overline{\mathscr{E}}_2(x) = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(k\,|x|) \tag{41}$$

sono soluzioni fondamentali dell'operatore di Helmholtz per $n = 2$.

Per $n = 1$ conviene prendere le soluzioni fondamentali di questo operatore nella forma (si veda il § 11.5):

$$\mathscr{E}_1(x) = \frac{\theta(x)}{k}\sin kx - \frac{\sin kx}{2k} + \frac{\cos kx}{2ik} = \frac{1}{2ik}e^{ik|x|},$$

$$\overline{\mathscr{E}}_1(x) = -\frac{1}{2ik}e^{-ik|x|}. \tag{42}$$

10. Soluzione fondamentale dell'operatore di Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\mathscr{E} = \delta(x,\,y). \tag{43}$$

Nell'esempio j) del § 6.5 abbiamo dimostrato che

$$\mathscr{E}(x,\,y) = \frac{1}{\pi z}. \tag{44}$$

11. Soluzione fondamentale dell'operatore di trasporto[1].

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\mathscr{E}_s}{\partial t} + (s,\,\operatorname{grad}\mathscr{E}_s) + \alpha\mathscr{E}_s = \delta(x,\,t), \quad |s| = 1. \tag{45}$$

[1] Si veda il § 2.4.

Applicando la trasformazione di Fourier F_x all'uguaglianza (45), per la funzione generalizzata $F_x[\mathscr{E}_s] = \widetilde{\mathscr{E}}_s(\xi, t)$ si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \widetilde{\mathscr{E}}_s(\xi, t)}{\partial t} + [\alpha - i(s, \xi)]\widetilde{\mathscr{E}}_s(\xi, t) = 1(\xi)\cdot\delta(t). \tag{46}$$

Da ciò, utilizzando la formula (22), concludiamo che la funzione

$$\widetilde{\mathscr{E}}_s(\xi, t) = v\theta(t)\, e^{[i(s, \xi)-\alpha]vt}$$

è la soluzione dell'equazione (46) appartenente a $\mathscr{S}'$. Applicando ora la trasformazione di Fourier inversa F_ξ^{-1}, cioè

$$\mathscr{E}_s(x, t) = F_\xi^{-1}[\widetilde{\mathscr{E}}_s(\xi, t)] = v\theta(t)\, e^{-\alpha vt} F^{-1}[e^{i(s, \xi)vt}],$$

ed utilizzando la formula (11) del § 9.2 per $x_0 = vts$, cioè

$$F^{-1}[e^{i(s, \xi)vt}] = \delta(x - vts),$$

si ottiene la soluzione fondamentale dell'operatore di trasporto:

$$\mathscr{E}_s(x, t) = v\theta(t)\, e^{-\alpha vt}\delta(x - vts). \tag{47}$$

Per calcolare la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_s^0(x)$ dell'operatore di trasporto stazionario

$$(s, \operatorname{grad} \mathscr{E}_s^0) + \alpha \mathscr{E}_s^0 = \delta(x) \tag{48}$$

utilizziamo il metodo di discesa rispetto alla variabile t (si veda il § 11.4). Come risultato, in virtù della soluzione (47), per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^3)$, si ottiene

$$(\mathscr{E}_s, \varphi(x)1(t)) = v\int_0^\infty e^{-\alpha vt}(\delta(x - vts), \varphi(x))\, dt = v\int_0^\infty e^{-\alpha vt}\varphi(vts)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha u}\varphi(us)\, du = \left(\frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2}\delta\left(s - \frac{x}{|x|}\right), \varphi\right),$$

da cui, in base alla (20), segue che

$$\mathscr{E}_s^0(x) = \frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2}\delta\left(s - \frac{x}{|x|}\right). \tag{49}$$

Dalla (49) abbiamo, in particolare,

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\mathscr{E}_s^0(x)\, ds = \frac{e^{-\alpha|x|}}{4\pi|x|^2}. \tag{50}$$

12. Esercizi. a) Utilizzando la formula (29), dimostrare che le funzioni generalizzate

$$\mathscr{E}_n(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{\theta(t)}{2\pi a}\left(\dfrac{d}{\pi a^2\,dt^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\delta(a^2t^2-|\ x\ |^2), \\ \qquad\qquad n\geqslant 3 \text{ dispari} \\ \dfrac{1}{2\pi a}\left(\dfrac{1}{\pi a^2}\dfrac{d}{dt^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\dfrac{\theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \\ \qquad\qquad n\geqslant 2 \text{ pari}\end{cases} \tag{51}$$

sono soluzioni fondamentali dell'operatore d'onda $\square_a$.

b) Dimostrare che le soluzioni fondamentali dell'operatore di Klein-Gordon-Fock $\square + m_0^2$ (si veda il § 2.8) sono funzioni generalizzate

$$D^r(x_0,\ x)=\frac{\theta(x)}{2\pi}\delta(x_0^2-|\ x\ |^2)-\frac{m_0}{4\pi}\theta(x_0-|\ x\ |)\frac{J_1(m_0\sqrt{x_0^2-|\ x\ |^2})}{\sqrt{x_0^2-|\ x\ |^2}} \tag{52}$$

e $D^a(x_0,\ x)=D^r(-x_0,\ x)$; qui J_1 è una funzione di Bessel.

c) Dimostrare che le funzioni generalizzate

$$\begin{aligned}D^+(x_0,\ x)&=\frac{1}{8\pi^3 i}F[\theta(\xi_0)\,\delta(\xi_0^2-|\ \xi\ |^2-m_0^2)], \\ D^-(x_0,\ x)&=-\frac{1}{8\pi^3 i}F[\theta(-\xi_0)\,\delta(\xi_0^2-|\ \xi^2\ |-m_0^2)]\end{aligned} \tag{53}$$

soddisfano l'equazione di Klein-Gordon-Fock e la relazione

$$D^+ + D^- = D^r - D^a.$$

Le funzioni generalizzate D^r, D^a, D^+ e D^- sono di grande importanza nella teoria quantistica dei campi [1].

d) Utilizzando la formula (43) del § 2.8, dimostrare che la matrice del quarto ordine

$$\mathscr{E}(x_0,\ x)=-\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k}+m_0 I\right)D^r(x_0,\ x), \tag{54}$$

dove D^r è definita nella (52), è la soluzione fondamentale dell'operatore di Dirac (si veda il § 2.8):

$$\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k}-m_0 I\right)\mathscr{E}=\delta(x_0,\ x)\,I.$$

e) Utilizzando la formula (39) del § 9.7, dimostrare che la funzione

$$\mathscr{E}(x,\ t)=-\theta(t)\frac{1+i}{\sqrt{2}\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2\pi\hbar t}}\,e^{\frac{im_0}{2\hbar t}x^2} \tag{55}$$

è la soluzione fondamentale dell'operatore di Schrödinger unidimensionale

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

[1] Si veda Bogoljubov e Sirkov [1], cap. II.

f) Dimostrare che la funzione

$$\mathscr{E}_{n,\,k}(x)=\frac{(-1)^k\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{2^{2k}\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(k)}\,|\,x\,|^{2k-n}$$

è la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace iterato Δ^k per $2k < n$.

g) Dimostrare che, se una funzione $u \in \mathscr{Z}'(R^{n+1})$ è tale che la convoluzione $u * [\delta(x)\cdot 1(t)]$ esiste, esiste anche il funzionale u_0 (si veda la (16)), ed è valida la formula

$$u * [\delta(x)\cdot 1(t)] = u_0(x)\cdot 1(t).$$

h) Dimostrare che se la funzione $\int |\,u(x,\,t)\,|\,dt$ è localmente integrabile, si ha

$$u * [\delta(x)\cdot 1(t)] = \int u(x,\,\tau)\,d\tau.$$

§ 12. *Potenziale d'onda*

1. Proprietà della soluzione fondamentale dell'operatore d'onda. Le soluzioni fondamentali dell'operatore d'onda per $n = 1$, 2 e 3 sono le funzioni (generalizzate) (si veda le formule (32) e (30) del §11.7)

$$\mathscr{E}_1(x,\,t)=\frac{1}{2a}\,\theta(at-|x|),$$

$$\mathscr{E}_2(x,\,t)=\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}},$$

$$\mathscr{E}_3(x,\,t)=\frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\,\delta_{S_{at}}(x)=$$

$$=\frac{\theta(t)}{2\pi a}\,\delta(a^2t^2-|x|^2).$$

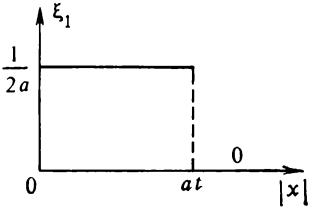


Fig. 42.

Le funzioni $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$ sono localmente integrabili e la funzione generalizzata $\mathscr{E}_3$ agisce sulle funzioni fondamentali $\varphi \in \mathscr{D}(R^4)$ conformemente alla formula (31) del § 11.7:

$$(\mathscr{E}_3,\,\varphi)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\frac{1}{t}\int_{S_{at}}\varphi(x,\,t)\,dS\,dt=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{R^3}\frac{\varphi\left(x,\,\frac{|x|}{a}\right)}{|x|}\,dx. \quad (1)$$

I supporti di $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$ coincidono con la chiusura del cono di futuro $\overline{\Gamma}^+$ (fig. 29), mentre supp $\mathscr{E}_3$ coincide con la frontiera $[at = |\,x\,|]$ di questo cono. Nelle figg. 42-44 sono schematicamente rappresentati i grafici delle soluzioni fondamentali $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ ed $\mathscr{E}_3$ all'istante t.

Siano $f(x,\,t) \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$ e $\varphi(x) \in \mathscr{D}(R^n)$.

Introduciamo la funzione generalizzata $(f(x,\,t),\,\varphi(x)) \in \mathscr{Z}'(R^1)$ soggetta alla seguente formula:

$$((f(x,\,t),\quad \varphi(x)),\quad \psi) = (f,\ \varphi\psi),\quad \psi(t) \in \mathscr{D}(R^1). \quad (2)$$

Da questa definizione segue che

$$\left(\frac{\partial^k f(x,\ t)}{\partial t^k},\ \varphi(x)\right) = \frac{d^k}{dt^k}(f(x,\ t),\quad \varphi(x)),\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ . \quad (3)$$

Infatti, per tutte le $\psi \in \mathscr{D}(R^1)$ abbiamo

$$\left(\left(\frac{\partial^k f(x,\ t)}{\partial t^k},\ \varphi(x)\right),\ \psi\right) = \left(\frac{\partial^k f}{\partial t^k},\ \varphi\psi\right) = (-1)^k\left(f,\ \varphi\frac{d^k\psi}{dt^k}\right) =$$

$$= (-1)^k\left((f(x,\ t),\ \varphi(x)),\ \frac{d^k\psi}{dt^k}\right) = \left(\frac{d^k}{dt^k}(f(x,\ t),\ \varphi(x)),\ \psi\right),$$

da cui derivano le uguaglianze (3).

Diremo che una funzione generalizzata $f(x,\ t)$ *appartiene alla classe* C^p, $0 \leqslant p \leqslant \infty$, *rispetto alla variabile* t *nell'intervallo* $(a,\ b)$

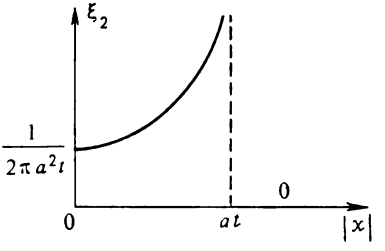


Fig. 43.

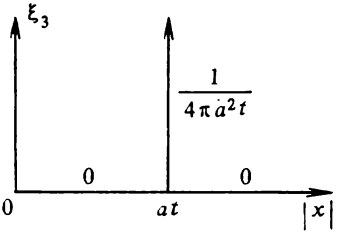


Fig. 44.

(rispettivamente, *su* $[a,\ b]$) se, per una qualunque funzione $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$, la funzione generalizzata $(f(x,\ t),\ \varphi(x))$ appartiene alla classe $C^p(a,\ b)$ (rispettivamente, a $C^p([a,\ b])$) (si veda il § 5.6).

Lemma. *Le soluzioni fondamentali* $\mathscr{E}_n(x,\ t)$, $n = 1,\ 2,\ 3$, *appartengono alla classe* C *rispetto alla variabile* t *in* $[0,\ \infty]$ *e soddisfano le seguenti relazioni limite per* $t \to +0$:

$$\mathscr{E}_n(x,\ t) \to 0,\quad \frac{\partial\mathscr{E}_n(x,\ t)}{\partial t} \to \delta(x),\quad \frac{\partial^2\mathscr{E}_n(x,\ t)}{\partial t^2} \to 0 \ \textit{in}\ \mathscr{D}'(R^n). \quad (4)$$

Dimostrazione. Siano $n = 3$ e $\varphi \in \mathscr{D}(R^3)$. Dalla (1) segue che

$$(\mathscr{E}_3(x,\ t),\ \varphi(x)) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_{at}} \varphi(x)\,dS = \frac{\theta(t)\,t}{4\pi}\int\limits_{S_1} \varphi(ats)\,ds. \quad (5)$$

Visto che il secondo membro dell'uguaglianza (5) è infinitamente derivabile rispetto a t in $[0,\ \infty)$ nel senso del § 1.2, di conseguenza, $\mathscr{E}_3$ appartiene alla classe C^∞ rispetto alla variabile t in $[0,\ \infty)$. Inoltre, dalla (5) segue che

$$(\mathscr{E}_3(x,\ t),\ \varphi(x)) \to 0,\quad t \to +0. \quad (6)$$

Poi, utilizzando la formula (3), per $f = \mathscr{E}_3$ e $k = 1, 2$, otteniamo dalla formula (5), per $t \to +0$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}_3(x, t)}{\partial t}, \varphi(x)\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{t}{4\pi}\int\limits_{S_1} \varphi(ats)\, ds\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1} \varphi(ats)\, ds + \frac{t}{4\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_{S_1} \varphi(ats)\, ds \to \varphi(0) = (\delta, \varphi), \qquad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathscr{E}_3(x, t)}{\partial t^2}, \varphi(x)\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{t}{4\pi}\int\limits_{S_1} \varphi(ats)\, ds\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_{S_1} \varphi(ats)\, ds + \frac{t}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{S_1} \varphi(ats)\, ds \to 0, \qquad (8)$$

poiché la funzione

$$\int\limits_{S_1} \varphi(ats)\, ds = \int\limits_{S_1} \varphi(-ats)\, ds$$

è pari ed infinitamente derivabile rispetto a t, e quindi la sua derivata prima per $t = 0$ è uguale a zero. In virtù dell'arbitrarietà di $\varphi \in \mathscr{D}(R^3)$ le relazioni limite (6)-(8) sono equivalenti a quelle (4), per $n = 3$.

Siano ora $n = 2, 1$ e $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$. Si ha allora per $t > 0$

$$(\mathscr{E}_2(x, t), \varphi(x)) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{U_{at}} \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}} = \frac{t}{2\pi}\int\limits_{U_1} \frac{\varphi(at\eta)}{\sqrt{1 - |\eta|^2}}\, d\eta, \qquad (9)$$

$$(\mathscr{E}_1(x, t), \varphi(x)) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \varphi(x)\, dx = \frac{t}{2}\int\limits_{-1}^{1} \varphi(at\eta)\, d\eta. \qquad (10)$$

Da ciò, come nel caso in cui $n = 3$, seguono tutte le asserzioni del lemma.

2. Informazioni supplementari concernenti le convoluzioni. Stabiliamo ancora un criterio per l'esistenza di una convoluzione.

Teorema. *Supponiamo che le funzioni generalizzate f e g appartenenti a $\mathscr{D}'(R^{n+1})$ siano tali che $f(x, t) = 0$, $t < 0$ e supp $g \subset \overline{\Gamma}^+$. Allora la convoluzione $f * g$ esiste in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$ e per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1})$ può essere rappresentata nella forma*

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \eta(\tau)\,\eta(\tau)\,\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\,\varphi(\xi + y, t + \tau)), \qquad (11)$$

dove $\eta(\tau)$ è una qualunque funzione della classe $C^\infty(R^1)$ uguale a zero per $t < -\delta$ ed all'unità per $t > -\varepsilon$ (δ e ε sono numeri arbitrari, $\delta > \varepsilon > 0$). In questo caso la convoluzione $f * g$ si annulla per $t < 0$ ed è continua rispetto a f ed a g separatamente: 1) se $f_k \to 0$, $k \to \infty$

in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$, $f_k = 0$, $t < 0$ *si ha* $f_k * g \to 0$, $k \to \infty$ *in* $\mathscr{D}'(R^{n+1})$; 2) *se* $g_k \to 0$ *per* $k \to \infty$ *in* $\mathscr{D}'(R^{n+1})$, supp $g_k \subset \bar{\Gamma}^+$, *si ha* $f * g_k \to 0$ *per* $k \to \infty$ *in* $\mathscr{D}'(R^{n+1})$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi(x, t)$ sia una qualunque funzione appartenente a $\mathscr{D}(R^{n+1})$ tale che supp $\varphi \subset U_A$ e che $\eta_k(\xi, t; y, \tau)$, $k = 1, 2, \ldots$, sia una successione di funzioni appartenenti a $\mathscr{D}(R^{2n+2})$ che converge all'unità in R^{2n+2} (si veda il § 7.4). Si ha allora, per tutti i valori di k sufficientemente grandi,

$$\psi_k \equiv \eta(t)\,\eta(\tau)\,\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\,\eta_k(\xi, t; y, \tau)\,\varphi(\xi + y, t + \tau) = \eta(t)\,\eta(\tau)\,\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\,\varphi(\xi + y, t + \tau) \equiv \psi. \quad (12)$$

Per dimostrare l'uguaglianza (12) è sufficiente dimostrare che la funzione ψ appartiene a $\mathscr{D}(R^{2n+2})$. Ma ciò segue dal fatto che questa funzione è infinitamente derivabile e l'insieme

$$[(\xi, t, y, \tau):\ t \geqslant -\delta,\ \tau \geqslant -\delta,\ a^2\tau^2 - |y|^2 \geqslant -\delta,\ |y + \xi|^2 + (t + \tau)^2 \leqslant A^2],$$

che contiene il suo supporto è limitato poiché quest'insieme è contenuto nell'insieme limitato (si veda la fig. 35):

$$[-\delta \leqslant t \leqslant A + \delta,\ -\delta \leqslant \tau \leqslant A + \delta,$$

$$|y| \leqslant \sqrt{a^2(A+\delta)^2 + \delta},\ |\xi| \leqslant \sqrt{a^2(A+\delta)^2 + \delta} + A].$$

Poi, per costruzione, $\eta(t) = 1$ nell'intorno di supp $f(\xi, t)$ e $\eta(\tau)\,\eta(a^2\tau^2 - |y|^2) = 1$ nell'intorno di supp $g(y, \tau)$. Di conseguenza, (si veda la (18) del § 5.10),

$$f(\xi, t) = \eta(t)\,f(\xi, t),\ g(y, \tau) = \eta(\tau)\,\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\,g(y, \tau).$$

Tenute in considerazione queste uguaglianze e l'uguaglianza (12), si vede che la formula (11) è valida:

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f(\xi, t)\cdot g(y, \tau),\ \eta_k(\xi, t; y, \tau)\,\varphi(\xi + y, t + \tau)) = \lim_{k\to\infty} (f(\xi, t)\cdot g(y, \tau), \psi_k) = (f(\xi, t)\cdot g(y, \tau), \psi),\ \varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1}).$$

Dimostriamo ora che $f * g = 0$, $t < 0$. Siano $\varphi(x, t) \in \mathscr{D}(R^{n+1})$ e supp $\varphi \subset [t < 0]$. Visto che supp φ è un compatto in R^{n+1}, esiste un numero $\delta_1 > 0$ tale che supp $\varphi \subset [t \leqslant -\delta_1]$. Ed allora scegliendo $\delta < \delta_1/2$, si ottiene

$$\eta(t)\,\eta(\tau)\,\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\,\varphi(\xi + y, t + \tau) = 0, \quad (13)$$

da cui, in virtù della (11), si ha $(f * g, \varphi) = 0$, come volevasi dimostrare.

La continuità della convoluzione $f * g$ rispetto a f e g segue dalla rappresentazione (11) e dalla continuità del prodotto diretto $f(\xi, t) \times$ $\times g(y, \tau)$ rispetto a f e g separatamente (si veda la proprietà a) del § 7.3). La funzione ausiliare può essere scelta indipendente da k. Il teorema è dimostrato.

Osservazione. Il teorema dimostrato può essere facilmente generalizzato al caso in cui il cono di futuro $\overline{\Gamma}^+$ sia sostituito da un cono convesso chiuso arbitrario C non contenente una retta intera.

Si noti che un caso particolare di questo teorema (per $n = 0$) è stato stabilito nel § 7.7.

Dimostriamo la seguente proposizione: *se* $g(x, t) \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, $\operatorname{supp} g \subset \overline{\Gamma}^+$ *ed* $u(x) \in \mathscr{D}'(R^n)$, *si ha*

$$g * [u(x) \cdot \delta(t)] = g(x, t) * u(x), \tag{14}$$

ed inoltre la funzione generalizzata $g(x, t) * u(x)$ *è soggetta alla regola*

$$(g(x, t) * u(x), \varphi) = (g(y, t) \cdot u(\xi), \eta(a^2t^2 - \\ - |y|^2)\varphi(y + \xi, t)), \varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1}). \tag{15}$$

Infatti, ponendo nella formula (11) $f = u(x) \cdot \delta(t)$, si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1})$

$$(g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) = (g(y, \tau) \cdot u(\xi) \cdot \delta(t), \\ \eta(\tau)\eta(t)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(y + \xi, \tau + t)) = \\ = (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)(\delta(t), \\ \eta(t)\varphi(y + \xi, \tau + t))) = (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \\ \eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(y + \xi, \tau)). \tag{16}$$

Visto che $\operatorname{supp} g(y, \tau)$ è contenuto nel semispazio $\tau \geqslant 0$, in virtù della (18) del § 5.10, si ha $g = \eta(\tau) g$. Inoltre, la funzione

$$\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(y + \xi, \tau) \in \mathscr{D}(R^{2n+1}).$$

Per questa ragione, continuando le uguaglianze (16) ed includendo la (15), si ottiene la seguente uguaglianza:

$$(g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) = \\ = (\eta(\tau) g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(y + \xi, \tau)) = \\ = (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(y + \xi, \tau)) = (g(x, t) * \\ * u(x), \varphi).$$

Qui l'ultima uguaglianza è stata ottenuta in virtù del teorema del §7.6.

Utilizzando la formula (14) e le regole di derivazione del prodotto diretto (si veda la proprietà c) del § 7.3) e della convoluzione (si veda la proprietà c) del § 7.5), per tutti i $k = 1, 2, \ldots$ si otten-

gono le seguenti uguaglianze:

$$g * [u(x) \cdot \delta^{(k)}(t)] = \frac{\partial^k}{\partial t^k}[g(x, t) * u(x)] = \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial t^k} * u(x). \quad (17)$$

3. Potenziale d'onda. Supponiamo che la funzione generalizzata $f(x, t)$ appartenente a $\mathscr{D}'(R^{n+1})$ si annulli nel semispazio $t < 0$. La funzione generalizzata

$$V_n = \mathscr{E}_n * f,$$

dove $\mathscr{E}_n$ è la soluzione fondamentale dell'operatore d'onda, si dice *potenziale d'onda con densità f*.

Visto che supp $\mathscr{E}_n \subset \overline{\Gamma}^+$, in questo caso, secondo il teorema del § 12.2, il potenziale d'onda V_n esiste in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$ ed è rappresentato nella forma

$$(V_n, \varphi) = (\mathscr{E}_n(y, \tau) \cdot f(\xi, \tau'),$$

$$\eta(\tau)\,\eta(\tau')\,\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\,\varphi(y+\xi, \tau+\tau')), \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1}), \quad (18)$$

dove $\eta(\tau)$ è una qualunque funzione della classe $C^\infty(R^1)$ uguale a 0 per $\tau < -\delta$ ed all'unità, per $\tau > -\varepsilon$; qui δ ed ε sono numeri positivi arbitrari, ma tali che $\delta > \varepsilon > 0$. Inoltre, secondo lo stesso teorema, il potenziale d'onda $V_n(x, t)$ si annulla per $t < 0$ e dipende con continuità dalla densità f in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$. In definitiva, conformemente al teorema del § 11.3, questo potenziale soddisfa l'equazione d'onda

$$\Box_a V_n = f. \quad (19)$$

Le altre proprietà del potenziale d'onda V_n dipendono sostanzialmente dalle proprietà della densità f.

Se f è una funzione localmente integrabile in R^{n+1}, in questo caso V_n è una funzione localmente integrabile in R^{n+1} ed è espressa dalle seguenti formule:

$$V_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x;\, at)} \frac{f\left(\xi,\, t - \frac{|x-\xi|}{a}\right)}{|x-\xi|}\, d\xi, \quad (20)$$

$$V_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^1 \int_{U(x;\, a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}}, \quad (20')$$

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \quad (20'')$$

Dimostriamo la formula (20). Sia $\varphi \in \mathscr{D}(R^4)$. Visto che f è una funzione localmente integrabile in R^4, allora, tenendo conto del fatto che $f = 0$, per $t < 0$, e includendo la formula (1) ed il teorema di Fubini, dalla rappresentazione (18) si ottiene

$$(V_3, \varphi) = (\mathscr{E}_3(y, \tau),\ \eta(\tau)\,\eta(a^2\tau^2 -$$

$$- |y|^2) \int f(\xi, \tau')\,\eta(\tau')\varphi(y+\xi, \tau+\tau')\, d\xi\, d\tau') =$$

$$= (\mathcal{E}_3(y,\ \tau)\ \eta(\tau)\ \eta(a^2\tau^2 - |y|^2) \int f(x-y,\ t-\tau)\,\varphi(x,\ t)\,dx\,dt) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{R^3} \frac{\eta\left(\frac{|y|}{a}\right)\eta(0)}{|y|} \left[\int f\left(x-y,\ t-\frac{|y|}{a}\right)\varphi(x,\ t)\,dx\,dt\right] dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int \varphi(x,\ t) \int_{U_{at}} \frac{f\left(x-y,\ t-\frac{|y|}{a}\right)}{|y|}\,dy\,dx\,dt.$$

Ciò vuol dire che il potenziale V_3 è una funzione localmente integrabile in R^4 ed è rappresentato nella forma

$$V_3(x,\ t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U_{at}} \frac{f\left(x-y,\ t-\frac{|y|}{a}\right)}{|y|}\,dy. \tag{21}$$

Eseguendo in quest'integrale la sostituzione di variabili $x - y = \xi$, si ottiene la formula (20).

In modo simile, ma con corrispondenti semplificazioni, vengono derivate le formule (20′) e (20″) per i potenziali V_2 e V_1.

Facciamo coincidere ad ogni punto $(x,\ t)$, $t > 0$, un cono aperto $\Gamma_0^-(x,\ t) = \Gamma^-(x,\ t) \cap [0 < \tau < t]$ con il vertice $(x,\ t)$, la base $U(x,\ at)$ e la superficie laterale $B(x,\ t)$ (fig. 45); qui $\Gamma^-(x,\ t)$ è il cono di passato (si veda il § 3.3).

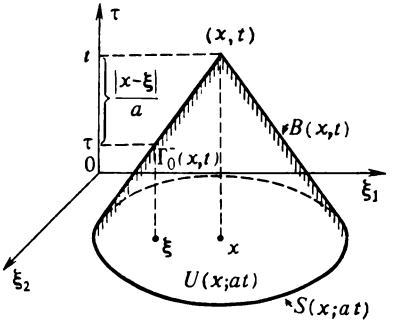


Fig. 45.

Teorema. *Se* $f \in C^2\ (t \geqslant 0)$, *per* $n = 3$ *e* 2, *e* $f \in C^1\ (t \geqslant 0)$, *per* $n = 1$, *allora il potenziale* $V_n \in C^2\ (t \geqslant 0)$ *e soddisfa la stima*

$$|V_3(x,\ t)| \leqslant \frac{t^2}{2} \max_{B(x,\ t)} |f(\xi,\ \tau)|,$$
$$|V_n(x,\ t)| \leqslant \frac{t^2}{2} \max_{\bar{\Gamma}_0^-(x,\ t)} |f(\xi,\ \tau)|,\ n = 1,\ 2, \tag{22}$$

e le condizioni iniziali

$$V_n|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial V_n}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{23}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema, per $n = 3$. La sostituzione delle variabili $y = at\,\eta$, $t > 0$, trasforma la formula (21) nella forma

$$V_3(x,\ t) = \frac{t^2}{4\pi} \int_{U_1} \frac{f(x + at\,\eta,\ t(1-|\eta|))}{|\eta|}\,d\eta. \tag{24}$$

Visto che $f \in C^2$ $(t \geqslant 0)$ e l'espressione integranda nella (24) ha una singolarità integrabile, si ha $V_3 \in C^2$ $(t \geqslant 0)$ (si veda il § 1.5). Dalla rappresentazione (24) segue anche la stima (22) per il potenziale V_3:

$$|V_3(x, t)| \leqslant \frac{t^2}{4\pi} \max_{B(x,\ t)} |f(\xi,\ \tau)| \int\limits_{U_1} \frac{d\eta}{|\eta|} = \frac{t^2}{2} \max_{B(x,\ t)} |f(\xi,\ \tau)|.$$

Visto che $V_3 \in C^2$ $(t \geqslant 0)$, dalla stima (22) seguono le condizioni iniziali (23).

Sia ora $n = 2$. La sostituzione di variabili $\xi = x + at\,\eta$, $\tau = t - \alpha t$, $t > 0$, trasforma la rappresentazione (20′) del potenziale V_2 nella forma

$$V_2(x,\ t) = \frac{t^2}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{U_\alpha} \frac{f(x + at\eta;\ t - \alpha t)}{\sqrt{\alpha^2 - |\eta|^2}}\, d\eta\, d\alpha, \tag{24′}$$

dalla quale seguono direttamente le proprietà richieste di questo potenziale.

Le proprietà del potenziale V_1 seguono dalla rappresentazione (20″). Il teorema è dimostrato.

Osservazione. Il potenziale d'onda V_3 (x, t) è anche detto *potenziale ritardato*. La denominazione è dovuta al fatto che, secondo la formula (20), il valore del potenziale V_3 nel punto x all'istante $t > 0$ è definito dai valori della funzione di sorgente f (ξ, τ), $\xi \in \overline{U}$ $(x;\ at)$ presi agli istanti precedenti $\tau = t - (|x - \xi|)/a$, ed inoltre il *tempo di ritardo* $(|x - \xi|)/a$ è il tempo necessario perché una perturbazione raggiunga il punto x partendo dal punto ξ. In altre parole, V_3 (x, t) dipende soltanto dai valori della funzione di sorgente f (ξ, τ) sulla superficie laterale B (x, t) del cono Γ_0^- (x, t) (si veda la fig. 45).

4. Potenziali d'onda di superficie. Se $f = u_1(x) \cdot \delta(t)$ o $f = u_0(x) \times \times \delta'(t)$, dove u_0 ed u_1 sono funzioni generalizzate arbitrarie appartenenti a $\mathscr{D}'(R^n)$, i corrispondenti potenziali d'onda

$$V_n^{(0)} = \mathscr{E}_n * [u_1(x) \cdot \delta(t)],\quad V_n^{(1)} = \mathscr{E}_n * [u_0(x) \cdot \delta'(t)],$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,$$

sono detti, rispettivamente, *potenziali d'onda di superficie* (*degli strati semplice e doppio* a densità u_1 ed u_0).

In virtù delle formule (14) e (17) del § 12.2, i potenziali d'onda $V_n^{(0)}$ e $V_n^{(1)}$ possono essere rappresentati come segue:

$$V_n^{(0)} = \mathscr{E}_n(x,\ t) * u_1(x), \tag{25}$$

$$V_n^{(1)} = \frac{\partial \mathscr{E}_n(x,\ t)}{\partial t} * u_0(x) = \frac{\partial}{\partial t} [\mathscr{E}_n(x,\ t) * u_0(x)], \tag{26}$$

ed inoltre la funzione generalizzata $\mathscr{E}_n(x,\ t) * u(x)$ si comporta in base alla formula (15).

Lemma. *I potenziali d'onda di superficie* $V_n^{(0)}$ *e* $V_n^{(1)}$ *appartengono alla classe* C^∞ *rispetto alla variabile* t *in* $[0, \infty)$ *e soddisfano le condizioni iniziali, per* $t \to +\infty$:

$$V_n^{(0)}(x, t) \to 0, \quad \frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} \to u_1(x) \text{ in } \mathscr{D}'(R^n), \tag{27}$$

$$V_n^{(1)}(x, t) \to u_0(x), \quad \frac{\partial V_n^{(1)}(x, t)}{\partial t} \to 0 \text{ in } \mathscr{D}'(R^n). \tag{28}$$

Dimostrazione. Conformemente al lemma del § 12.1, la funzione generalizzata $\mathscr{E}_n(x, t)$ appartiene alla classe C^∞ rispetto alla variabile t in $[0, \infty)$. Poi, per ogni $t > 0$, il supporto di $\mathscr{E}_n(x, t)$ è contenuto nella sfera $\overline{U}_{at}$ e, di conseguenza, è uniformemente limitato in R^n, per $t \to t_0 \geqslant 0$. Quindi, utilizzando il teorema del § 7.6 sulla continuità della convoluzione in $\mathscr{D}'$, concludiamo che, per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$, si ha

$$\left(\frac{\partial^k \mathscr{E}_n(x, t)}{\partial t^k} * u_1(x), \ \varphi(x)\right) \in C[0, \infty), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Da ciò, in virtù delle uguaglianze (3) e (17),

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\mathscr{E}_n(x, t) * u_1(x), \varphi) = \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}[\mathscr{E}_n(x, t) * u_1(x)], \ \varphi\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^k \mathscr{E}_n(x, t)}{\partial t^k} * u_1(x), \ \varphi\right),$$

concludiamo che $(\mathscr{E}_n(x, t) * u_1(x), \varphi) \in C^\infty[0, \infty)$. Ciò vuol dire che in virtù della (25), il potenziale $V_n^{(0)}(x, t)$ appartiene alla classe C^∞ rispetto a t in $[0, \infty)$. Sostituendo u_1 con u_0, deduciamo dalla (26) che anche il potenziale $V_n^{(1)}$ possiede la stessa proprietà.

Dimostriamo le relazioni limite (27). Tenendo conto delle relazioni limite (4) ed utilizzando la continuità della convoluzione $\mathscr{E}_n(x, t) * u_1(x)$ in $\mathscr{D}'(R^n)$, otteniamo per $t \to +0$

$$V_n^{(0)}(x, t) = \mathscr{E}_n(x, t) * u_1(x) \to 0 * u_1(x) = 0 \text{ in } \mathscr{D}'(R^n),$$

$$\frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[\mathscr{E}_n(x, t) * u_1(x)] =$$

$$= \frac{\partial \mathscr{E}_n(x, t)}{\partial t} * u_1(x) \to \delta * u_1 = u_1(x) \text{ in } \mathscr{D}'(R^n).$$

In modo simile vengono stabilite anche le relazioni limite (28). Il lemma è dimostrato.

Le altre proprietà dei potenziali d'onda di superficie $V_n^{(0)}$ e $V_n^{(1)}$ dipendono in modo sostanziale dalle proprietà delle densità di u_1 ed u_0.

Se u_1 *è una funzione localmente integrabile in* R^n, *il potenziale di superficie* $V_n^{(0)}$ *è una funzione localmente integrabile in* R^{n+1} *ed è e-*

spresso dalle seguenti formule:

$$V_3^{(0)}(x,\ t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S(x;\ at)} u_1(\xi)\, dS, \tag{29}$$

$$V_2^{(0)}(x,\ t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int\limits_{U(x;\ at)} \frac{u_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}}, \tag{29'}$$

$$V_1^{(0)}(x,\ t) = \frac{\theta(t)}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\, d\xi. \tag{29''}$$

Stabiliamo la formula (29). Visto che la funzione u_1 è localmente integrabile in R^3, utilizzando le formule (25), (15) e (1), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(R^4)$

$$(V_3^{(0)},\ \varphi) = (t_3(x,\ t) * u_1(x),\ \varphi) =$$

$$= (\mathscr{E}_3(y,\ t),\ \eta(a^2t^2 - |y^2|) \int u_1(\xi)\, \varphi(y+\xi,\ t)\, d\xi) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^\infty \frac{\eta(t)}{t} \int\limits_{S_{at}} \int\limits_{R^3} u_1(x-y)\, \varphi(x,\ t)\, dx\, dS_y\, dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^\infty \int\limits_{R^3} \frac{\varphi(x,\ t)}{t} \int\limits_{S_{at}} u_1(x-y)\, dS_y\, dx\, dt,$$

da cui segue che $V_3^{(0)}$ è localmente integrabile in R^4 ed è rappresentata nella seguente forma (cfr. la formula (34) del § 7.10):

$$V_3^{(0)}(x,\ t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}} u_1(x-y)\, dS_y.$$

Sostituendo le variabili $x - y = \xi$ in questo integrale, si ottiene la formula (29). In modo analogo, con corrispondenti semplificazioni, possono essere dedotte le formule (29') e (29'') per i potenziali $V_2^{(0)}$ e $V_1^{(0)}$.

Teorema. *Se* $u_0 \in C^3(R^n)$ *ed* $u_1 \in C^2(R^n)$ *per* $n = 3$ *e* 2, *o se* $u_0 \in C^2(R^1)$ *ed* $u_1 \in C^1(R^1)$ *per* $n = 1$, *i potenziali* $V_n^{(0)}$ *e* $V_n^{(1)}$ *appartengono alla classe* C^2 $(t \geqslant 0)$ *e soddisfano le disuguaglianze*

$$|V_3^{(0)}(x,\ t)| \leqslant t \max_{S(x;\ at)} |u_1(\xi)|; \tag{30}$$

$$|V_n^{(0)}(x,\ t)| \leqslant t \max_{\overline{U}(x;\ at)} |u_1(\xi)|,\ n = 1,\ 2; \tag{30'}$$

$$|V_3^{(1)}(x,\ t)| \leqslant \max_{S(x;\ at)} |u_0(\xi)| + at \max_{S(x;\ at)} |\operatorname{grad} u_0(\xi)|, \tag{31}$$

$$|V_2^{(1)}(x,\ t)| \leqslant \max_{\overline{U}(x;\ at)} |u_0(\xi)| + at \max_{\overline{U}(x;\ at)} |\operatorname{grad} u_0(\xi)|, \tag{31'}$$

$$|V_1^{(1)}(x,\ t)| \leqslant \max_{S(x;\ at)} |u_0(\xi)| \tag{31''}$$

e le condizioni iniziali

$$V_n^{(0)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x), \tag{32}$$

$$V_n^{(1)}|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{33}$$

Dimostrazione. Sia $n = 3$. Sostituendo nella formula (29) le variabili $x - \xi = ats$, $t > 0$, si ottiene la rappresentazione

$$V_3^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)\, t}{4\pi} \int_{S_1} u_1(x - ats)\, ds, \tag{34}$$

dalla quale segue che $V_3^{(0)}$ soddisfa la disuguaglianza (30) ed appartiene alla classe C^2 $(t \geqslant 0)$, poiché $u_1 \in C^2$ (R^3). Derivando la formula (34) rispetto a t ed utilizzando la (26), si ottiene la rappresentazione per il potenziale $V_3^{(1)}$:

$$V_3^{(1)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi} \int_{S_1} u_0(x - ats)\, ds - \\ - \frac{at\theta(t)}{4\pi} \int_{S_1} (\operatorname{grad}_x u_0(x - ats),\ s)\, ds,$$

da cui segue che $V_3^{(1)}$ soddisfa la disuguaglianza (31):

$$|V_3^{(1)}(x, t)| \leqslant \max_{|s|=1} |u_0(x - ats)| + at \max_{|s|=1} |(\operatorname{grad}_x u_0(x - ats),\ s)| \leqslant \\ \leqslant \max_{S(x;\, at)} |u_0(\xi)| + at \max_{S(x;\, at)} |\operatorname{grad}_x u_0(x)|$$

ed appartiene alla classe C^2 $(t \geqslant 0)$, poiché $u_0 \in C^3$ (R^3).

Per $n = 2$ la sostituzione di variabili $\xi = x - at\eta$ per $t > 0$ trasforma le rappresentazioni (29′) e (26) per i potenziali $V_2^{(0)}$ e $V_2^{(1)}$ nella forma

$$V_2^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)\, t}{2\pi} \int_{U_1} \frac{u_1(x - at\eta)}{\sqrt{1 - |\eta|^2}}\, d\eta,$$

$$V_2^{(1)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \int_{U_1} \frac{u_0(x - at\eta)}{\sqrt{1 - |\eta|^2}}\, d\eta - \\ - \frac{a\theta(t)\, t}{2\pi} \int_{U_1} \frac{(\operatorname{grad}_x u_0(x - at\eta),\ \eta)}{\sqrt{1 - |\eta|^2}}\, d\eta,$$

da cui seguono le proprietà richieste di regolarità e le disuguaglianze (30′) e (31′) per i potenziali $V_2^{(0)}$ e $V_2^{(1)}$, per esempio:

$$|V_2^{(0)}(x, t)| \leqslant \frac{t}{2\pi} \max_{\eta \in \bar{U}_1} |u_1(x - at\,\eta)| \int_{U_1} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} = \\ = t \max_{\xi \in \bar{U}(x;\, at)} |u_1(\xi)| \int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Le corrispondenti proprietà dei potenziali $V_1^{(0)}$ e $V_1^{(1)}$ derivano dalle rappresentazioni (29″) e (26), per esempio:

$$V_1^{(1)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)].$$

Dimostriamo ora la validità delle condizioni iniziali (32) e (33). In virtù delle (27) e (28), queste condizioni sono verificate in senso di convergenza nello spazio $\mathscr{D}'(R^n)$. Ma per dimostrazione, le funzioni $V_n^{(0)}(x, t)$ e $V_n^{(1)}(x, t)$ appartengono alla classe C^2 $(t \geqslant 0)$. Di conseguenza, queste funzioni verificano le condizioni (32) e (33) nel senso comune. Il teorema è dimostrato.

Osservazione. Le formule (29), (29′) e (29″) seguono formalmente dalle formule (20), (20′) e (20″), se si pone in queste formule $f(\xi, \tau) = u_1(\xi)\,\delta(\tau)$ e poi « si integra » $\delta(\tau)$.

§ 13. *Problema di Cauchy per l'equazione d'onda*

In questo paragrafo applichiamo la teoria delle funzioni generalizzate alla soluzione del problema di Cauchy (generalizzato) per l'equazione d'onda.

1. Problema di Cauchy per l'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti. Risolviamo prima di tutto un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti:

$$Lu \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u^k(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

dove $f \in C(t \geqslant 0)$.

Supponiamo che $u(t)$ sia la soluzione del problema di Cauchy (1)-(2). Prolunghiamo le funzioni $u(t)$ e $f(t)$ a zero per $t < 0$. Denotando le funzioni prolungate con $\tilde{u}$ e $\tilde{f}$, rispettivamente, ed utilizzando le formule (14) del § 6.4 e le condizioni iniziali (2), si ottiene

$$\tilde{u}^{(k)} = \{u^{(k)}(t)\} + \sum_{j=0}^{k-1} u_j \delta^{(k-j-1)}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Da ciò e dall'equazione (1) concludiamo che

$$L\tilde{u} = \{L\tilde{u}(t)\} + u_0\delta^{(n-1)}(t) + (a_1u_0 + u_1)\,\delta^{(n-2)}(t) + \ldots +$$

$$+ (a_{n-1}u_0 + \ldots + a_1u_{n-2} + u_{n-1})\,\delta(t) = f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(t),$$

dove

$$c_0 = a_{n-1}u_0 + \ldots + a_1u_{n-2} + u_{n-1}, \ \ldots, \ c_{n-2} = a_1u_0 + u_1,$$

$$c_{n-1} = u_0.$$

Dunque, la funzione $\widetilde{u}$ nel senso generalizzato soddisfa in R^1 l'equazione differenziale

$$L\widetilde{u} = f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t). \tag{3}$$

Costruiamo la soluzione dell'equazione (3). La funzione $\mathscr{E}(t) = \theta(t) Z(t)$, dove $LZ = 0$ e

$$Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1, \tag{4}$$

è la soluzione fondamentale dell'operatore L (si veda il § 11.5). Visto che $\mathscr{E}$ ed il secondo membro dell'equazione (3) appartengono all'algebra di convoluzione delle funzioni generalizzate, $\mathscr{D}'_+$ (si veda il § 7.7), in questo caso, in base al teorema del § 11.3, la soluzione dell'equazione (3) esiste ed è unica in $\mathscr{D}'_+$ ed è espressa dalla convoluzione

$$\widetilde{u} = \mathscr{E} * \left(\widetilde{f} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}\right) = \mathscr{E} * f + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathscr{E}^{(k)}(t) =$$

$$= \theta(t) \int_0^t Z(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \theta(t) \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)}(t). \tag{5}$$

Qui abbiamo preso in considerazione le uguaglianze

$$\mathscr{E}^{(k)}(t) = [\theta(t) Z(t)]^{(k)} = \theta(t) Z^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

che sono valide, in virtù della (4) (si veda l'esempio f) del § 6.4).

Dunque, la soluzione $u(t)$ del problema di Cauchy (1), (2) prolungata a zero, per $t < 0$, verifica l'equazione (3), la cui soluzione è unica nell'algebra $\mathscr{D}'_+$. Per questa ragione la formula (5), per $t > 0$, dà la soluzione cercata del problema di Cauchy (1), (2):

$$u(t) = \int_0^t Z(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)}(t). \tag{6}$$

In particolare, la formula (6) per i problemi di Cauchy

$$u' + au = f(t), \quad u(0) = u_0; \tag{7}$$

$$u'' + a^2 u = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \tag{8}$$

assume la seguente forma:

$$u(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau + u_0 e^{-at}; \tag{9}$$

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \sin a(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + u_0 \cos at + u_1 \frac{\sin at}{a}. \tag{10}$$

2. Impostazione del problema di Cauchy generalizzato per l'equazione d'onda. Il metodo di risoluzione del problema di Cauchy, esposto nella sezione precedente per un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti, è applicato per risolvere il problema di Cauchy per l'equazione d'onda

$$\Box_a u = f(x,\ t), \tag{11}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x). \tag{12}$$

Assumiamo che $f \in C\ (t \geqslant 0)$, $u_0 \in C^1\ (R^n)$ ed $u_1 \in C\ (R^n)$.

Supponiamo che esista una soluzione classica $u\ (x,\ t)$ del problema di Cauchy (11), (12). Ciò vuol dire che la funzione u di classe $C^2\ (t > 0) \cap C^1\ (t \geqslant 0)$ soddisfa l'equazione (11), per $t > 0$, e le condizioni iniziali, per $t \to +0$ (si veda il § 4.2).

Prolunghiamo le funzioni u e f a zero, per $t < 0$, ponendo

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} f, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Dimostriamo che la funzione $\tilde{u}\ (x,\ t)$ soddisfa in R^{n+1} l'equazione d'onda

$$\Box_a \tilde{u} = \tilde{f}(x,\ t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t). \tag{13}$$

Infatti, per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}\ (R^{n+1})$ abbiamo la seguente catena di equazioni:

$$(\Box_a \tilde{u},\ \varphi) = (\tilde{u},\ \Box_a \varphi) = \int_0^\infty \int_{R^n} u\, \Box_a \varphi\, dx\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{R^n} u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varphi \right) dx\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_\varepsilon^\infty \int_{R^n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \right) \varphi\, dx\, dt - \int_{R^n} \frac{\partial \varphi(x,\ \varepsilon)}{\partial t} u(x,\ \varepsilon)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{R^n} \varphi(x,\ \varepsilon) \frac{\partial u(x,\ \varepsilon)}{\partial t}\, dx \right] = \int_0^\infty \int_{R^n} f \varphi\, dx\, dt - \int_{R^n} \frac{\partial \varphi(x,\ 0)}{\partial t} u(x,\ 0)\, dx +$$

$$+ \int_{R^n} \varphi(x,\ 0) \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}\, dx = \int_{R^{n+1}} \varphi \tilde{f}\, dx\, dt - \int_{R^n} u_0(x) \frac{\partial \varphi(x,\ 0)}{\partial t}\, dx +$$

$$+ \int_{R^n} u_1(x) \varphi(x,\ 0)\, dx = (\tilde{f} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t),\ \varphi),$$

da cui segue l'uguaglianza (13).

L'uguaglianza (13) mostra che le perturbazioni iniziali u_0 ed u_1 per la funzione $\tilde{u}\ (x, t)$ assolvono la funzione di una sorgente, $u_0(x) \times$

$\times\delta'(t) + u_1(x)\cdot\delta(t)$, che istantaneamente agisce per $t = 0$; qui alla perturbazione iniziale u_0 corrisponde lo strato doppio $u_0(x)\times$ $\times\delta'(t)$, mentre alla perturbazione iniziale u_1 corrisponde lo strato semplice $u_1(x)\cdot\delta(t)$ nel piano $t = 0$. Inoltre, le soluzioni classiche del problema di Cauchy (11), (12) sono contenute tra le soluzioni del problema di Cauchy (13) che si annullano per $t < 0$. Ciò permette di indicare il problema della ricerca delle soluzioni (generalizzate) dell'equazione (13) che si annullano, per $t < 0$, come problema generalizzato di Cauchy per l'equazione d'onda. Ma in questo caso il secondo membro dell'equazione (13) può essere considerato una funzione generalizzata.

Introduciamo, quindi, la seguente definizione: diremo che il problema della ricerca di una funzione generalizzata $u \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$, che si annulla per $t < 0$ e soddisfa l'equazione d'onda

$$\Box_a u = F(x, t), \tag{14}$$

è il *problema di Cauchy generalizzato* per l'equazione d'onda con la funzione di sorgente $F \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$. L'equazione (14) equivale alla seguente asserzione (§ 11.1): per qualunque $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+1})$ è valida l'uguaglianza

$$(u, \Box_a\varphi) = (F, \varphi). \tag{14'}$$

Dall'equazione (14) segue che la condizione necessaria di risolvibilità del problema di Cauchy generalizzato è l'annullamento di F per $t < 0$. Ora dimostreremo che questa condizione è anche sufficiente.

Osservazione. Nel dedurre l'equazione (13) abbiamo attualmente dimostrato l'uguaglianza

$$\Box_a u = \{\Box_a u(x, t)\} + u(x, +0)\cdot\delta'(t) + u_t(x, +0)\cdot\delta(t), \tag{15}$$

valida per qualsiasi funzione $u \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geqslant 0)$, che si annulla, per $t < 0$, e tale che $\Box_a u \in C(t \geqslant 0)$.

3. Soluzione del problema di Cauchy generalizzato.

Teorema. *Sia $F \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$ ed inoltre $F = 0$, per $t < 0$. In questo caso la soluzione del corrispondente problema di Cauchy generalizzato esiste, è unica ed è rappresentata dal potenziale d'onda*

$$u = \mathscr{E}_n * F. \tag{16}$$

Questa soluzione dipende con continuità da F in $\mathscr{D}'$.

Dimostrazione. Per ipotesi, il secondo membro F dell'equazione (14) si annulla per $t < 0$. Perciò, conformemente al teorema del § 12.2, la convoluzione F con la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_n$ dell'operatore d'onda esiste in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$ e si annulla per $t < 0$. Secondo il teorema del § 11.3, la soluzione dell'equazione (14) esiste ed è unica

nella classe delle funzioni generalizzate appartenenti a $\mathscr{D}'(R^{n+1})$ che si annullano per $t < 0$, ed inoltre questa soluzione viene espressa mediante la convoluzione (16).

Dimostriamo la dipendenza continua della soluzione costruita u da F in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$. Se $F_k = 0$ per $t < 0$ e $F_k \to F$ per $k \to \infty$ in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$, si ottiene in virtù della continuità della convoluzione (si veda il teorema del § 12.2) dalla (16)

$$u_k = \mathscr{E}_n * F_k \to \mathscr{E}_n * F = u, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{D}'(R^{n+1}).$$

Il teorema è dimostrato.

Corollario. 1. *Ogni funzione* $u(x, t)$ *della classe* $C^2(t > 0) \cap \cap C^1(t \geqslant 0)$ *che si annulla per* $t < 0$ *e tale che* $\square_a u \in C(t \geqslant 0)$, *può essere rappresentata nella forma*

$$u(x, t) = V_n(x, t) + V_n^{(0)}(x, t) + V_n^{(1)}(x, t), \tag{17}$$

dove V_n *è il potenziale d'onda con densità* $\{\square_a u\}$, *e* $V_n^{(0)}$ *e* $V_n^{(1)}$ *sono potenziali d'onda di superficie degli strati semplice e doppio con densità* $u_t(x, 0)$ *ed* $u(x, 0)$, *rispettivamente.*

Infatti, la funzione $u(x, t)$ soddisfa l'equazione (15) e, conformemente al teorema del § 13.3, può essere rappresentata nella forma di somma (17) di tre potenziali d'onda alle densità menzionate.

Corollario 2. *Per* $F = u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t)$ *la soluzione* $u(x, t)$ *del problema di Cauchy generalizzato appartiene alla classe* C^∞ *rispetto alla variabile* t *in* $[0, \infty)$ *e soddisfa le condizioni iniziali* (12) *nel senso di convergenza debole:*

$$u(x, t) \to u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \to u_1(x), \quad t \to +0 \text{ in } \mathscr{D}'(R^n). \tag{18}$$

Infatti, per il lemma del § 12.4 i potenziali $V_n^{(0)}$ e $V_n^{(1)}$ appartengono alla classe C^∞ rispetto a t in $[0, \infty)$ e soddisfano le condizioni iniziali (27) e (28) del § 12.4. Di conseguenza, la loro somma $V_n^{(0)} + V_n^{(1)}$, che in virtù della (16) è soluzione del problema di Cauchy generalizzato per $F = u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t)$, appartiene alla classe C^∞ rispetto a t in $[0, \infty)$ e soddisfa le condizioni iniziali (18).

Esempio. La soluzione generalizzata del problema di Cauchy

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(x) \cdot \delta'(t)$$

è data dalla seguente formula:

$$u(x, t) = \frac{\partial \mathscr{E}_1(x, t)}{\partial t} * \theta(x) = \frac{1}{2} * \theta(x - at) + \frac{1}{2}\theta(x + at).$$

Quest'esempio mostra che le discontinuità nei dati iniziali (o nelle loro derivate) si propagano lungo le caratteristiche. Questo fenomeno si osserva in tutte le equazioni di tipo iperbolico (si veda, per esempio, le formule (19), (19″) del § 13.4 e la (23) del § 15.4).

4. Soluzione del problema di Cauchy classico. Dai teoremi dei §§ 12.3, 12.4 e 13.3 per $F(x, t) = f(x, t) + u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \times \times \delta'(t)$ derivano le seguenti asserzioni concernenti la risolvibilità del problema di Cauchy classico per l'equazione d'onda.

Siano $f \in C^2(t \geqslant 0)$, $u_0 \in C^3(R^n)$ *ed* $u_1 \in C^2(R^n)$, *per* $n = 3$, 2, *o* $f \in C^1(t \geqslant 0)$, $u_0 \in C^2(R^1)$ *ed* $u_1 \in C^1(R^1)$, *per* $n = 1$. *In questo caso la soluzione classica del problema di Cauchy esiste, è unica ed è espressa con la formula di Kirchhoff* per $n = 3$:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{U(x;\, at)} \frac{f\left(\xi, t - \left|\frac{x-\xi}{a}\right|\right)}{|x-\xi|}\, d\xi + \\ + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S(x;\, at)} u_1(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t} \int\limits_{S(x;\, at)} u_0(\xi)\, dS\right]; \qquad (19)$$

con la formula di Poisson per $n = 2$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^t \int\limits_{U(x,\, a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{U(x;\, at)} \frac{u_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{U(x;\, at)} \frac{u_0(\xi)\, d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}}; \qquad (19')$$

con la formula di D'Alembert per $n = 1$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)]. \qquad (19'')$$

Questa soluzione dipende con continuità dai valori di f, u_0 *ed* u_1 *dati nel problema di Cauchy nel senso seguente: se questi dati variano in modo che si abbia*

$$|f - \tilde{f}| \leqslant \varepsilon, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| \leqslant \varepsilon_0, \quad |u_1 - \tilde{u}_1| \leqslant \varepsilon_1,$$

$$|\operatorname{grad}(u_0 - \tilde{u}_0)| \leqslant \varepsilon_0'$$

(l'ultima uguaglianza è necessaria solo per $n = 3$ *e* 2), *le corrispondenti soluzioni* u *ed* $\tilde{u}$ *in un intervallo* $0 \leqslant t \leqslant T$ *qualsiasi, soddisfano le seguenti stime:*

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leqslant \frac{T^2}{2}\varepsilon + T\varepsilon_1 + \varepsilon_0 + aT\varepsilon_0', \quad n = 3, 2;$$

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leqslant \frac{T^2}{2}\varepsilon + T\varepsilon_1 + \varepsilon_0, \qquad n = 1.$$

Sommando, si può dire *che il problema di Cauchy per l'equazione d'onda è posto in modo corretto* (si veda il § 4.7), *ed inoltre* C^2 $(t > 0) \cap$ $\cap C^1$ $(t \geqslant 0)$ *è la classe di correttezza del problema di Cauchy classico e* $\mathscr{D}'$ (R^{n+1}) *è quella del problema di Cauchy generalizzato* (si veda il teorema del § 13.3).

Osservazione. Il metodo di risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione d'onda esposto sopra è valido, senza modifiche sostanziali, per il caso di un numero n arbitrario di variabili spaziali, nonché per i problemi nei quali i dati di Cauchy sono assegnati su una superficie arbitraria simile a quella spaziale (si veda il § 4.3). Inoltre, questo metodo è applicabile al problema di Cauchy per equazioni arbitrarie di tipo iperbolico a coefficienti costanti. Quest'equazione è caratterizzata dal fatto che essa possiede una soluzione fondamentale con un supporto contenuto in un cono convesso che non possiede una retta intera (si veda Hörmander [1], cap. V). Per la prima volta questo metodo è stato utilizzato in forma esplicita da Sobolev [2] (1936) per la risoluzione del problema di Cauchy per un'equazione iperbolica del secondo ordine (si veda anche Hadamard [1]).

5. Esercizi. a) Utilizzando la soluzione fondamentale dell'operatore di Dirac (§ 11.12, esercizio d)), dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Dirac (§ 2.8)

$$\left(i \sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right) \Psi = 0,$$

$$\Psi|_{x_0=0} = \Psi_0(x), \quad \Psi_0 = (\psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{03}, \psi_{04}),$$

$$\psi_{0j} \in \mathscr{D}'(R^3),$$

è espressa dalla formula

$$\Psi = \left(\sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - im_0 I\right) D^r(x_0, x) * \gamma^0 \Psi_0(x).$$

La convoluzione di una matrice con un vettore va definita mediante le stesse regole, con la sostituzione dell'operazione di moltiplicazione con quella di convoluzione $*$.

b) Utilizzando la soluzione fondamentale dell'operatore Klein-Gordon-Fock (esempio b) del § 11.12), dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Klein-Gordon-Fock (§ 2.8) è data dalla formula

$$u = D^r(x_0, x) * u_1(x) + \frac{\partial D^r(x_0, x)}{\partial x_0} * u_0(x).$$

c) Dimostrare che le soluzioni dei problemi misti

$$\Box_a u = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x, t < \infty,$$

1) $u|_{x=0} = \psi_0(t)$, 2) $u_x|_{x=0} = \psi_1(t)$, dove le funzioni ψ_0 e ψ_1 sono continue in $[0, \infty)$ e si annullano per $t < 0$, sono assegnate rispettivamente dalle formule

$$1)\ u(x, t) = -2a^2 \frac{\partial \mathscr{E}_1(x, t)}{\partial x} * \psi_0(t) = \psi_0\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

$$2)\ u(x, t) = -2a^2 \mathscr{E}_1(x, t) * \psi_1(t) = -a \int_0^{t - \frac{x}{a}} \psi_1(\tau)\, d\tau.$$

d) Utilizzando le soluzioni fondamentali (22) e (23) del § 11.5, dimostrare che i problemi di Cauchy

$$u' + au = \rho u, \quad u\,|_{t=0} = u_0, \quad \rho \in C\ (t \geqslant 0);$$

$$u'' + a^2 u = \rho u, \quad u\,|_{t=0} = u_0, \quad u'\,|_{t=0} = u_1$$

sono equivalenti, rispettivamente, alle seguenti equazioni integrali:

$$u(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \rho(\tau)\, u(\tau)\, d\tau + u_0 e^{-at}$$

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \sin a(t-\tau)\, \rho(\tau)\, u(\tau)\, d\tau + u_0 \cos at + u_1 \frac{\sin at}{a}.$$

e) Supponiamo che la funzione F sia finita. Dimostrare che la soluzione $u(x, t)$ del corrispondente problema di Cauchy generalizzato per l'equazione d'onda in R^4 ha la seguente proprietà: per una qualunque regione limitata $G \subset R^3$ esiste un numero $T = T(G)$ tale che $u(x, t) = 0$, $x \in G$, $t > T$.

f) Supponiamo che $f = 0$ e che le funzioni $u_0 \in C^3(R^2)$ ed $u_1 \in C^2(R^2)$ siano finite. Dimostrare che la corrispondente soluzione del problema di Cauchy per l'equazione d'onda in R^3 ha la seguente proprietà: per una qualunque regione limitata $G \subset R^2$ esiste una costante $K = K(G)$ tale che

$$|\, u(x, t)\,| \leqslant \frac{K}{t}, \quad x \in G, \ t > 0.$$

g) Dimostrare che le soluzioni particolari dell'equazione d'onda n-dimensionale $\square_1 u = 0$ (si veda il § 2.1) della forma $f(t/|\,x\,|)$ sono determinate dall'equazione differenziale

$$(\xi^2 + 1) f''(\xi) + (3 - n)\, \xi f'(\xi) = 0, \quad \xi^2 \neq 1.$$

In particolare,

$$u(x, t) = c_1 \ln \left| \frac{t - |\,x\,|}{t + |\,x\,|} \right| + c_2, \quad \frac{t}{|\,x\,|} \neq \pm 1, \quad n = 1;$$

$$u(x, t) = \begin{cases} c_1 \ln \left(\dfrac{|\,t\,|}{|\,x\,|} + \sqrt{\dfrac{t^2}{|\,x\,|^2} - 1} \right) + c_2, & \dfrac{|\,t\,|}{|\,x\,|} > 1, \quad n = 2; \\ c_1 \arcsin \dfrac{|\,t\,|}{|\,x\,|} + c_2, & \dfrac{|\,t\,|}{|\,x\,|} < 1, \end{cases}$$

$$u(x, t) = c_1 \frac{1}{|\,x\,|} + c_2, \quad x \neq 0, \ n = 3.$$

§ 14. *Propagazione delle onde*

In questo paragrafo sarà data un'interpretazione fisica delle soluzioni dell'equazione d'onda ottenute nel § 13.

1. Sovrapposizione delle onde e regioni d'influenza. Sia data una sorgente $F(x, t)$ che si annulla per $t < 0$. La soluzione $u(x, t)$ del problema di Cauchy generalizzato per l'equazione d'onda con funzione di sorgente $F(x, t)$ è espressa, conformemente alla formula (16) del § 13.3, da un potenziale d'onda con densità F, e cioè $u = \mathcal{E}_n * F$.

Il significato fisico di questa formula (si veda il § 11.3) consiste nel fatto che la perturbazione $u(x, t)$ nel punto x all'istante $t > 0$ costituisce una sovrapposizione di perturbazioni elementari

$$F(\xi, \tau)\, \mathscr{E}_n(x - \xi, t - \tau),$$

generate da sorgenti puntiformi

$$F(\xi, \tau)\, \delta(x - \xi) \cdot \delta(t - \tau),$$

quando i punti (ξ, τ) percorrono l'insieme dove è concentrata la perturbazione F. Questo fatto costituisce il principio di *sovrapposizione delle onde* (si veda il § 11.3).

Dal principio di sovrapposizione delle onde segue che la perturbazione u dalla sorgente F concentrata nell'insieme T (cioè supp $F \subset T$) può raggiungere solo quei punti del semispazio $t \geqslant 0$ che consistono dell'unione dei supp $\mathscr{E}_n(x - \xi, t - \tau)$ quando il punto (ξ, τ) percorre l'insieme T. L'insieme $M(T)$ ottenuto in questo modo si dice *regione d'influenza dell'insieme* T:

$$M(T) = \bigcup_{(\xi, \tau) \in T} \operatorname{supp} \mathscr{E}_n(x - \xi, t - \tau) = \operatorname{supp} \mathscr{E}_n + T.$$

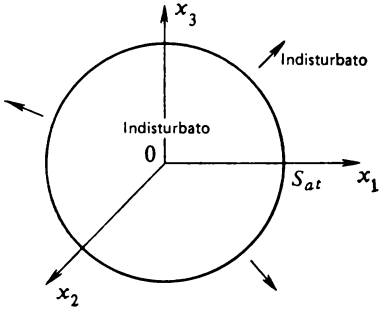


Fig. 46.

È chiaro che fuori dell'insieme $M(T)$ non ci sarà nessun disturbo, in altre parole, supp $u \subset M(T)$ se supp $F \subset T$.

La realizzazione concreta del principio di sovrapposizione dipende sostanzialmente dalla struttura del supporto della soluzione fondamentale $\mathscr{E}_n(x, t)$ e, quindi, dal numero n di variabili spaziali (si veda il § 12.1). Questo, a sua volta, determina le particolarità di propagazione di onde nello spazio, in un piano e lungo una retta.

2. Propagazione delle onde nello spazio. Dall'espressione per la soluzione fondamentale dell'operatore d'onda tridimensionale

$$\mathscr{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\, \delta_{S_{at}}(x) \equiv \frac{\theta(t)}{2\pi a}\, \delta(a^2 t^2 - |x|^2),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3),$$

segue che la perturbazione $\mathscr{E}_3(x, t)$ generata da una sorgente puntiforme, di azione istantanea, $\delta(x) \cdot \delta(t)$ all'istante $t > 0$ sarà concentrata su una superficie sferica di raggio at con centro nel punto $x = 0$ (figg. 46 e 44). Ciò vuol dire che questa perturbazione si propaga sotto forma di *un'onda sferica* $|x| = at$ che si muove con velocità a, ed inoltre, dopo il passaggio dell'onda, subentra una condi-

zione di quiete. In questo caso si dice che nello spazio ha luogo il *principio di Huygens.*

Da ciò, in virtù del principio di sovrapposizione delle onde (si veda il § 14.1), segue che la perturbazione u generata da una sorgente F arbitraria concentrata in T può raggiungere solo punti che costituiscono l'unione delle frontiere $a(t-\tau) = |x-\xi|$ dei coni di futuro $\Gamma^+(\xi, \tau)$ quando i loro vertici (ξ, τ) percorrono l'insieme T (fig. 47), di modo che

$$M(T) = \bigcup_{(\xi, \tau) \in T} \mathrm{fr}\Gamma^+(\xi, \tau).$$

In questo caso la perturbazione $u(x, t)$ (potenziale ritardato) per $t > 0$ è completamente determinato dai valori della funzione di

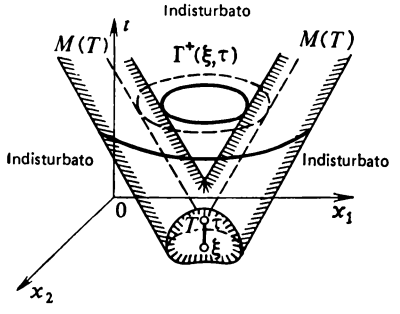


Fig. 47.

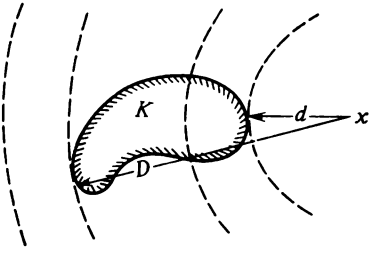


Fig. 48.

sorgente $F(\xi, \tau)$ sulla superficie laterale $B(x, t)$ del cono $\Gamma_0^-(x, t)$ (si veda l'osservazione del § 12.3 e la fig. 45). Tutto ciò costituisce la *formulazione matematica del principio di Huygens.*

In particolare, se la perturbazione F è ridotta ad una perturbazione iniziale della forma

$$F(x, t) = u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \tag{1}$$

allora $u(x, t)$ per $t > 0$ è completamente determinata dai valori di $u_0(\xi)$ ed $u_1(\xi)$ sulla superficie sferica $S(x, at)$, cioè nei punti sulla frontiera della base del cono $\Gamma_0^-(x, t)$.

Supponiamo ora che la perturbazione (1) sia concentrata nel compatto K del piano $t = 0$, cioè $\operatorname{supp} u_0 \subset K$, e $\operatorname{supp} u_1 \subset K$. Per quanto detto sopra, la perturbazione raggiungerà il punto $x \notin K$ all'istante $t_0 = d/a$ ed agirà in questo punto durante il periodo di tempo $(D-d)/a$, dove d e D sono le distanze minima e massima tra il punto x ed i punti dell'insieme K (fig. 48).

Per $t > D/a = t_1$ nel punto x subentra di nuovo lo stato indisturbato. Dunque, all'istante t_0 attraverso il punto x passa il *fronte d'onda avanzato*, mentre all'istante t_1 questo punto è attraversato dal *fronte d'onda arretrato.* Inoltre, all'istante t il fronte d'onda avanzato sarà l'inviluppo esterno delle superfici sferiche $S(\xi: at)$ in cui ξ

percorre i punti di K, ed il fronte d'onda arretrato sarà l'inviluppo interno di queste superfici sferiche (fig. 49).

In altre parole, all'istante $t > 0$, la perturbazione si propagherà nella regione compresa tra i fronti d'onda avanzato ed arretrato. Esaminando questo quadro, per tutti i $t \geqslant 0$, concludiamo che nello spazio R^4 delle variabili $(x,\ t)$ questa perturbazione sarà concentrata

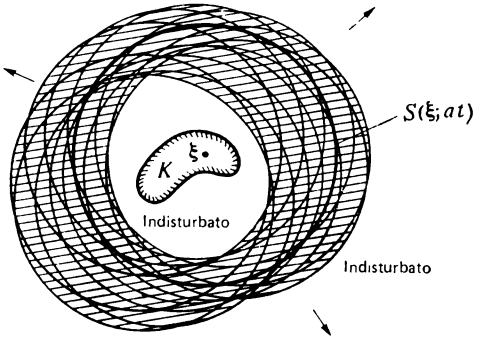


Fig. 49.

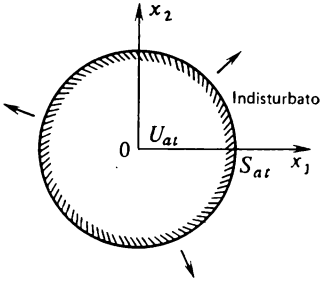


Fig. 50.

sull'unione delle frontiere $| x - \xi | = at$ dei coni di futuro $\Gamma^+ (\xi,\ 0)$ quando i loro vertici percorrono il compatto K (nel piano $\tau = 0$), cioè su $M\ (K)$.

3. Propagazione delle onde in un piano. Dalla formula per la soluzione fondamentale dell'operatore d'onda bidimensionale

$$\mathscr{E}_2 (x,\ t) = \frac{\theta (at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}\ ,\quad x = (x_1,\ x_2),$$

segue che la perturbazione $\mathscr{E}_2\ (x,\ t)$ generata da una sorgente puntiforme, di azione istantanea, $\delta\ (x) \cdot \delta\ (t)$ ad un istante $t > 0$ sarà concentrata in un cerchio chiuso di raggio at con centro nel punto $x = 0$ (fig. 50). Dunque, si osserva il fronte d'onda avanzato $| x | = at$ che si muove nel piano con una velocità a. Ma, a differenza del caso spaziale, dietro il fronte d'onda avanzato la perturbazione viene osservata a tutti gli istanti successivi, di modo che il fronte d'onda arretrato è assente. In questo caso si dice che nel piano ha luogo la *diffusione di onde*. Evidentemente, con ciò viene violato il principio di Huygens.

Per comprendere perché ha luogo la diffusione di onde nel piano, notiamo che la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_2\ (x,\ t)$ considerata come una funzione di quattro variabili $(x,\ x_3,\ t)$ è una perturbazione generata da una sorgente, di azione istantanea, $\delta(x) \cdot 1\ (x_3) \cdot \delta\ (t)$ concentrata sull'asse x_3 (si veda il § 11.7):

$$\mathscr{E}_2\ (x,\ t) = \mathscr{E}_3 * [\delta\ (x) \cdot 1\ (x_3) \cdot \delta\ (t)].$$

Da questa sorgente in R^3 la perturbazione si propaga nella forma di *onda cilindrica* $|x| \leqslant at$, il cui fronte d'onda avanzato si muove con velocità a perpendicolarmente all'asse x_3 (fig. 51). Dopo aver attraversato il fronte d'onda avanzato la perturbazione si conserva durante un periodo di tempo infinitamente lungo.

Infatti, in virtù del principio di Huygens (si veda il § 14.2), ad un punto dato $(x_0, 0) \in R^3$ all'istante $t > 0$ una perturbazione

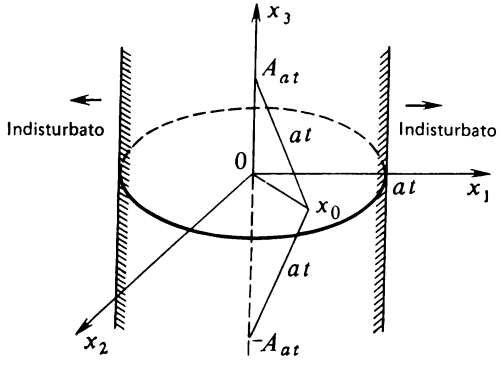


Fig. 51.

generata dalla sorgente $\delta(x) \cdot 1\ (x_3) \cdot \delta\ (t)$ arriverà da quei punti della superficie sferica $|x - x_0|^2 + x_3^2 = a^2t^2$ che appartengono all'asse x_3, cioè da punti (fig. 51)

$$\pm A_{at} = \{0,\ \pm \sqrt{a^2t^2 - |x - x_0|^2}\}.$$

Ne segue che per $t < (|x_0|/a) = t_0$ nel punto $(x_0, 0)$ sarà lo stato indisturbato: all'istante t_0 questo punto sarà attraversato dal fronte d'onda avanzato (la perturbazione arriverà dal punto $x = 0$); in tutti gli istanti successivi, $t > t_0$, in questo punto arriveranno le stesse perturbazioni dai punti $\pm A_{at}$ e, quindi, qui sarà osservata una perturbazione somma non nulla (il fronte d'onda arretrato è assente).

La presenza di diffusione di onde in un piano, nel caso di una perturbazione puntiforme iniziale $\delta\ (x) \cdot \delta\ (t)$, implica che la diffusione di onde è anche osservata nel caso di una perturbazione arbitraria $F\ (x, t)$, $F = 0$, $t < 0$.

Infatti, in virtù del principio di sovrapposizione delle onde (§ 14.1), una perturbazione u inviata dalla sorgente F che è concentrata in T, può raggiungere solo quei punti che costituiscono l'unione di chiusure dei coni di futuro $\overline{\Gamma}^+\ (\xi, \tau)$ quando i loro vertici (ξ, τ) percorrono l'insieme T (fig. 52), di modo che

$$M\ (T) = \bigcup_{(\xi, \tau) \in T} \overline{\Gamma}^+(\xi, \tau).$$

In questo caso i valori di $u\ (x, t)$, per $t > 0$, sono completamente definiti dai valori della funzione di sorgente $F\ (\xi, \tau)$ sulla chiusura

del cono $\overline{\Gamma}_0^-(x, t)$ (si veda la fig. 45). (Ciò costituisce il *contenuto matematico del concetto di* « diffusione di onde ».)

In particolare, se F è una perturbazione iniziale del tipo (1), i valori di $u(x, t)$, per $t > 0$, sono completamente definiti dai valori di $u_0(\xi)$ ed $u_1(\xi)$ nel cerchio $\overline{U}(x; at)$, cioè sulla base del cono $\Gamma_0^-(x, t)$. Quindi, se la perturbazione iniziale è concentrata in K,

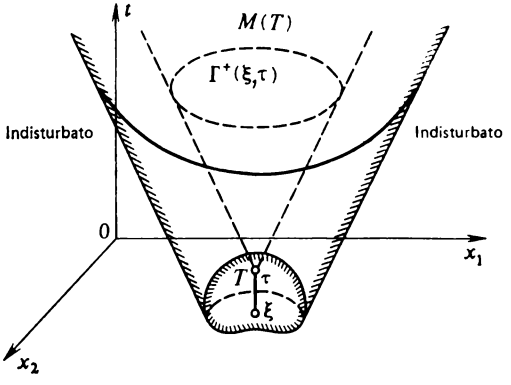


Fig. 52.

all'istante $t > 0$ la perturbazione $u(x, t)$ si propagherà su una regione che è l'unione dei cerchi $\overline{U}(\xi; at)$, quando i loro centri percorrono K (fig. 53). Dunque, in questo caso si osserva il fronte d'onda avanzato ed è assente quello arretrato.

In conformità con quanto è stato già detto, la regione d'influenza $M(K)$ del compatto K è l'unione di coni luminosi di futuro chiusi $\overline{\Gamma}^+(\xi, 0)$ quando i loro vertici $(\xi, 0)$ percorrono K nel piano $\tau = 0$ (si veda il § 12.3 e la fig. 52).

4. Propagazione delle onde lungo una retta. La forma della soluzione fondamentale dell'operatore d'onda unidimensionale, e cioè

$$\mathscr{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|), \quad x = x_1,$$

implica che la perturbazione $\mathscr{E}_1(x, t)$ prodotta da una sorgente puntiforme, di azione istantanea, $\delta(x)\cdot\delta(t)$, sarà concentrata all'istante $t > 0$ sul segmento $-at \leqslant x \leqslant at$ (fig. 42). In questo caso si osservano due fronti d'onda avanzati $x = at$ e $x = -at$ che si muovono lungo la retta con una velocità a rispettivamente a destra ed a sinistra. Come nel caso di un piano, dietro il fronte d'onda si osserva una perturbazione (nel dato caso questa perturbazione è costante ed uguale a $1/2a$), cioè ha luogo la diffusione di onde.

Per comprendere questo fenomeno, diamo un'interpretazione tridimensionale della soluzione fondamentale $\mathscr{E}_1(x, t)$. Questa soluzione costituisce una perturbazione di una sorgente istantanea $\delta(x) \times$

$\times 1\,(x_2,\ x_3)\cdot\delta\,(t)$ concentrata nel piano $x = 0$:

$$\mathscr{E}_1(x,\ t) = \mathscr{E}_3 * [\delta(x)\cdot\delta(x_2,\ x_3)\cdot\delta(t)].$$

Da questa sorgente in R^3 la perturbazione si propaga sotto forma di *un'onda piana* $|x| \leqslant at$ il cui fronte d'onda avanzato $|x| = at$ si sposta con velocità a perpendicolare al piano $x = 0$. Notiamo che,

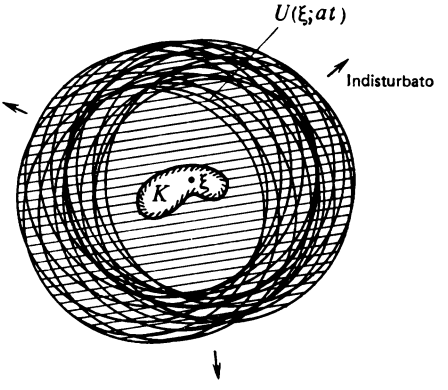


Fig. 53.

in questo caso, il fronte d'onda avanzato consiste di due piani $x = at$ e $x = -at$ che si spostano con velocità a rispettivamente a destra ed a sinistra rispetto al piano $x = 0$ (fig. 54). Dopo aver attraversato il fronte d'onda avanzato la perturbazione si conserva durante un periodo di tempo infinitamente lungo.

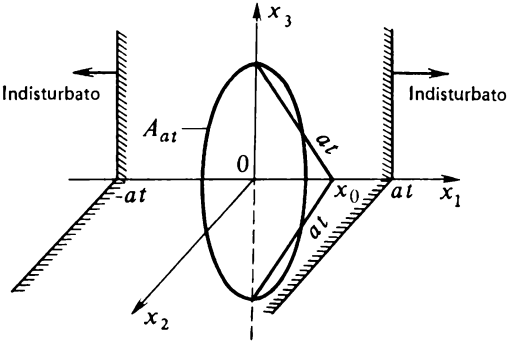


Fig. 54.

Infatti, in virtù del principio di Huygens (si veda il § 14.2), al dato punto $(x_0,\ 0,\ 0) \in R^3$ all'istante $t > 0$ la perturbazione prodotta dalla sorgente $\delta(x)\cdot 1\,(x_2,\ x_3)\cdot\delta(t)$ arriverà da quei punti della superficie sferica $|x - x_0|^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2t^2$ che appartengono al piano $x = 0$, cioè dai punti della circonferenza (fig. 54)

$$A_{at} = [x_2^2 + x_3^2 = a^2t^2 - x_0^2,\ x = 0].$$

Ne segue che per $t < (|x_0|)/a = t_0$ nel punto $(x_0, 0, 0)$ non c'è nessuna perturbazione; all'istante t_0 per questo punto passa il fronte d'onda avanzato (la perturbazione arriva dal punto 0); in tutti gli istanti successivi $t > t_0$ in questo punto arriveranno le perturbazioni identiche dai punti della circonferenza A_{at} e, quindi, in questo punto si osserverà una perturbazione somma non nulla (il fronte d'onda arretrato è assente).

La presenza di diffusione di onde lungo una retta nel caso di una perturbazione puntiforme iniziale $\delta(x)\cdot\delta(t)$ implica che la diffusione di onde si osserva anche per una perturbazione iniziale arbitraria $u_1(x)\cdot\delta(t)$.

Consideriamo ora una sorgente puntiforme istantanea della forma $\delta(x)\cdot\delta'(t)$. Conformemente al teorema del § 13.3 questa sorgente genera una perturbazione

$$\widetilde{\mathscr{E}}_1(x, t) = \mathscr{E}_1(x, t) * [\delta(x)\cdot\delta'(t)] = \frac{\partial \mathscr{E}_1(x, t)}{\partial t} = \\ = \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\theta(at - |x|) = \frac{1}{2}\delta(at - |x|). \quad (2)$$

Ne segue che la perturbazione $\widetilde{\mathscr{E}}_1(x, t)$ all'istante $t > 0$ sarà concentrata solo nei due punti $x = \pm at$, in modo che, dopo il passaggio

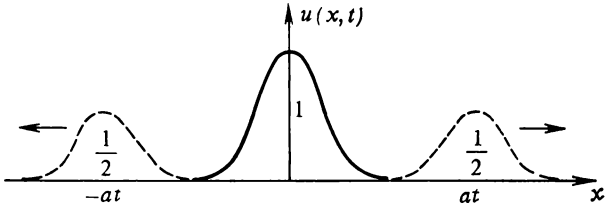


Fig. 55.

del fronte d'onda $|x| = at$, subentra nuovamente lo stato indisturbato. In questo caso ha luogo il principio di Huygens.

Per una perturbazione iniziale arbitraria della forma $u_0(x)\cdot\delta'(t)$ la perturbazione $u(x, t)$ per $t > 0$ è completamente definita dai valori di $u_0(\xi)$ nei punti $x \pm at$, cioè nei punti sulla frontiera della base del cono $\Gamma_0^-(x, t)$ (fig. 45). Questa perturbazione, in virtù del teorema del § 13.3, è data dalla formula

$$u = \mathscr{E}_1(x, t) * [u_0(x)\cdot\delta'(t)] = \widetilde{\mathscr{E}}_1(x, t) * u_0(x).$$

Da ciò, tenendo conto delle uguaglianze (2), per $t > 0$, si ottiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\delta(at - |x|) * u_0(x) = \frac{1}{2}u_0(x + at) + \\ + \frac{1}{2}u_0(x - at). \quad (3)$$

Il significato fisico della formula (3) consiste nel fatto come se la perturbazione iniziale $u_0(x)\cdot\delta'(t)$ per $t > 0$ si disgregasse in due perturbazioni simili $(1/2)\,u_0(x \pm at)$, ognuna con mezza intensità (fig. 55).

In corrispondenza con ciò, le regioni d'influenza del segmento $K = [b, c]$ per le perturbazioni iniziali $u_1(x) \cdot \delta(t)$ ed $u_0(x) \cdot \delta'(t)$ sono della forma illustrata nelle figg. 56 e 57.

Dunque, *per la perturbazione iniziale* $u_1(x) \cdot \delta(t)$ *su una retta ha luogo la diffusione di onde e per quella* $u_0(x) \cdot \delta'(t)$ *ha luogo il principio di Huygens.* Per una perturbazione arbitraria F, $F(x, t) = 0$,

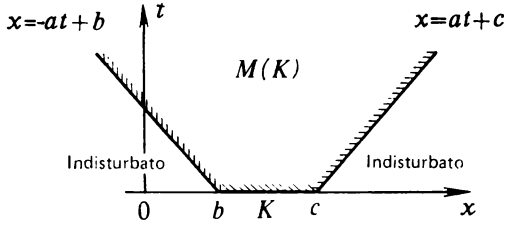


Fig. 56.

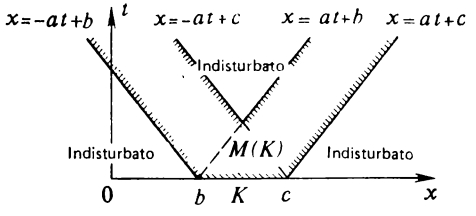


Fig. 57.

per $t < 0$, possono aver luogo il principio di Huygens, o la diffusione di onde, o la loro sovrapposizione. Le interpretazioni fisiche e le costruzioni geometriche sono analoghe rispettivamente a quelle considerate nei §§ 14.2 e 14.3.

5. Metodo delle onde in propagazione. Esponiamo un altro metodo, il metodo delle onde in propagazione, per la risoluzione del problema di Cauchy classico, relativo all'equazione d'onda omogenea unidimensionale

$$\Box_a u = 0, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \tag{5}$$

Dimostriamo prima il seguente lemma.

Lemma. *Affinché una funzione* $u(x, t)$ *della classe* C^2 *sia una soluzione dell'equazione d'onda* (4) *in una regione, è necessario e sufficiente che in questa regione la funzione sia rappresentata nella forma*

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \tag{6}$$

dove $f(\xi)$ *e* $g(\eta)$ *sono funzioni della classe* C^2 *in corrispondenti intervalli di variazione delle variabili* ξ *e* η.

Dimostrazione. La funzione (6) soddisfa l'equazione (4) poiché

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x-at) + a^2 g''(x+at) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Inversamente, supponiamo che la funzione $u(x, t)$ della classe C^2 soddisfi l'equazione (4) in una certa regione. Rappresentiamo l'equa-

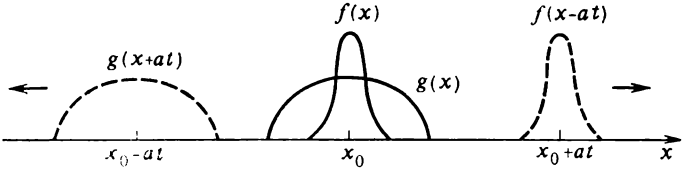


Fig. 58.

zione (4) nella forma canonica. Conformemente a quanto è stato detto nel § 3.4, le sue equazioni differenziali delle caratteristiche hanno la forma

$$\frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{dx}{dt} = a,$$

e, di conseguenza, la sostituzione di variabili

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \tag{7}$$

riduce la formula (4) alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Integrando quest'equazione rispetto a ξ si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \chi(\eta)$$

dove χ è una funzione della classe C^1. Integrando ora l'equazione ottenuta rispetto a η, scriviamo la funzione $\tilde{u}$ nella forma

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int^{\eta} \chi(\eta')\, d\eta' + f(\xi) = f(\xi) + g(\eta), \tag{8}$$

dove f e g sono funzioni della classe C^2. Passando alle vecchie variabili x e t tramite la (7), deduciamo dalla (8) la rappresentazione (6) per la soluzione $u(x, t)$. Il lemma è dimostrato.

Interpretazione fisica della soluzione (6). La funzione $f(x - at)$ descrive una perturbazione che dal punto x_0, nell'istante $t = 0$, arriva al punto $x = x_0 + at$ nell'istante t (fig. 58). Perciò questa funzione è un'onda che si sposta a destra con velocità a. Analogamente, la funzione $g(x + at)$ è un'onda che si sposta a sinistra con velocità a (fig. 58). La soluzione generale (6) dell'equazione d'onda (4) è la sovrapposizione di queste due onde.

Mediante la rappresentazione (6) della soluzione generale dell'equazione d'onda (4) la soluzione classica del problema di Cauchy (4), (5) è costruita come segue.

Supponiamo che la soluzione $u(x, t)$ di questo problema esista. Allora, conformemente al lemma del § 14.5, questa soluzione può essere scritta nella forma (6) con le funzioni f e g appartenenti alla classe $C^2(R^1)$. Affinché la soluzione $u(x, t)$ soddisfi le condizioni iniziali (5), è necessario che le funzioni f e g soddisfino le seguenti relazioni:

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad -af'(x) + ag'(x) = u_1(x),$$

cioè

$$f(\xi) + g(\xi) = u_0(\xi), \quad g(\xi) - f(\xi) = \frac{1}{a}\int_0^{\xi} u_1(\xi')\,d\xi' + C, \tag{9}$$

dove C è una costante. Risolvendo le equazioni (9) rispetto alle funzioni incognite f e g, e cioè

$$f(\xi) = \frac{1}{2}u_0(\xi) - \frac{1}{2a}\int_0^{\xi} u_1(\xi')\,d\xi' - \frac{C}{2},$$

$$g(\eta) = \frac{1}{2}u_0(\eta) + \frac{1}{2a}\int_0^{\eta} u_1(\xi')\,d\xi' + \frac{C}{2},$$

e sostituendo le espressioni ottenute per f e g nella formula (6), si ottiene la formula di D'Alembert (si veda il § 13.4):

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Verificando direttamente, si vede che la formula di D'Alembert (10) è difatti la soluzione classica del problema di Cauchy (4), (5) se $u_0 \in C^2(R^1)$ ed $u_1 \in C^1(R^1)$. Questa soluzione è unica (si veda il § 13.4).

Osservazione. Per costruire le soluzioni dell'equazione delle vibrazioni di una corda abbiamo utilizzato una proprietà fondamentale delle caratteristiche, e cioè il fatto che su una caratteristica η = costante quest'equazione è ridotta ad un'equazione differenziale ordinaria rispetto alla funzione $u_\xi(\xi, \eta)$ con la variabile indipendente ξ, e per questa ragione la soluzione è costruita per mezzo di quadrature. Questa proprietà delle caratteristiche, l'esistenza di equazioni con un numero minore di variabili che collegano i valori di una funzione ignota e delle sue derivate, è alla base di una serie di importanti metodi d'integrazione delle equazioni (quasi-lineari) del tipo iperbolico (si veda il § 15).

6. Metodo delle riflessioni. Corda semiinfinita. Il metodo delle onde in propagazione della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione (4), esposto nella sezione precedente, permette di risolvere alcuni problemi misti per questa equazione. Per fissare le idee

consideriamo il problema misto (si veda il § 4.5) che descrive le vibrazioni di una corda semiinfinita $x > 0$ con l'estremità sinistra fissata:

$$u\,|_{x=0} = 0. \tag{11}$$

Dimostriamo prima che *ogni soluzione classica* $u\,(x,\ t)$ *dell'equazione d'onda* (4) *nel quadrante* $x > 0,\ t > 0$, *che soddisfa la condizione* (11) *può essere scritta nella forma*

$$u\,(x,\ t) = g\,(x + at) - g\,(-x + at),\quad g \in C^2\,(R^1). \tag{12}$$

Infatti, secondo il lemma del § 14.5 la soluzione $u\,(x,\ t)$ è rappresentata nella forma (6) dove $f\,(\xi) \in C^2\,(R^1)$ e $g\,(\eta) \in C^2\,(\eta > 0)$. Da ciò, tenendo conto della condizione (11), si ottiene

$$0 = f\,(-at) + g\,(at),$$

da cui segue la rappresentazione (12).

Interpretazione fisica della soluzione (12). Questa soluzione è una sovrapposizione di due onde: dell'onda

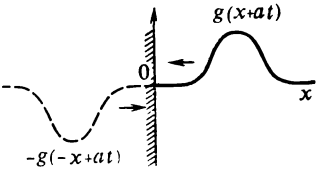


Fig. 59.

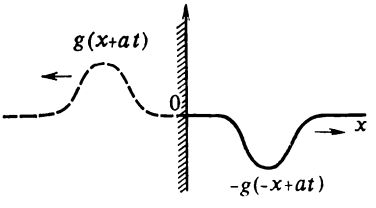


Fig. 60.

$g\,(x + at)$ che si muove a sinistra con velocità a e dell'onda $-g\,(-x + at)$ che si muove con la stessa velocità a destra. Supponiamo che l'onda $g\,(x + at)$ si muova lungo la corda semiinfinita $x > 0$ fissata nel punto $x = 0$. Allora l'onda $-g\,(-x + at)$ si muoverà lungo il semiasse $x < 0$ incontro all'onda $g\,(x + at)$ (fig. 59). Ad un certo istante queste onde s'incontreranno nel punto $x = 0$ e sovrapponendosi forniranno una perturbazione nulla in questo punto. Durante il moto ulteriore l'onda $g\,(x + at)$ andrà all'esterno della corda, mentre l'onda $-g\,(-x + at)$ si propagherà lungo la corda. In conseguenza di tutto ciò si osserverà la *riflessione dell'onda* $g\,(x + at)$ *dall'estremità della corda* $x = 0$ *accompagnata da un cambiamento di segno* (fig. 60).

Costruiamo ora la soluzione del problema misto (4)-(5)-(11). Ogni soluzione classica $u\,(x,\ t)$ di questo problema, in virtù della (12), ammette una continuazione dispari $\tilde{u}\,(x,\ t)$ in x della classe $C^2\,(R^2)$ e questa continuazione soddisfa l'equazione (4) in R^2. Da ciò e dalle condizioni (5) segue che la soluzione $\tilde{u}\,(x,\ t)$ soddisfa le condizioni iniziali

$$\tilde{u}\,|_{t=0} = \tilde{u}_0\,(x),\ \tilde{u}_t\,|_{t=0} = \tilde{u}_1\,(x), \tag{13}$$

dove $\tilde{u}_0$ ed $\tilde{u}_1$ sono rispettivamente continuazioni dispari di u_0 ed u_1. Ma la soluzione di questo problema di Cauchy è unica ed è data dalla formula di D'Alembert (10) con la sostituzione di u_0 con $\tilde{u}_0$ e di u_1 con $\tilde{u}_1$ se $\tilde{u}_0 \in C^2(R^1)$ ed $\tilde{u}_1 \in C^1(R^1)$. Queste ultime condizioni saranno verificate se

$$u_0 \in C^2 (x \geqslant 0),\ u_1 \in C^1 (x \geqslant 0),\ u_0 (0) = u_0'' (0) = u_1 (0) = 0. \tag{14}$$

Dunque, se sono verificate le condizioni (14), la soluzione del problema misto (4)-(5)-(11) esiste, è unica ed è assegnata dalla formula

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0 (x+at) + \tilde{u}_0 (x-at)] + \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1 (\xi)\, d\xi,\ x \geqslant 0, \tag{15}$$

Sia ora $x - at \geqslant 0$. Si ha allora

$$\tilde{u}_0 (x - at) = u_0 (x - at),\ \tilde{u}_1 (\xi) = u_1 (\xi),\ \xi \geqslant x - at \geqslant 0,$$

e la formula (15) assume la forma

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}[u_0 (x+at) + u_0 (x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1 (\xi)\, d\xi,\ x \geqslant at. \tag{16}$$

Sia ora $x - at \leqslant 0$. In questo caso si ha

$$\tilde{u}_0 (x - at) = -u_0 (-x + at),\ \tilde{u}_1 (\xi) = -u_1 (-\xi),$$
$$x - at \leqslant \xi \leqslant 0,$$

e la formula (15) assume la forma

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}[u_0 (x+at) - u_0 (at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} u_1 (\xi)\, d\xi,$$
$$0 \leqslant x \leqslant at. \tag{17}$$

Come segue dalla formula (17), nel punto $(x,\ t)$, $0 \leqslant x \leqslant at$, arrivano due onde: un'onda diretta inviata dal punto $(x + at,\ 0)$, ed un'onda una volta riflessa inviata dal punto $(at - x,\ 0)$ (che coincide con un'onda diretta inviata dal punto fittizio $(x - at,\ 0)$, si veda la fig. 61).

In modo analogo viene considerato il problema misto per una corda semiinfinita $x > 0$ con un'estremità sinistra libera:

$$u_x |_{x=0} = 0.$$

Anche qui ha luogo la riflessione delle onde dall'estremità della corda nel punto $x = 0$, ma senza cambiar di segno.

7. Metodo delle riflessioni. Corda finita. Applichiamo il metodo delle riflessioni esposto nella sezione precedente, per risolvere il problema misto per una corda finita $0 \leqslant x \leqslant l$ ad estremità fissate:

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \tag{18}$$

Dimostriamo prima che *ogni soluzione classica* $u(x, t)$ *dell'equazione d'onda* (4) *nella semibanda* $0 < x < l$, $t > 0$, *soddisfacente le condizioni* (18), *può essere scritta nella forma*

$$u(x, t) = g(x + at) - g(-x + at),$$
$$g(\xi + 2l) = g(\xi), \quad g \in C^2(R^1). \tag{19}$$

Infatti, conformemente al lemma del § 14.5 la soluzione $u(x, t)$ può essere scritta nella forma della (6) dove $f(\xi) \in C^2$ $(\xi < l)$ e $g(\eta) \in C^2$ $(\eta > 0)$. Di qui e prendendo in considerazione le condizioni (18), si ottiene

$$g(\xi) = -f(-\xi), \quad f(l - \xi) = -g(l + \xi). \tag{20}$$

Queste relazioni definiscono le continuazioni delle funzioni f e g su tutto l'asse con conservazione della classe C^2. Infatti, l'uguaglianza

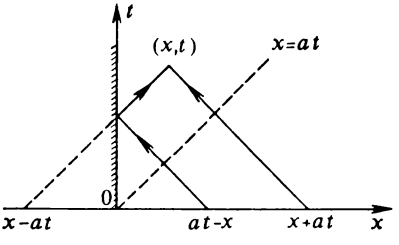


Fig. 61.

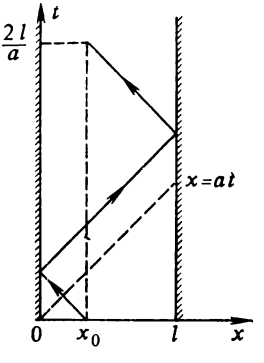


Fig. 62.

$g(\xi) = -f(-\xi)$ estende la funzione g all'intervallo $(-l, \infty)$. Allora la seconda delle uguaglianze (20) scritta nella forma $f(\eta) = -g(2l - \eta)$, estende la funzione f all'intervallo $(-\infty, 3l)$, ecc. In seguito a questa continuazione le funzioni f e g apparterranno alla classe C^2 (R^1) e verificheranno le relazioni (20). Da ciò seguono la rappresentazione (19) e la periodicità $2l$ della funzione g:

$$-g(l + \xi) = f(l - \xi) = -g(-l + \xi).$$

La soluzione (19) mostra che ha luogo la riflessione di onde da entrambe le estremità $x = 0$ e $x = l$ con cambiamento di segno. Ne segue che il moto della corda è periodico nel tempo con un periodo $2l/a$ (fig. 62).

Costruiamo ora la soluzione del problema misto (4)-(5)-(18). Se la soluzione classica $u(x, t)$ di questo problema esiste, questa soluzione, in virtù della (19), ammette una continuazione dispari di periodo $2l$ $\tilde{u}(x, t)$ in x rispetto ai punti $x = 0$ e $x = l$ e questa continuazione appartiene alla classe C^2 (R^2) e soddisfa l'equazione (4) in (R^2). Da ciò e dalle condizioni (5) segue che la funzione $\tilde{u}(x, t)$

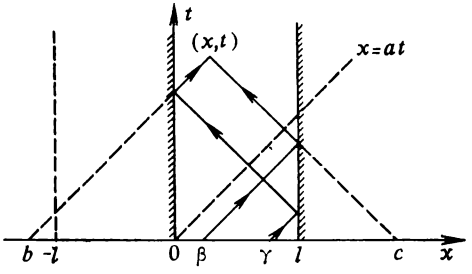


Fig. 63.

soddisfa le condizioni iniziali (13) dove le funzioni $\tilde{u}_0$ ed $\tilde{u}_1$ sono rispettivamente continuazioni dispari di periodo $2l$ di u_0 ed u_1 rispetto ai punti $x = 0$ e $x = l$.

Ritornando alla sezione precedente, concludiamo che se le funzioni u_0 ed u_1 soddisfano le condizioni

$$\begin{gathered} x_0 \in C^2([0, l]),\ u_0(0) = u_0''(0) = u_0(l) = u_0''(l) = 0, \\ u_1 \in C^1([0, l]),\quad u_1(0) = u_1(l) = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

la soluzione del problema misto (4)-(5)-(18) esiste, è unica ed è data dalla formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi)\, d\xi,$$

$$0 \leqslant x \leqslant l. \tag{22}$$

Sia il punto (x, t) disposto nel modo mostrato nella fig. 63. Allora la formula (22) in questo punto assume la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(\gamma) - u_0(\beta)] - \frac{1}{2a}\int_{\beta}^{\gamma} u_1(\xi)\, d\xi. \tag{23}$$

Infatti, utilizzando la regola delle riflessioni, abbiamo

$$\tilde{u}_0(b) = u_0(\gamma),\ \tilde{u}_0(c) = -u_0(\beta),$$

$$\int_b^c \tilde{u}_1(\xi)\, d\xi = \int_b^{-l} \tilde{u}_1(\xi)\, d\xi + \int_l^c \tilde{u}_1(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\gamma}^{l} u_1(\xi)\, d\xi + \int_{l}^{\beta} u_1(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma}^{\beta} u_1(\xi)\, d\xi,$$

da cui, insieme alla (22), segue la formula (23). Questa formula mostra che nel punto (x, t) arrivano due onde: una dal punto β (che è una volta riflessa dall'estremità $x = l$) e l'altra dal punto γ (riflessa una volta dall'estremità $x = l$ ed una volta dall'estremità $x = 0$) (fig. 63).

8. Equazioni d'onda non lineari. Un metodo, simile al metodo di D'Alembert per la costruzione delle soluzioni di un'equazione d'onda lineare in due variabili esposto nelle sezioni 5-7 del § 14, può essere applicato ad alcune equazioni non lineari. Cerchiamo le soluzioni particolari dell'equazione non lineare

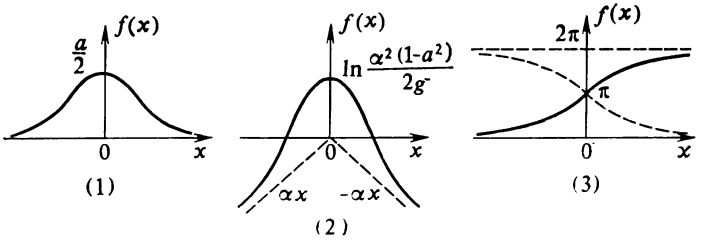


Fig. 64.

$$F(u, \ldots, D^{\alpha}u, \ldots) = 0 \tag{24}$$

nella forma

$$u(x) = f(\xi), \quad \xi = (l, x) - x_0,$$

dove l e x_0 sono vettori costanti. In virtù della (24), la funzione f deve verificare l'equazione differenziale ordinaria

$$F(f, \ldots, l^{\alpha} f^{(|\alpha|)}, \ldots) = 0. \tag{25}$$

Esempi. 1) *Equazione di Korteweg-de Vries*

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{26}$$

$$f(\xi) = \frac{a}{2\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(x - at - x_0)\right]}, \quad a > 0. \tag{27}$$

2) *Equazione di Liouville*

$$u_{tt} - u_{xx} = ge^{u}, \quad g > 0, \tag{28}$$

$$f(\xi) = \ln \frac{\alpha^2(1-a^2)}{2g\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\alpha}{2}(x - at - x_0)\right]}, \quad 0 \leqslant a < 1. \tag{29}$$

Come soluzione dell'equazione (28) abbiamo la funzione

$$u(x, t) = \ln \frac{8\varphi'(x+t)\,\psi'(x-t)}{g[\varphi(x+t) - \psi(x-t)]^2}, \tag{30}$$

dove φ e ψ sono funzioni arbitrarie della classe C^3 soddisfacenti le condizioni $\varphi' > 0$ e $\psi' > 0$.

3) *Equazione Sine-Gordon* (cfr. il § 1.8)

$$u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u, \quad g > 0, \tag{31}$$

$$f(\xi) = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm\sqrt{g}\frac{x - at - x_0}{\sqrt{1-a^2}}}. \tag{32}$$

Le soluzioni (27), (29) e (32) rappresentano un'« onda solitaria »; il loro comportamento per $t = 0$ e $x_0 = 0$ è illustrato nella fig. 64. Queste soluzioni sono dette *solitoni*.

Le onde (27) e (32) sono caratterizzate dal fatto che la loro energia è finita:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u_t^2+u_x^2)\,dx+\frac{1+a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[f'(\xi)]^2\,d\xi.$$

Le equazioni menzionate appaiono in molti problemi non lineari di propagazione delle onde [1]. Questi problemi sono anche interessanti per la teoria quantistica del campo come modello ad interazione non banale.

§ 15. *Metodo di Riemann*

In questo paragrafo esporremo il *metodo di Riemann* per la risoluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare di tipo iperbolico a due variabili indipendenti, ridotta alla forma canonica:

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y). \tag{1}$$

1. Soluzione del problema di Goursat. Per risolvere l'equazione (1) consideriamo il problema di Goursat (si veda la voce a) del § 4.6)

$$\begin{cases} u\,|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \varphi_1(0) = \varphi_2(0). \\ u\,|_{x=0} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant y_0, \end{cases} \tag{2}$$

Le funzioni a, b, e c sono supposte continue nel rettangolo chiuso $\overline{\Pi}$, dove $\Pi = (0, x_0) \times (0, y_0)$; la soluzione $u(x, y)$ è cercata in Π.

Supponiamo che $f \in C(\overline{\Pi})$, $\varphi_1 \in C^1([0, x_0])$ e $\varphi_2 \in C^1([0, y_0])$. Riduciamo il problema di Goursat (1)-(2) ad un sistema equivalente di tre equazioni integrali supponendo che la soluzione sia $u \in C^1(\overline{\Pi})$ (e si ha allora $u_{xy} \in C(\overline{\Pi})$).

Sia $u(x, y)$ una soluzione di questo problema; $u \in C^1(\overline{\Pi})$. Poniamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w. \tag{3}$$

In questo caso l'equazione (1) e le condizioni (2) assumono rispettivamente la forma

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = f - av - bw - cu, \tag{4}$$

$$v|_{y=0} = \varphi_1'(x), \quad w|_{x=0} = \varphi_2'(y). \tag{5}$$

[1] Si veda Whitham [1].

Dalle (3)-(5) si ottiene immediatamente un sistema di tre equazioni integrali rispetto alle funzioni u, v e w:

$$\begin{cases} u(x, y) = \varphi_1(x) + \int_0^y w(x, y')\, dy', \\ v(x, y) = \varphi_1'(x) + \int_0^y (f - av - bw - cu)(x, y')\, dy', \\ w(x, y) = \varphi_2'(y) + \int_0^x (f - av - bw - cu)(x', y)\, dx'. \end{cases} \tag{6}$$

Supponiamo, inversamente, che le funzioni u, v e w siano continue su $\overline{\Pi}$ e soddisfino il sistema di equazioni integrali (6). Dimostriamo che la funzione $u \in C^1(\overline{\Pi})$ è la soluzione del problema di Goursat (1)-(2). Infatti, dalla (6) seguono direttamente le uguaglianze (4), $\partial u/\partial y = w$ e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1'(x) + \int_0^y \frac{\partial w(x, y')}{\partial x}\, dy' =$$

$$= \varphi_1'(x) + \int_0^y (f - av - bw - cu)(x, y')\, dy' = v,$$

di modo che la funzione $u \in C^1(\overline{\Pi})$ soddisfa l'equazione (1) in Π:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = f - av - bw - cu = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}.$$

Inoltre, la funzione u soddisfa anche le condizioni di frontiera (2):

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad u|_{x=0} = \varphi_1(0) + \int_0^y w(0, y')\, dy' =$$

$$= \varphi_1(0) + \int_0^y \varphi_2'(y')\, dy' = \varphi_1(0) + \varphi_2(y) - \varphi_2(0) = \varphi_2(y).$$

Dunque, il problema di Goursat (1)-(2) è equivalente al sistema di equazioni integrali (6). È, quindi, sufficiente studiare questo sistema.

Costruiamo la soluzione del sistema (6) mediante il metodo delle approssimazioni successive ponendo

$$\begin{cases} u_0 = \varphi_1(x), \quad v_0 = \varphi_1'(x) + \int_0^y f(x, y')\, dy', \\ w_0 = \varphi_2'(y) + \int_0^x f(x', y)\, dx'; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} u_p = \int_0^y w_{p-1}(x,\ y')\,dy', \\ v_p = -\int_0^y (av_{p-1} + bw_{p-1} + cu_{p-1})(x,\ y')\,dy', \\ w_p = -\int_0^x (av_{p-1} + bw_{p-1} + cu_{p-1})(x',\ y)\,dx', \quad p = 1,\ 2,\ \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Dimostriamo, per tutti i valori di $(x,\ y)$ appartenenti a $\bar{\Pi}$ e per $p = 0,\ 1,\ \ldots$ le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{cases} |u_p(x,\ y)| \leqslant MK^p \dfrac{(x+y)^p}{p!}, \\ |v_p(x,\ y)| \leqslant MK^p \dfrac{(x+y)^p}{p!}, \\ |w_p(x,\ y)| \leqslant MK^p \dfrac{(x+y)^p}{p!}, \end{cases}$$

dove

$$M = \max\,[\max\,|\,u_0\,|,\ \max\,|\,v_0\,|,\ \max\,|\,w_0\,|],$$
$$K = 1 + \max\,(|\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,|).$$

Per $p = 0$ le disuguaglianze (9) sono, evidentemente, verificate. Dimostriamo che le disuguaglianze (9) restano valide se sostituiamo p con $p + 1$. Facciamolo, per esempio, per v_{p+1}. Dalle relazioni di ricorrenza (8) e dalle disuguaglianze (9) abbiamo

$$|v_{p+1}| \leqslant \int_0^y (|a|\,|v_p| + |b|\,|w_p| + |c|\,|u_p|)(x,\ y')\,dy' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MK^p}{p!} \int_0^y (x+y')^p (|a| + |b| + |c|)(x,\ y')\,dy' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MK^{p+1}}{(p+1)!}\,[(x+y)^{p+1} - x^{p+1}] \leqslant MK^{p+1} \frac{(x+y)^{p+1}}{(p+1)!},$$

come si voleva dimostrare. Dalle disuguaglianze (9) segue la convergenza regolare (si veda il § 1.3) delle serie

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} u_p,\ v = \sum_{p=0}^{\infty} v_p,\ w = \sum_{p=0}^{\infty} w_p, \tag{10}$$

che sono maggiorate mediante una serie uniformemente convergente su $\bar{\Pi}$:

$$M \sum_{p=1}^{\infty} K^p \frac{(x+y)^p}{p!} = Me^{K(x+y)}. \tag{11}$$

Le funzioni costruite u, v e w sono continue su $\overline{\Pi}$. Dimostriamo che queste funzioni soddisfano il sistema (6). Stabiliamo ciò, per esempio, per la prima delle equazioni (6). Sommando la prima delle relazioni di ricorrenza (8) rispetto a p da 0 a N ed utilizzando la (7), si ottiene

$$\sum_{p=0}^{N} u_p(x, y) = \varphi_1(x) + \int_0^y \sum_{p=0}^{N-1} w_p(x, y')\, dy', \quad N = 1, 2, \ldots$$

Passando al limite per $N \to \infty$ ed utilizzando la convergenza uniforme delle serie (10), otteniamo la prima delle equazioni (6).

Dimostriamo l'unicità della soluzione del sistema di equazioni (6) nella classe $C(\overline{\Pi})$. Per farlo, è sufficiente dimostrare che il corrispondente sistema omogeneo (6) ha solo una soluzione nulla (si veda il § 1.11). Siano u^*, v^* e w^* la soluzione di questo sistema omogeneo con $|u^*| \leqslant M$, $|v^*| \leqslant M$ e $|w^*| \leqslant M$. Visto che le funzioni $u_p = u^*$, $v_p = v^*$ e $w_p = w^*$ verificano le relazioni di ricorrenza (8), allora, da quanto abbiamo dimostrato, per queste funzioni sono valide le disuguaglianze di tipo (9):

$$|u^*(x, y)| \leqslant MK^p \frac{(x+y)^p}{p!}, \ \ldots, \ p = 1, 2, \ldots$$

Passando al limite per $p \to \infty$, si ottiene $u^* = v^* = w^* = 0$, come si doveva dimostrare.

Dimostriamo ora la dipendenza continua della soluzione dai valori di f, φ_1, e φ_2 dati. Siano $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}_1$ e $\tilde{\varphi}_2$ altri valori dati ed inoltre

$$\begin{cases} |f - \tilde{f}| \leqslant \varepsilon, |\varphi_1 - \tilde{\varphi}_1| \leqslant \varepsilon_1, \ |\varphi_1' - \tilde{\varphi}_1'| \leqslant \varepsilon_1', \\ |\varphi_2 - \tilde{\varphi}_2| \leqslant \varepsilon_2, \ |\varphi_2' - \tilde{\varphi}_2'| \leqslant \varepsilon_2'. \end{cases} \tag{12}$$

Denotiamo con u ed $\tilde{u}$ le corrispondenti soluzioni del problema di Goursat. Allora esiste una costante C tale che

$$\begin{cases} |u - \tilde{u}| \leqslant C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_2'), \\ |u_x - \tilde{u}_x| \leqslant C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_2'), \\ |u_y - \tilde{u}_y| \leqslant C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_2'), \\ |u_{xy} - \tilde{u}_{xy}| \leqslant C(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_2'). \end{cases} \tag{13}$$

Infatti, la funzione $u - \tilde{u}$ è una soluzione del problema di Goursat con i valori dati $f - \tilde{f}$, $\varphi_1 - \tilde{\varphi}_1$ e $\varphi_2 - \tilde{\varphi}_2$. Da quanto è stato dimostrato le funzioni $u - \tilde{u}$, $v - \tilde{v}$ e $w - \tilde{w}$ determinate dalle corrispondenti serie (10), sono maggiorate su $\overline{\Pi}$ dalla quantità (11), $\max [\max |u_0 - \tilde{u}_0|, \ \max |v_0 - \tilde{v}_0|, \ \max |w_0 - \tilde{w}_0|] e^{K(x+y)}$,

cioè, in virtù delle (7) e (12), dalla quantità

$$\max\Big[\max|\varphi_1-\tilde{\varphi}_1|,\ \max\Big|\varphi_1'-\tilde{\varphi}_1'+\int_0^y (f-\tilde{f})(x,\ y')\,dy'\Big|,$$

$$\max\Big|\varphi_2'-\tilde{\varphi}_2'+\int_0^x (f-\tilde{f})(x',\ y)\,dx'\Big|\Big]\,e^{K(x_0+y_0)}\leqslant$$

$$\leqslant C(\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_1'+\varepsilon_2+\varepsilon_2')$$

Da ciò, nonché dalle relazioni (3) e dall'equazione (1), seguono le disuguaglianze (13).

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente teorema:

Teorema. *Se le funzioni* a, b, c *e* f *sono continue su* $\overline{\Pi}$, $\varphi_1 \in C^1$ ($[0,\ x_0]$), $\varphi_2 \in C^1$ ($[0,\ y_0]$), $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, *la soluzione del problema di Goursat* (1)-(2) *nella classe* $C^1(\overline{\Pi})$ *esiste, è unica e dipende con continuità dai dati* f, φ_1 *e* φ_2 *nel senso di* (12)-(13).

2. Formula di Green. Supponiamo che le funzioni a, b, a_x e b_y siano continue sulla regione limitata chiusa $\overline{G}$ che ha una frontiera regolare a tratti S e che $\boldsymbol{n}$ sia una normale esterna a S. Allora per funzioni u e v arbitrarie della classe $C^1(\overline{G})$ e tali che u_{xy} e v_{xy} siano continue su $\overline{G}$, è valida l'uguaglianza

$$\int_G (vLu-uL^*v)\,dx\,dy=\int_S\Big[\Big(\frac{v}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{2}\frac{\partial v}{\partial y}+auv\Big)\cos(\boldsymbol{n}x)+$$

$$+\Big(\frac{v}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+buv\Big)\cos(\boldsymbol{n}y)\Big]\,dS, \qquad (14)$$

(*formula di Green*), dove L^* è un operatore differenziale formalmente coniugato all'operatore L (si veda la (3) del § 11.1),

$$L^*v\equiv\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial(av)}{\partial x}-\frac{\partial(bv)}{\partial y}+cv.$$

La formula (14) si ottiene per integrazione rispetto alla regione G dell'identità

$$vLu-uL^*v=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{v}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{2}\frac{\partial v}{\partial y}+auv\Big)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{v}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+buv\Big)$$

e per applicazione all'integrale del secondo membro della formula di Gauss-Ostrogradskij[1].

---

[1] Per le regioni su un piano questa formula è spesso chiamata formula di Green.

3. Funzione di Riemann. La *funzione di Riemann* di un operatore L è una funzione $\mathcal{R}(x, y; \xi, \eta)$ soddisfacente le seguenti condizioni:

1) le funzioni $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$ e $\mathcal{R}_{xy}$ sono continue in ognuna delle variabili $(x, y; \xi, \eta)$ su $\overline{\Pi} \times \overline{\Pi}$;

2) per ogni $(\xi, \eta) \in \overline{\Pi}$ la funzione $\mathcal{R}$ verifica l'equazione

$$L^*_{(x, y)} \mathcal{R}(x, y; \xi, \eta) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\Pi},$$

e le condizioni sulle caratteristiche $x = \xi$ ed $y = \eta$ (fig. 65), cioè

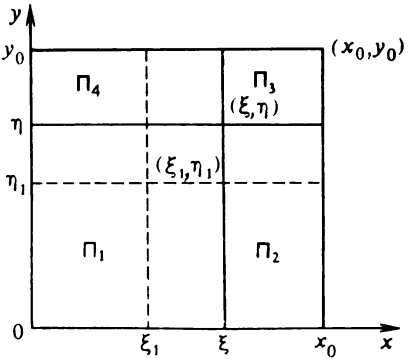


Fig. 65.

$$\mathcal{R}|_{y=\eta} = e^{\int_{\xi}^{x} b(x', \eta)\, dx'}, \qquad \mathcal{R}|_{x=\xi} = e^{\int_{\eta}^{y} a(\xi, y')\, dy'}. \quad (15)$$

Dalle condizioni (15) concludiamo che

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1, \quad (16)$$

$$\mathcal{R}_x|_{y=\eta} = b(x, \eta)\, \mathcal{R}|_{y=\eta}, \quad \mathcal{R}_y|_{x=\xi} = a(\xi, y)\, \mathcal{R}|_{x=\xi}. \quad (17)$$

Conformemente a questa definizione la funzione di Riemann $\mathcal{R}^*(x, y; \xi, \eta)$ dell'operatore L^* è continua su $\overline{\Pi} \times \overline{\Pi}$ insieme con le derivate $\mathcal{R}^*_x$, $\mathcal{R}^*_y$ e $\mathcal{R}^*_{xy}$ e soddisfa l'equazione $L_{(x,y)} \mathcal{R}^* = 0$ su $\overline{\Pi}$ e le seguenti condizioni sulle caratteristiche $x = \xi$ ed $y = \eta$:

$$\mathcal{R}^*|_{y=\eta} = e^{-\int_{\xi}^{x} b(x', \eta)\, dx'}, \qquad \mathcal{R}^*|_{x=\xi} = e^{-\int_{\eta}^{y} a(\xi, y')\, dy'}, \quad (15^*)$$

di modo che

$$\mathcal{R}^*(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1, \quad (16^*)$$

$$\mathcal{R}^*_x|_{y=\eta} = -b(x, \eta)\, \mathcal{R}^*|_{y=\eta}, \quad \mathcal{R}^*_y|_{x=\xi} = -a(\xi, y)\, \mathcal{R}^*|_{x=\xi}. \quad (17^*)$$

Teorema. *Se le funzioni a, b, c, a_x e b_y sono continue su $\overline{\Pi}$, la funzione di Riemann $\mathcal{R}$ esiste, è unica ed è valida l'uguaglianza*

$$\mathcal{R}(x, y; \xi, \eta) = \mathcal{R}^*(\xi, \eta; x, y), \quad (18)$$

dove $\mathcal{R}^*$ è la funzione di Riemann dell'operatore L^*.

Dimostrazione. Visto che i dati caratteristici (15) appartengono alle classi $C^1([0, x_0])$ e $C^1([0, y_0])$, rispettivamente, conformemente al teorema del § 15.1 per ogni $(\xi, \eta) \in \Pi$ esistono e sono uniche le soluzioni dei quattro problemi di Goursat nei rettangoli Π_1,

Π_2, Π_3 e Π_4[1] (fig. 65) per l'equazione $L^*u = 0$ con i dati (15). Denotiamo questa soluzione con $\mathcal{R}(x, y; \xi, \eta)$.

Per costruzione, la funzione $\mathcal{R}$ è continua in (x, y) su $\overline{\Pi}$, le funzioni $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$ e $\mathcal{R}_{xy}$ sono continue in (x, y) su $\overline{\Pi}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ (teorema del § 15.1). Dimostriamo che $\mathcal{R}_y$ è continua in (x, y) su $\overline{\Pi}$. Per farlo, consideriamo il problema di Goursat nel rettangolo $\overline{\Pi}_2 \cup \overline{\Pi}_3$ per l'equazione $L^*v = 0$ con i dati sulle caratteristiche $x = \xi$ ed $y = 0$:

$$v|_{x=\xi} = e^{\int_\eta^y a(\xi, y')\, dy'}, \qquad v|_{y=0} = \mathcal{R}(x, 0; \xi, \eta). \tag{19}$$

Visto che i dati (19) appartengono alla classe C^1, secondo il teorema del § 15.1, esiste un'unica soluzione $v \in C^1(\overline{\Pi}_2 \cup \overline{\Pi}_3)$. Per questa ragione $v = \mathcal{R}$ su $\overline{\Pi}_2$ e, di conseguenza, $v = \mathcal{R}$ su $\overline{\Pi}_3$. Dunque, $\mathcal{R} \in C^1(\overline{\Pi}_2 \cup \overline{\Pi}_3)$. In modo analogo si può dimostrare che $\mathcal{R} \in C^1(\overline{\Pi}_1 \cup \overline{\Pi}_4)$. Ma sulla caratteristica $x = \xi$, in virtù della seconda delle formule (17), la funzione $\mathcal{R}_y$ è continua. Per questa ragione $\mathcal{R}_y$ è continua in (x, y) su $\overline{\Pi}$. In modo analogo si può anche dimostrare che $\mathcal{R}_x$ è continua in (x, y) su $\overline{\Pi}$. Ma, in questo caso, dall'uguaglianza $L^*_{(x,y)}\mathcal{R} = 0$, $(x, y) \in \Pi_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, segue che $\mathcal{R}_{xy}$ è continua in (x, y) su $\overline{\Pi}$ e soddisfa l'equazione $L^*_{(x,y)}\mathcal{R} = 0$ su $\overline{\Pi}$.

La continuità delle funzioni $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$ e $\mathcal{R}_{xy}$ in tutte le variabili $(x, y; \xi, \eta)$ su $\overline{\Pi} \times \overline{\Pi}$ segue dalla continuità di queste funzioni in (x, y) su $\overline{\Pi}$ e dalla dipendenza continua della soluzione del problema di Goursat dai dati (15) nel senso delle (12)-(13).

Dimostriamo l'uguaglianza (18). Supponiamo che i punti (ξ, η) e (ξ_1, η_1) appartengano a Π. Per fissare le idee, poniamo $\xi_1 < \xi$ e $\eta_1 < \eta$. Applicando la formula di Green (14) alle funzioni $u = \mathcal{R}^*(x, y; \xi_1, \eta_1)$ e $v = \mathcal{R}(x, y; \xi, \eta)$ ed alla regione $G = [(x, y): \xi_1 < x < \xi, \eta_1 < y < \eta]$ (fig. 65) ed utilizzando le uguaglianze $L^*\mathcal{R} = 0$, $L\mathcal{R}^* = 0$, (15)-(17) e (15*)-(17*), otteniamo la relazione (18):

$$0 = \int_{\xi_1}^{\xi} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial x} - \frac{\mathcal{R}^*}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + a\,\mathcal{R}\,\mathcal{R}^* \right) \Big|_{y=\eta_1}^{y=\eta} dx +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{\eta} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial y} - \frac{\mathcal{R}^*}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} + b\,\mathcal{R}\,\mathcal{R}^* \right) \Big|_{x=\xi_1}^{x=\xi} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi} d_x(\mathcal{R}.\mathcal{R}^*) \Big|_{y=\eta} + \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi} d_x(\mathcal{R}\mathcal{R}^*) \Big|_{y=\eta_1} +$$

[1] Se il punto (ξ, η) appartiene alla frontiera Π, i corrispondenti rettangoli Π_i degenerano.

$$+\frac{1}{2}\int_{\eta_1}^{\eta} d_y(\mathcal{R}\mathcal{R}^*)\Big|_{x=\xi}+\frac{1}{2}\int_{\eta_1}^{\eta} d_y(\mathcal{R}\mathcal{R}^*)\Big|_{x=\xi_1}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{R}(\xi,\ \eta;\ \xi,\ \eta)\,\mathcal{R}^*(\xi,\ \eta;\ \xi_1,\ \eta_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{R}(\xi_1,\ \eta;\ \xi,\ \eta)\,\mathcal{R}^*(\xi_1,\ \eta;\ \xi_1,\ \eta_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{R}(\xi,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\,\mathcal{R}^*(\xi,\ \eta_1;\ \xi_1,\ \eta_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{R}(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\,\mathcal{R}^*(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi_1,\ \eta_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{R}(\xi,\ \eta;\ \xi,\ \eta)\,\mathcal{R}^*(\xi,\ \eta;\ \xi_1,\ \eta_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{R}(\xi,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\,\mathcal{R}^*(\xi,\ \eta_1;\ \xi_1,\ \eta_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{R}(\xi_1,\ \eta;\ \xi,\ \eta)\,\mathcal{R}^*(\xi_1,\ \eta;\ \xi_1,\ \eta_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{R}(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\,\mathcal{R}^*(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi_1,\ \eta_1)=$$

$$=\mathcal{R}^*(\xi,\ \eta;\ \xi_1,\ \eta_1)-\mathcal{R}(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta),$$

se $\xi_1 < \xi$ e $\eta_1 < \eta$. In modo analogo sono considerati gli altri casi. Per la continuità, l'uguaglianza (18) resta valida su $\overline{\Pi} \times \overline{\Pi}$. Il teorema è dimostrato.

Esempio. La funzione di Riemann per l'equazione $u_{xy} + cu = 0$, dove c è una costante, ha la forma

$$\mathcal{R}(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = J_0[\sqrt{4c(\xi - x)(\eta - y)}],$$

dove J_0 è la funzione di Bessel (si veda in seguito, § 23).

Significato fisico della funzione di Riemann. Utilizzando la formula di Green (14) si può dimostrare (cfr. il § 6.5, esempio g)) che la funzione

$$\mathcal{E}(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = \theta(x - \xi)\,\theta(y - \eta)\,\mathcal{R}(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$$

verifica l'equazione

$$L^*_{(x,y)}\,\mathcal{E}(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = \delta(x - \xi)\cdot\delta(y - \eta).$$

Per questa ragione la funzione $\mathcal{E}$ può essere interpretata come una perturbazione nel punto $(x,\ y)$ generata da una sorgente puntiforme d'intensità 1 nel punto $(\xi,\ \eta)$. Dunque, la funzione $\mathcal{E}$ è una generalizzazione naturale di una soluzione fondamentale (si veda il § 11.2) delle equazioni a coefficienti variabili di tipo iperbolico.

4. Problema di Cauchy. Sia G una regione triangolare limitata dalle caratteristiche $\xi = x_0$ e $\eta = y_0$ e da un segmento di una curva

regolare $\Sigma = [\eta = \sigma(\xi)]$. Per fissare le idee, poniamo che la curva Σ passi attraverso i punti $(x_0, 0)$ e $(0, y_0)$ (fig. 66). Supponiamo che la curva Σ non tocchi in nessun punto le caratteristiche, cioè $\sigma'(\xi) < 0$, $0 \leqslant \xi \leqslant x_0$.

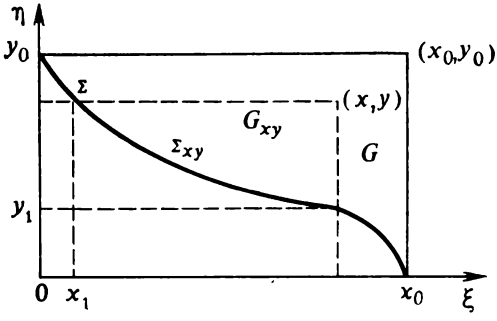


Fig. 66.

Poniamo il seguente problema di Cauchy per l'equazione (1) nella regione G (si veda il § 4.2): trovare una funzione $u(x, y)$, $u \in C^1(\overline{G})$, $u_{xy} \in C(G)$ che verifichi l'equazione (1) in G ed i dati di Cauchy su Σ:

$$u|_\Sigma = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = u_1. \tag{20}$$

Come è stato mostrato nel § 4.3, l'assegnazione di u e di $\partial u/\partial n$ su Σ è equivalente all'assegnazione di u, u_y (o u_x) su Σ, in virtù delle seguenti relazioni:

$$\cos(nx) = \frac{\sigma'}{\Delta}, \quad \cos(ny) = -\frac{1}{\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{1 + (\sigma')^2}; \tag{21}$$

$$u_x|_\Sigma + u_y|_\Sigma \sigma' = u_{0x}|_\Sigma, \quad u_x\Big|_\Sigma \frac{\sigma'}{\Delta} - u_y\Big|_\Sigma \frac{1}{\Delta} = u_1. \tag{22}$$

Per mezzo della funzione di Riemann possiamo rappresentare la soluzione del problema di Cauchy (1)-(20) nella forma esplicita.

Teorema. *Se Σ è una curva della classe C^2, le funzioni a, b, c, a_x e b_x appartengono a $C(\overline{\Pi})$, $f \in C(\overline{G})$, $u_0[x, \sigma(x)] \in C^2([0, x_0])$, e $u_1[x, \sigma(x)] \in C^1([0, x_0])$ la soluzione del problema di Cauchy* (1)-(20) *esiste, è unica ed è espressa dalla formula di Riemann*

$$u(x, y) = \frac{1}{2} u_0(x_1, y)\, \mathcal{R}(x_1, y; x, y) + \frac{1}{2} u_0(x, y_1) \times$$

$$\times \mathcal{R}(x, y_1; x, y) + \int_{\Sigma_{xy}} \left[\left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u_0}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + b u_0 \mathcal{R} \right) d\xi - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u_0}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + a u_0 \mathcal{R} \right) d\eta \right] + \int_{G_{xy}} \mathcal{R} f \, d\xi \, d\eta, \tag{23}$$

dove G_{xy} *e* Σ_{xy} *sono le parti della regione* G *e della curva* Σ *che si trovano tra le caratteristiche* $\xi = x$ *e* $\eta = y$; $y = \sigma(x_1)$, $y_1 = \sigma(x)$ (si veda la fig. 66).

Dimostrazione. Supponiamo che $u(x, y)$ sia una soluzione del problema di Cauchy (1)-(20). Essendo $f = Lu \in C(\overline{G})$, si ha $u_{xy} \in C(\overline{G})$. Fissiamo il punto (x, y) appartenente alla regione G. Applicando la formula di Green (14) alle funzioni $u(\xi, \eta)$, $v = \mathcal{R}(\xi, \eta; x, y)$ ed alla regione G_{xy}, si ottiene

$$\iint_{G_{xy}} \mathcal{R} f \, d\xi \, d\eta = \int_{x_1}^{x} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + bu\mathcal{R} \right) \Big|_{\eta=y} d\xi +$$

$$+ \int_{y_1}^{y} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + au\mathcal{R} \right) \Big|_{\xi=x} d\eta -$$

$$- \int_{\Sigma_{xy}} \left[\left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + bu\mathcal{R} \right) d\xi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + au\mathcal{R} \right) d\eta \right]. \qquad (24)$$

Utilizzando le relazioni (15)-(17), trasformiamo i primi due termini del secondo membro dell'uguaglianza (24):

$$\int_{x_1}^{x} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + bu\mathcal{R} \right) \Big|_{\eta=y} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x} \left(\mathcal{R} \frac{\partial u}{\partial \xi} + u \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta=y} d\xi = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x} d_\xi (u\mathcal{R})|_{\eta=y} =$$

$$= \frac{1}{2} u(x, y) - \frac{1}{2} u(x_1, y) \mathcal{R}(x_1, y; x_1, y),$$

e, analogamente,

$$\int_{y_1}^{y} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + au\mathcal{R} \right) \Big|_{\xi=x} d\eta =$$

$$= \frac{1}{2} u(x, y) - \frac{1}{2} u(x, y_1) \mathcal{R}(x, y_1; x, y).$$

Sostituendo nella formula (24) le espressioni ottenute, si ottiene la rappresentazione (23).

Dimostriamo l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (1)-(20). Infatti, se u è una soluzione del corrispondente problema omogeneo (cioè per $f = 0$ si ha $u_0 = u_1 = 0$ e, in virtù della (22),

si ha $u_x|_\Sigma = u_y|_\Sigma = 0$), la formula (23) ci darà $u = 0$ il che è equivalente all'unicità della soluzione (si veda il § 1.11).

Non resta altro che dimostrare l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy (1)-(20). Per farlo è sufficiente, dimostrare che la soluzione di questo problema esiste per $u_0 = u_1 = 0$. Infatti, introducendo una nuova funzione incognita

$$v = u - u_0[x, \sigma(x)] - [y - \sigma(x)]\, u_y[x, \sigma(x)],$$

otterremo l'equazione (1) col secondo membro f_1 modificato e dati di Cauchy nulli su Σ. Dalle condizioni di regolarità delle funzioni u_0, u_1 e σ segue, in virtù della (22), che $u_y[x, \sigma(x)] \in C^1([0, x_0])$ e quindi $Lv = f_1 \in C(\overline{G})$.

Dunque, non resta altro che verificare che la funzione

$$u(x, y) = \int_{G_{xy}} \mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,\ f \in C(\overline{G}), \tag{25}$$

è la soluzione del problema di Cauchy (1)-(20) con dati di Cauchy nulli. È evidente che $u \in C(\overline{G})$ ed $u|_\Sigma = 0$. Inoltre, in virtù della (18), si ha

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) = \mathcal{R}^*(x, y; \xi, \eta), \tag{26}$$

di modo che le funzioni $\mathcal{R}_x(\xi, \eta; x, y)$, $\mathcal{R}_y(\xi, \eta; x, y)$ e $\mathcal{R}_{xy}(\xi, \eta; x, y)$ sono continue su $\overline{\Pi} \times \overline{\Pi}$ e $L_{(x,y)}\mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) = 0$. Quindi, la formula (25) può essere derivata rispetto a x ed y conformemente alle regole classiche di derivazione degli integrali per una regione variabile:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{G_{xy}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} f\, d\xi\, d\eta + \int_{y_1}^{y} \mathcal{R}(x, \eta; x, y) f(x, \eta)\, d\eta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{G_{xy}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} f\, d\xi\, d\eta + \int_{x_1}^{x} \mathcal{R}(\xi, y; x, y) f(\xi, y)\, d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \int_{G_{xy}} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial x\, \partial y} f\, d\xi\, d\eta + \int_{x_1}^{x} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}(\xi, y; x, y) f(\xi, y)\, d\xi +$$

$$+ \mathcal{R}(x, y; x, y) f(x, y) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y}(x, \eta; x, y) f(x, \eta)\, d\eta.$$

Da queste formule concludiamo che $u \in C^1(\overline{G})$, $u_{xy} \in C(\overline{G})$ ed $u_y|_\Sigma = 0$. Utilizzando le uguaglianze (16), (26) e (17*), ci convinciamo

che u soddisfa l'equazione $Lu = f$:

$$Lu = \int\limits_{G_{xy}} L_{(x,\,y)}\,\mathscr{R} f\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ \int\limits_{y_1}^{y} \left[a(x,\,y)\,\mathscr{R}(x,\,\eta;\,x,\,y) + \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial y}(x,\,\eta;\,x,\,y)\right] f(x,\,\eta)\,d\eta +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x} \left[b(x,\,y)\,\mathscr{R}(\xi,\,y;\,x,\,y) + \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial x}(\xi,\,y;\,x,\,y)\right] f(\xi,\,y)\,d\xi + f =$$

$$= \int\limits_{y_1}^{y} \left[a(x,\,y)\,\mathscr{R}^*(x,\,y;\,x,\,\eta) + \frac{\partial \mathscr{R}^*}{\partial y}(x,\,y;\,x,\,\eta)\right] f(x,\,\eta)\,d\eta +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x} \left[b(x,\,y)\,\mathscr{R}^*(x,\,y;\,\xi,\,y) + \frac{\partial \mathscr{R}^*}{\partial x}(x,\,y;\,\xi,\,y)\right] f(\xi,\,y)\,d\xi + f = f,$$

Il teorema è dimostrato.

Notiamo alcuni corollari quantitativi che seguono dalla formula di Riemann (23). Da questa formula si vede che la soluzione del problema di Cauchy nel punto (x, y) è completamente determinata dai valori dei dati f, u_0 ed u_1 in una regione triangolare chiusa $\overline{G}_{xy}$, *regione di dipendenza del punto* (x, y) (cfr. il § 14.4). Perciò, se si variano questi dati all'infuori di una regione fissata $\overline{G}_{x^*y^*}$ (rispettando adeguatamente le proprietà di regolarità), la soluzione varierà solo all'esterno di questa regione. Dunque, possiamo concludere quanto segue: *ad una data soluzione del problema di Cauchy, legata ad una regione* $G_{x^*y^*}$, *possiamo in generale aggiungere alle caratteristiche* $\xi = x^*$ *e* $\eta = y^*$ *diverse soluzioni che sono i suoi prolungamenti.*

Osservazione. L'esistenza di una soluzione classica del problema di Cauchy per l'equazione delle vibrazioni della corda è stata dimostrata per tutte le f appartenenti a C^1 $(t \geqslant 0)$ (si veda il § 13.4). Qui abbiamo dimostrato l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy per il problema (1) per tutte le $f \in C(\overline{G})$. Le esigenze meno restrittive su f sono dovute al fatto che la soluzione dell'equazione (1) è cercata in una classe più vasta di funzioni $u \in C^1(\overline{G})$ ed $u_{xy} \in C(G)$ (in questo caso $u_{xy} = u_{yx} \in C(\overline{G})$).

§ 16. *Problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica*

La soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica è costruita con un metodo analogo a quello esposto nel § 13 per la risoluzione di questo problema per l'equazione d'onda.

1. Potenziale termico. Nel § 11.6 abbiamo dimostrato che la funzione

$$\mathscr{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

è la soluzione fondamentale dell'operatore di conduzione termica. Questa funzione è non negativa, si annulla per $t < 0$, è infinitamente

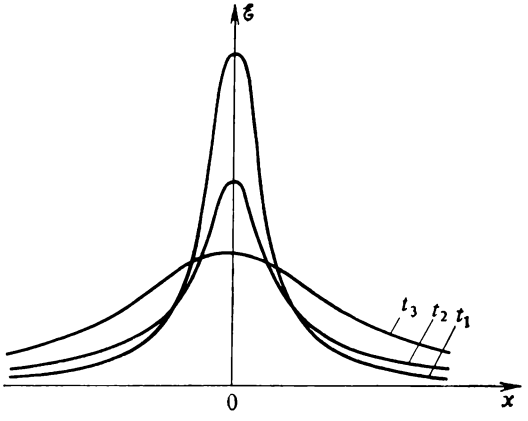


Fig. 67.

derivabile per $(x, t) \neq (0, 0)$ ed è localmente integrabile in R^{n+1}. Inoltre, (si veda il § 6.5, esempio f)), si ha

$$\int \mathscr{E}(x, t)\, dx = 1, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$\mathscr{E}(x, t) \to \delta(x), \quad t \to +0 \text{ in } \mathscr{D}'(R^n). \tag{2}$$

Il grafico della funzione $\mathscr{E}(x, t)$ per diversi valori di $t > 0$ $(t_1 < t_2 < t_3)$ è illustrato nella fig. 67.

La soluzione fondamentale $\mathscr{E}(x, t)$ dà la distribuzione della temperatura da una sorgente puntiforme istantanea $\delta(x) \cdot \delta(t)$. Essendo $\mathscr{E}(x, t) > 0$ per tutti i valori di $t > 0$ ed $x \in R^n$, il calore si propaga con una velocità infinita. Ma ciò contraddice l'esperienza. Di conseguenza, l'equazione di conduzione termica descrive il meccanismo di trasferimento di calore in modo inesatto. Ciò nonostante quest'equazione, quantitativamente, concorda abbastanza bene con l'esperienza (per esempio, per grandi x e piccoli t si può, con un notevole grado di precisione, trascurare $\mathscr{E}(x, t)$). Una descrizione più esatta dei processi di trasferimento (trasferimento di calore o di particelle) è data dalle equazioni di trasporto (si veda il § 2.4).

Supponiamo che una funzione generalizzata $f \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$ si annulli per $t < 0$. La funzione generalizzata $V = \mathscr{E} * f$ dove $\mathscr{E}$ è la soluzione fondamentale dell'operatore di conduzione termica, è detta *potenziale termico a densità f*.

Se il potenziale termico V esiste in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$, allora, in virtù del teorema del § 11.3, questo potenziale verifica l'equazione di conduzione termica

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V + f(x, t). \tag{3}$$

Dal teorema del § 7.6 segue che se f è una funzione generalizzata finita che si annulla per $t < 0$, il potenziale termico esiste a priori in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$.

Separiamo ancora una classe di densità f per le quali il potenziale termico esiste. Sia $\mathscr{M}$ una classe di funzioni che si annullano per $t < 0$ e sono limitate in ogni banda $0 \leqslant t \leqslant T$.

Teorema. *Se $f \in \mathscr{M}$, esiste nella classe $\mathscr{M}$ il potenziale termico V a densità f ed è espresso come segue:*

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi\, d\tau. \tag{4}$$

Il potenziale V soddisfa la stima

$$|V(x, t)| \leqslant t \sup_{\substack{0 \leqslant \tau \leqslant t \\ \xi}} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0, \tag{5}$$

e la condizione iniziale

$$V(x, t) \overset{x \in R^n}{\Rightarrow} 0, \quad t \to +0, \tag{6}$$

Se, inoltre, la funzione $f \in C^2$ $(t \geqslant 0)$ e tutte le sue derivate fino al secondo ordine incluso sono limitate in ogni banda, si ha $V \in C^2$ $(t > 0) \cap C^1$ $(t \geqslant 0)$.

Dimostrazione. Visto che le funzioni $\mathscr{E}$ e f sono localmente integrabili in R^{n+1}, la loro convoluzione

$$\mathscr{E} * f = \int_0^t \int_{R^n} f(\xi, \tau)\, \mathscr{E}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi\, d\tau$$

esiste ed è una funzione localmente integrabile in R^{n+1} se la funzione

$$h(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} |f(\xi, \tau)|\, \mathscr{E}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi\, d\tau$$

è localmente integrabile in R^{n+1} (si veda il § 7.4). Verifichiamo che questa condizione è soddisfatta. Essendo $h = 0$, per $t < 0$, è sufficiente dimostrare che la funzione h verifica la stima (5), per $t > 0$.

Ciò deriva dall'uguaglianza (1) in virtù del teorema di Fubini

$$h(x,\ t) \leqslant \sup_{\substack{0\leqslant\tau\leqslant t\\ \xi}} |f(\xi,\ \tau)| \int_0^t \int \mathscr{E}(x-\xi,\ t-\tau)\, d\xi\, d\tau = \\ = t \sup_{\substack{0\leqslant\tau\leqslant t\\ \xi}} |f(\xi,\ \tau)|,\ t>0. \quad (7)$$

Quindi, il potenziale termico $V = \mathscr{E} * f$ è dato dalla formula (4). Visto che $|V| \leqslant h$, questo potenziale si annulla, per $t < 0$, e, in virtù della (7), soddisfa la stima (5). Ciò vuol dire che $V \in \mathscr{M}$. Dalla stima (5) segue che V soddisfa la condizione iniziale (6).

Eseguendo, nella formula (4), la sostituzione di variabili d'integrazione

$$\xi = x - 2a\sqrt{s}\, y,\quad \tau = t - s,$$

otteniamo la forma

$$V(x,\ t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int_{R^n} f(x-2a\sqrt{s}\, y,\ t-s)\, e^{-|y|^2} dy\, ds. \quad (4')$$

Supponiamo che la funzione $f \in C^2$ $(t \geqslant 0)$ e tutte le sue derivate fino al secondo ordine incluso appartengano alla classe $\mathscr{M}$. In questo caso, utilizzando i teoremi della continuità e della derivabilità degli integrali dipendenti da un parametro (si veda il § 1.5) dalla formula (4') e dall'uguaglianza

$$\frac{\partial V(x,\ t)}{\partial t} = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int_{R^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x-2a\sqrt{s}\, y,\ t-s)\, e^{-|y|^2} dy\, ds + \\ + \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{R^n} f(x-2a\sqrt{t}\ y,\ +0)\, e^{-|y|^2} dy$$

concludiamo che le funzioni V, V_{x_i}, V_t, $V_{x_i x_j}$ e $V_{x_i t}$ sono continue, per $t \geqslant 0$, e V_{tt} è continua, per $t > 0$. Il teorema è dimostrato.

2. Potenziale termico di superficie. Il potenziale termico $V^{(0)}$ a densità $f = u_0(x)\cdot\delta(t)$ è detto *potenziale termico di superficie* (di uno strato semplice a densità u_0):

$$V^{(0)} = \mathscr{E} * [u_0(x)\cdot\delta(t)] = \mathscr{E}(x,\ t) * u_0(x).$$

Se u_0 è finita in R^n, il potenziale termico di superficie $V^{(0)}$ esiste a priori in $\mathscr{D}'(R^{n+1})$ (si veda il § 7.6).

Il seguente teorema fornisce ancora una prova sull'esistenza di un potenziale termico di superficie ed indica alcune proprietà di questo potenziale.

Teorema. *Se $u_0(x)$ è una funzione limitata in R^n, il potenziale termico di superficie $V^{(0)}$ esiste in $\mathscr{M}$, appartiene alla classe C^∞ $(t > 0)$,*

è rappresentato dall'integrale di Poisson

$$V^{(0)}(x,\ t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R^n} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}\, d\xi \tag{8}$$

e verifica la disuguaglianza

$$|\ V^{(0)}(x,\ t)\ | \leqslant \sup_{\xi} |\ u_0(\xi)\ |, \quad t > 0. \tag{9}$$

Se, inoltre, la funzione $u_0(x)$ è continua in R^n, il potenziale $V^{(0)}$ appartiene a C $(t \geqslant 0)$ e verifica la condizione iniziale

$$V^{(0)}|_{t=0} = u_0(x). \tag{10}$$

Dimostrazione. Visto che la funzione

$$h(x,\ t) = \int |u_0(\xi)|\mathscr{E}(x-\xi,\ t)\, d\xi$$

si annulla, per $t < 0$, e per $t > 0$, in virtù della (1), verifica la disuguaglianza (9), cioè

$$h(x,\ t) \leqslant \sup_{\xi} |u_0(\xi)| \int \mathscr{E}(x-\xi,\ t)\, d\xi = \sup_{\xi} |u_0(\xi)|,$$

questa funzione è localmente integrabile in R^{n+1}. Di conseguenza, il potenziale termico di superficie $V^{(0)} = \mathscr{E}(x,\ t) * u_0(x)$ è rappresentato dalla formula (8) (si veda il § 7.4), cioè

$$V^{(0)}(x,\ t) = \int u_0(\xi)\mathscr{E}(x-\xi,\ t)\, d\xi \tag{8'}$$

si annulla per $t < 0$ e, in virtù della disuguaglianza $|\ V^{(0)}\ | \leqslant h$, soddisfa la (9). Ciò vuol dire che $V^{(0)} \in \mathscr{M}$.

Dalla (8) segue anche che $V^{(0)} \in C^{\infty}$ $(t > 0)$ (si veda il § 1.5).

Sia ora u_0 una funzione continua limitata in R^n. Dimostriamo che il potenziale $V^{(0)}$ appartiene a C $(t \geqslant 0)$ e soddisfa la condizione (10).

Supponiamo che $(x,\ t) \to (x_0,\ 0)$, $t > 0$ e che $\varepsilon > 0$ sia un numero arbitrario. Il fatto che $u_0(x)$ è continua implica che esiste un numero δ positivo tale che $|\ u_0(\xi) - u_0(x_0)\ | < \varepsilon$ per $|\ \xi - x_0\ | < 2\delta$. Perciò, se $|\ x - x_0\ | < \delta$, si ha $|\ x - y - x_0\ | < 2\delta$ se $|\ y\ | < \delta$ e, in virtù delle (1) e (8'), per $t > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}
|V^{(0)}(x,\ t) - u_0(x_0)| &\leqslant \int |u_0(\xi) - u_0(x_0)|\, \mathscr{E}(x-\xi,\ t)\, d\xi = \\
&= \int\limits_{|y| \leqslant \delta} |u_0(x-y) - u_0(x_0)|\, \mathscr{E}(y,\ t)\, dy + \\
&+ \int\limits_{|y| > \delta} |u_0(x-y) - u_0(x_0)|\, \mathscr{E}(y,\ t)\, dy \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{2}{\pi^{n/2}} \sup_{\xi} |u_0(\xi)| \int\limits_{|\xi| > \frac{\delta}{2a\sqrt{t}}} e^{-|\xi|^2}\, d\xi.
\end{aligned} \tag{11}$$

Il secondo termine della (11) può anche essere fatto minore di ε facendo tendere t a zero, in modo che, per un certo $\delta_1 \leqslant \delta$,

$$| V^{(0)}_1 (x, t) - u_0 (x_0) | < 2\varepsilon, \quad | x - x_0 | < \delta_1, \quad | t | < \delta_1.$$

Il teorema è dimostrato.

Osservazione. La formula (8) deriva formalmente dalla formula (4), se poniamo $f(\xi, \tau) = u_0(\xi) \cdot \delta(\tau)$ ed « integriamo » $\delta(\tau)$.

3. Impostazione del problema di Cauchy generalizzato per l'equazione di conduzione termica. Lo schema di risoluzione del problema di Cauchy esposto nel § 13.1 per un'equazione differenziale ordinaria è anche utilizzato per la risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t), \tag{12}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{13}$$

Assumiamo che $f \in C$ $(t \geqslant 0)$ ed $u_0 \in C$ (R^n). Supponiamo che esista una soluzione classica $u(x, t)$ di questo problema. Ciò significa che $u \in C^2$ $(t > 0) \cap C$ $(t \geqslant 0)$, sono verificate l'equazione (12) per $t > 0$ e la condizione iniziale (13) per $t \to 0$ (si veda il § 4.2).

Prolungando con zero le funzioni u e f per $t < 0$, come nel § 13.2, concludiamo che le funzioni $\tilde{u}$ e $\tilde{f}$ prolungate soddisfano in R^{n+1} l'equazione di conduzione termica

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{u} + \tilde{f}(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t). \tag{14}$$

L'uguaglianza (14) mostra che, per la funzione $\tilde{u}(x, t)$, la perturbazione iniziale u_0 serve di sorgente $u_0(x) \cdot \delta(t)$ di azione istantanea (del tipo ad uno strato semplice nel piano $t = 0$) e le soluzioni classiche del problema di Cauchy (12)-(13) sono contenute tra le soluzioni dell'equazione (14) che si annullano per $t < 0$. Ciò permette di introdurre la seguente generalizzazione del problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica.

Il problema di ricerca di una funzione generalizzata $u \in \mathscr{D}'(R^{n+1})$ che si annulla per $t < 0$ e soddisfa l'equazione di conduzione termica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F(x, t) \tag{15}$$

si dice *problema di Cauchy generalizzato*. L'equazione (15) è equivalente a quanto segue (si veda il § 11.1): per $\varphi \in \mathscr{Z}$ (R^{n+1}) qualsiasi è valida l'uguaglianza

$$-\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = a^2 (u, \Delta \varphi) + (F, \varphi). \tag{15'}$$

Dall'equazione (15) segue che la condizione necessaria perché il problema di Cauchy generalizzato sia risolto è l'annullamento di F per $t < 0$.

Osservazione. L'equazione (14) è in realtà l'identità

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u \right\} + u(x, +0) \cdot \delta(t), \tag{16}$$

valida per qualsiasi funzione $u \in C^2 (t > 0) \cap C (t \geqslant 0)$ che si annulla per $t < 0$ ed è tale che $u_t - a^2 \Delta u \in C (t \geqslant 0)$.

4. Soluzioni del problema di Cauchy.

Teorema. *Sia* $F(x, t) = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$ *dove* $f \in \mathscr{M}$ *ed* u_0 *è una funzione limitata in* R^n. *In questo caso la soluzione del corrispondente problema di Cauchy generalizzato esiste ed è unica nella classe* $\mathscr{M}$ *ed è rappresentata dalla formula di Poisson*

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi\, d\tau + \\ + \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi)\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi. \tag{17}$$

La soluzione u *dipende con continuità da* f *ed* u_0 *nel seguente senso: se*

$$|f - \tilde{f}| \leqslant \varepsilon, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| \leqslant \varepsilon_0,$$

le corrispondenti soluzioni u *ed* $\tilde{u}$, *in un intervallo* $0 \leqslant t \leqslant T$ *qualsiasi, soddisfano la disuguaglianza*

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leqslant T\varepsilon + \varepsilon_0. \tag{18}$$

Se, inoltre, $f \in C^2 (t \geqslant 0)$, *tutte le sue derivate fino al secondo ordine compreso appartengono alla classe* $\mathscr{M}$ *e se* $u_0 \in C(R^n)$, *la soluzione* $u(x, t)$ *è classica.*

Dimostrazione. In virtù delle condizioni del teorema la convoluzione $\mathscr{E}$ con il secondo membro F dell'equazione (15) esiste in $\mathscr{M}$ ed è rappresentata dalla somma (17) di due potenziali di calore V e $V^{(0)}$ e questi potenziali sono rispettivamente espressi dalle formule (4) e (8) (si veda i teoremi del §§ 16.1 e 16.2). Dunque, in base al teorema del § 11.3 la formula (17) fornisce una soluzione del problema di Cauchy generalizzato per l'equazione di conduzione termica e questa soluzione è unica nella classe $\mathscr{M}$. La dipendenza continua della soluzione u dai dati f ed u_0 del problema segue dalle stime (5) e (9).

Se le funzioni f ed u_0 soddisfano le condizioni di regolarità supplementari formulate nel teorema, conformemente ai teoremi dei §§ 16.1 e 16.2 la soluzione generalizzata u costruita appartiene a $C^2 (t > 0) \cap C (t \geqslant 0)$ e soddisfa la condizione iniziale (13). Secondo il lemma del § 11.1, $u(x, t)$ soddisfa l'equazione (12) in ogni

punto della regione $t > 0$. Per questa ragione u è la soluzione classica del problema di Cauchy (12)-(13). Il teorema è dimostrato.

Riassumendo, si può dire che il *problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica è posto correttamente* (si veda il § 4.7), *ed inoltre* $C^2\ (t > 0) \cap C\ (t \geqslant 0)$, $D^\alpha u \in \mathcal{M}$, $|\alpha| \leqslant 2$ *è la classe di correttezza del problema di Cauchy classico ed* $\mathcal{M}$ *è quella del problema di Cauchy generalizzato.*

Osservazione. L'unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica può essere stabilita in una classe più ampia e cioè nella classe delle funzioni che soddisfano, in un intervallo $0 \leqslant t \leqslant T$ qualsiasi, la disuguaglianza

$$|u(x, t)| \leqslant C_T e^{a_T |x|^2}$$

si veda Tichonov [2]).

5. Esercizi. a) Dimostrare che le soluzioni dei problemi misti

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

1) $u|_{x=0} = \psi(t)$, 2) $u_x|_{x=0} = \psi(t)$

sono, rispettivamente, le funzioni

1) $$u(x, t) = \mathcal{E}(x, t) * \tilde{u}_0(x) - 2a^2 \frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial x} * \psi(t) =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi +$$

$$+ \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau,$$

2) $$u(x, t) = \mathcal{E}(x, t) * \tilde{\tilde{u}}_0(x) - 2a^2 \mathcal{E}(x, t) * \psi(t) =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi -$$

$$- \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Qui $u_0 \in C([0, \infty))$ è limitata, $\tilde{u}_0$ ed $\tilde{\tilde{u}}_0$ sono rispettivamente le sue continuazioni pari e dispari e $\psi \in C([0, \infty))$, $\psi = 0$, $t < 0$.

b) Sia la funzione $u_0(x)$ limitata in R^n e possegga una media limite sferica

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{\sigma_n R^n} \int_{|x| < R} u_0(x)\, dx = a.$$

Dimostrare che la soluzione $u(x, t)$ del corrispondente problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica si stabilizza ad a per $t \to \infty$, cioè

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) \overset{|x| \leqslant R}{\Longrightarrow} a, \quad R \text{ arbitrario.}$$

c) Utilizzando la soluzione fondamentale dell'operatore di Schrödinger (si veda il § 11.12, esercizio *e*)), dimostrare che il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger unidimensionale (si veda il § 2.7) si riduce all'equazione integrale

$$\psi(x,\ t)=\lambda\int_0^t\int e^{i\frac{m_0|x-\xi|^2}{2\hbar(t-\tau)}}\frac{V(\xi,\ \tau)}{\sqrt{t-\tau}}\psi(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\frac{\lambda\hbar i}{\sqrt{t}}\int e^{i\frac{m_0|x-\xi|^2}{2\hbar t}}\psi_0(\xi)\,d\xi,\quad \lambda=\frac{1}{\hbar}\left(\frac{m_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

d) Utilizzando la soluzione fondamentale dell'operatore di trasporto (si veda il § 11.11), dimostrare che il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto (si veda il § 2.4) può essere ridotto all'equazione integrale

$$\psi(x,\ s,\ t)=\alpha hv\int_0^t\int_{S_1}\psi[x-v(t-\tau)s,\ s',\ \tau]\times$$

$$\times e^{-\alpha v(t-\tau)}\,ds'\,d\tau+v\int_0^t F[x-v(t-\tau)s,\ s,\ \tau]\times$$

$$\times e^{-\alpha v(t-\tau)}\,d\tau+\psi_0(x-vts,\ s)\,e^{-\alpha vt}.$$

e) Dimostrare che il problema di Cauchy per l'equazione di Burgers [1]

$$u_t+uu_x=a^2u_{xx},\qquad u\mid_{t=0}=u_0(x)$$

può essere ridotto, per mezzo della sostituzione $u=-2a^2\varphi_x/\varphi$, al problema di Cauchy per l'equazione di conduzione termica

$$\varphi_t=a^2\varphi_{xx},\ \varphi\mid_{t=0}=\exp\left[-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u_0(\xi)\,d\xi\right].$$

f) Verificare che l'equazione di Korteweg-de Vries (si veda il § 14.8) ha una soluzione nella forma di due « onde solitarie » [2]

$$u(x,\ t)=2\frac{a_1f_1+a_2f_2+\alpha f_1f_2+\beta(a_2f_1+a_1f_2)f_1f_2}{(1+f_1+f_2+\beta f_1f_2)^2},$$

dove

$$f_j=\exp[-\sqrt{a_j}(x-a_jt-x_j)],\qquad a_j>0,\ j=1,\ 2,$$

$$\alpha=2(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2,\quad \beta=\left(\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}\right)^2.$$

Suggerimento: utilizzare la sostituzione $u=2(\varphi_x/\varphi)_x$.

g) Dimostrare che l'equazione di Schrödinger non lineare

$$iu_t+u_{xx}+\nu\mid u\mid^2u=0,\ \nu>0,$$

ha una soluzione di tipo solitone (si veda il § 14.8)

$$u(x,\ t)=\sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}}\,\frac{\exp i\left[\frac{a}{2}x-\left(\frac{a^2}{4}-\alpha\right)t\right]}{\cosh\sqrt{\alpha}\,(x-x_0-at)}.$$

---

[1] Si veda Whitham [1], capp. 4 e 17.

[2] Idem.

IV. Equazioni integrali

Le equazioni contenenti la funzione incognita sotto il segno d'integrale sono dette *equazioni integrali*. Molti problemi della fisica matematica possono essere ridotti ad equazioni integrali lineari della forma

$$\int_G \mathcal{K}(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{1}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)\,\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{2}$$

rispetto alla funzione incognita $\varphi(x)$ in una regione $G \subset R^n$. Le equazioni (1) e (2) sono dette *equazioni integrali di Fredholm* di prima e seconda specie, rispettivamente. Le funzioni note $\mathcal{K}(x, y)$ e $f(x)$ sono dette *nucleo* e *termine noto* dell'equazione integrale; λ è un parametro complesso.

Le equazioni integrali di Fredholm di prima specie non saranno considerate nella nostra esposizione.

L'equazione integrale (2) per $f = 0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)\,\varphi(y)\,dy \tag{3}$$

si dice equazione integrale di Fredholm *omogenea* di seconda specie corrispondente all'equazione (2). Le equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x, y)\,\psi(y)\,dy + g(x), \tag{2*}$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x, y)\,\psi(y)\,dy, \tag{3*}$$

dove $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$ sono dette *aggiunte* alle equazioni (2) e (3), rispettivamente. Il nucleo $\mathcal{K}^*(x, y)$ si dice nucleo *coniugato hermitiano* (*aggiunto*) al nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Scriveremo le equazioni integrali (2), (3), (2*) e (3*) in forma contratta, utilizzando la notazione d'operatore:

$$\varphi = \lambda K\varphi + f, \qquad \varphi = \lambda K\varphi,$$

$$\psi = \overline{\lambda} K^*\psi + g, \qquad \psi = \overline{\lambda} K^*\psi,$$

dove gli operatori integrali K e K^* sono determinati dai nuclei $\mathscr{K}(x, y)$ e $\mathscr{K}^*(x, y)$, rispettivamente (§ 1.10):

$$(Kf)(x) = \int_G \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy,$$

$$(K^*f)(x) = \int_G \mathscr{K}^*(x, y) f(y)\, dy.$$

Agli operatori ed alle equazioni integrali sono applicabili tutte le definizioni e tutti i fatti esposti nel § 1.10-1.12. Inoltre, risulta utile la seguente definizione: un valore complesso di λ per il quale l'equazione integrale omogenea (3) ha soluzioni non nulle appartenenti a $\mathscr{L}_2(G)$, è detto *numero caratteristico* del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$, e le corrispondenti soluzioni si dicono *autofunzioni* di questo nucleo corrispondenti a questo numero caratteristico. Dunque, i numeri caratteristici di nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ e gli autovalori dell'operatore K sono reciprocamente inversi mentre le loro autofunzioni coincidono.

§ 17. *Metodo delle approssimazioni successive*

1. Equazioni integrali con nucleo continuo. Supponiamo che nell'equazione integrale (2) la regione G sia limitata in R^n, la funzione f sia continua nella regione chiusa $\overline{G}$ ed il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ sia continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$ (diremo *continui* questi nuclei).

Ricordiamo le definizioni delle norme negli spazi $\mathscr{L}_2(G)$ e $C(\overline{G})$ e del prodotto scalare in $\mathscr{L}_2(G)$ (§§ 1.3 e 1.7):

$$(f, g) = \int_G f(x)\, g(x)\, dx, \quad f, g \in \mathscr{L}_2(G);$$

$$\| f \| = \sqrt{\int_G |f(x)|^2\, dx} = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in \mathscr{L}_2(G);$$

$$\| f \|_C = \max_{x \in \overline{G}} |f(x)|, \quad f \in C(\overline{G}).$$

Lemma. *L'operatore integrale K con nucleo continuo $\mathscr{K}(x, y)$ trasferisce $\mathscr{L}_2(G)$ in $C(\overline{G})$ (e, di conseguenza, $C(\overline{G})$ in $C(\overline{G})$ e $\mathscr{L}_2(G)$ in $\mathscr{L}_2(G)$), è limitato, ed inoltre*

$$\| Kf \|_C \leqslant M\sqrt{V}\, \| f \|, \quad f \in \mathscr{L}_2(G), \tag{4}$$

$$\| Kf \|_C \leqslant MV \| f \|_C, \quad f \in C(\overline{G}), \tag{5}$$

$$\| Kf \| \leqslant MV \| f \|, \quad f \in \mathscr{L}_2(G), \tag{6}$$

dove

$$M = \max_{x \in \bar{G},\, y \in \bar{G}} |\mathscr{K}(x, y)|, \quad V = \int_G dy.$$

Dimostrazione. Sia $f \in \mathscr{L}_2(G)$. Allora f è una funzione assolutamente integrabile su G (§ 1.7) e, visto che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è continuo su $\bar{G} \times \bar{G}$, la funzione $(Kf)(x)$ è continua in $\bar{G}$. Perciò l'operatore K trasferisce $\mathscr{L}_2(G)$ in $C(\bar{G})$ e, in virtù della disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij, è limitato:

$$\|Kf\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |(Kf)(x)| = \max_{x \in \bar{G}} \left| \int_G \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x \in \bar{G}} \sqrt{\int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2\, dy} \sqrt{\int_G |f(y)|^2\, dy} \leqslant M \sqrt{V}\, \|f\|.$$

In un modo simile e più semplice vengono dimostrate le disuguaglianze (5) e (6). Il lemma è dimostrato.

Affinché l'operatore integrale K con nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ continuo sia nullo in $\mathscr{L}_2(G)$, è necessario e sufficiente che $\mathscr{K}(x, y) \equiv 0$, $x \in G$, $y \in G$.

La sufficienza della condizione è evidente, mentre la necessità deriva dal lemma di Du Bois-Reymond (§ 5.6): se per tutte le $f \in \mathscr{L}_2(G)$ si ha

$$(Kf)(x) = \int_G \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy \equiv 0, \quad x \in G,$$

allora

$$\mathscr{K}(x, y) \equiv 0, \quad x \in G, \ y \in G$$

Dunque, abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra i nuclei continui e gli operatori corrispondenti a questi nuclei.

In modo analogo può essere dimostrata la seguente proposizione: *se $(Kf, g) = 0$ per tutte le f e g appartenenti a $\mathscr{L}_2(G)$, si ha $K = 0$ e, quindi, $\mathscr{K}(x, y) \equiv 0$.*

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (2) mediante il metodo delle approssimazioni successive, ponendo $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x, y) \varphi^{(p-1)}(y)\, dy + f(x) \equiv \lambda K \varphi^{(p-1)} + f,$$

$$p = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Dimostriamo che

$$\varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

dove K^k denotano le potenze k-esime dell'operatore K (§ 1.10).

Infatti, per $p = 0$, la formula (8) è valida: $\varphi^{(0)} = f$. Supponendo che questa formula sia valida per p e sostituendo nella successione di

ricorrenza (7) p con $p+1$, si ottiene la formula (8) per $p+1$:

$$\varphi^{(p+1)} = \lambda K \varphi^{(p)} + f = \lambda K \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f + f =$$

$$= f + \sum_{k=0}^{p} \lambda^{k+1} K^{k+1} f = \sum_{k=0}^{p+1} \lambda^k K^k f.$$

Dunque, la formula (8) è valida per tutti i valori di p.

Le funzioni $(K^p f)(x)$, $p = 0, 1, \ldots$, sono dette *iterazioni* della funzione f.

Secondo il lemma del § 17.1, le iterazioni di f sono continue su $\overline{G}$ e, in virtù della (5), soddisfano la disuguaglianza

$$\| K^p f \|_C = \| K(K^{p-1} f) \|_C \leqslant MV \| K^{p-1} f \|_C \leqslant$$

$$\leqslant (MV)^2 \| K^{p-2} f \|_C \leqslant \ldots \leqslant (MV)^p \| f \|_C,$$

cioè

$$\| K^p f \|_C \leqslant (MV)^p \| f \|_C, \quad p = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Da questa disuguaglianza segue che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \qquad x \in \overline{G}, \tag{10}$$

detta *serie di Neumann*, è maggiorata da una serie numerica

$$\| f \|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k (MV)^k = \frac{\| f \|_C}{1 - |\lambda| MV}, \tag{11}$$

che converge nel cerchio $|\lambda| < 1/MV$. Perciò, per questi valori di λ, la serie (10) è regolarmente convergente (§ 1.3) in $x \in \overline{G}$, definendo così una funzione $\varphi(x)$ continua su $\overline{G}$. Ciò vuol dire, in virtù della (8), che le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}(x)$ per $p \to \infty$ tendono in modo uniforme alla funzione $\varphi(x)$:

$$\varphi^{(p)}(x) \underset{x \in \overline{G}}{\rightrightarrows} \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad p \to \infty, \tag{12}$$

ed, inoltre, in virtù della (11), è valida la disuguaglianza

$$\| \varphi \|_C \leqslant \frac{\| f \|_C}{1 - |\lambda| MV}. \tag{13}$$

Dimostriamo che la funzione $\varphi(x)$ verifica l'equazione integrale (2). Infatti, passando al limite per $p \to \infty$ nella relazione di ricorrenza (7) ed utilizzando la convergenza uniforme della successione $\varphi^{(p)}(x)$ a $\varphi(x)$ su $\overline{G}$, si ottiene

$$\varphi(x) = \lim_{p \to \infty} \varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \lim_{p \to \infty} \varphi^{(p-1)}(y)\, dy +$$

$$+ f(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi(y)\, dy + f(x).$$

Dimostriamo l'unicità della soluzione dell'equazione (2) nella classe $\mathcal{L}_2(G)$ se $|\lambda| < 1/MV$. Per ciò è sufficiente dimostrare che l'equazione omogenea (3) ha, in questa classe, una sola soluzione nulla (§ 1.11). Infatti, se $\varphi_0 \in \mathcal{L}_2(G)$ è la soluzione dell'equazione (3), cioè $\varphi_0 = \lambda K\varphi_0$, si ha, secondo il lemma del § 17.1.

$$\| \varphi_0 \| \leqslant |\lambda| MV \| \varphi_0 \|,$$

da cui, grazie alla disuguaglianza $|\lambda| MV < 1$, deriva $\| \varphi_0 \| = 0$, cioè $\varphi_0 = 0$, quanto si doveva dimostrare.

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente teorema.

Teorema. *Ogni equazione di Fredholm integrale* (2) *con nucleo continuo* $\mathcal{K}(x, y)$, *per* $|\lambda| < 1/MV$, *ha un'unica soluzione* φ *nella classe* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* $f \in C(\overline{G})$ *qualsiasi. Questa soluzione è rappresentata nella forma della serie di Neumann* (12) *regolarmente convergente su* $\overline{G}$ *e soddisfa la disuguaglianza* (13). *In altre parole, nel cerchio* $|\lambda| < 1/MV$ *esiste ed è limitato l'operatore inverso* $(I - \lambda K)^{-1}$.

Osservazione. Il metodo delle approssimazioni successive può essere utilizzato per una risoluzione approssimata dell'equazione integrale (2) per $|\lambda|$ sufficientemente piccolo.

2. Nuclei iterati. Risolvente. Stabiliamo preliminarmente che è valida la seguente uguaglianza:

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \quad f \text{ e } g \in \mathcal{L}_2(G). \tag{14}$$

Infatti, se f e g appartengono a $\mathcal{L}_2(G)$, conformemente al lemma del § 17.1 anche Kf e K^*g appartengono a $\mathcal{L}_2(G)$ e quindi si ha

$$(Kf, g) = \int_G (Kf)\,\overline{g}\,dx = \int_G \left[\int_G \mathcal{K}(x, y) f(y)\,dy\right] \overline{g}(x)\,dx =$$

$$= \int_G f(y) \left[\int_G \mathcal{K}(x, y)\,\overline{g}(x)\,dx\right] dy = \int_G \overline{fK^*g}\,dy = (f, K^*g).$$

Lemma. *Se* K_i, $i = 1, 2$, *sono operatori integrali con nuclei continui* $\mathcal{K}_i(x, y)$, *rispettivamente, l'operatore* $K_3 = K_2K_1$ *è un operatore integrale con nucleo continuo*

$$\mathcal{K}_3(x, y) = \int_G \mathcal{K}_2(x, y')\,\mathcal{K}_1(y', y)\,dy'. \tag{15}$$

In questo caso è valida la seguente formula:

$$(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*. \tag{16}$$

Dimostrazione. Per tutte le $f \in \mathscr{L}_2(G)$ abbiamo

$$(K_3 f)(x) = (K_2 K_1 f)(x) = \int_G \mathscr{K}_2(x, y') \int_G \mathscr{K}_1(y', y) f(y)\, dy\, dy' =$$

$$= \int_G \left[\int_G \mathscr{K}_2(x, y') \mathscr{K}_1(y', y)\, dy' \right] f(y)\, dy,$$

da cui segue la formula (14). È evidente che il nucleo $\mathscr{K}_3(x, y)$ è continuo per $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$.

Prendendo in considerazione l'uguaglianza (14), per tutte le f e g appartenenti a $\mathscr{L}_2(G)$ si ottiene

$$(f, K_3^* g) = (K_3 f, g) = (K_2 K_1 f, g) = (K_1 f, K_2^* g) = (f, K_1^* K_2^* g),$$

cioè

$$(f, K_3^* g - K_1^* K_2^* g) = 0,$$

e, quindi, $K_3^* = K_1^* K_2^*$, il che equivale all'uguaglianza (16). Il lemma è dimostrato.

Dal lemma dimostrato segue che gli operatori $K^p = K(K^{p-1}) = (K^{p-1})K$, $p = 2, 3, \ldots$, sono operatori integrali ed i loro nuclei $\mathscr{K}_p(x, y)$ sono continui e soddisfano le relazioni di ricorrenza $\mathscr{K}_1(x, y) = \mathscr{K}(x, y)$,

$$\mathscr{K}_p(x, y) = \int_G \mathscr{K}(x, y') \mathscr{K}_{p-1}(y', y)\, dy' =$$

$$= \int_G \mathscr{K}_{p-1}(x, y') \mathscr{K}(y', y)\, dy'. \quad (17)$$

I nuclei $\mathscr{K}_p(x, y)$ sono detti *nuclei iterati* del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$.

Dalle relazioni di ricorrenza (17) segue che i nuclei iterati soddisfano la disuguaglianza

$$|\mathscr{K}_p(x, y)| \leqslant M^p V^{p-1}, \quad p = 1, 2, \ldots \quad (18)$$

Dalla (18) segue che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x, y), \quad x \in \overline{G}, \quad y \in \overline{G}, \quad (19)$$

è maggiorata mediante una serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^{k+1} V^k,$$

convergente nel cerchio $|\lambda| < 1/MV$. Perciò la serie (19) è regolarmente convergente per $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$, $|\lambda| \leqslant 1/MV - \varepsilon$, per ε positivo qualsiasi. Come conseguenza, la sua somma è continua in $\overline{G} \times \overline{G} \times U_{1/MV}$ ed analitica in λ nel cerchio $|\lambda| < 1/MV$. Indi-

chiamo la somma della serie (19) con $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$:

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x, y).$$

La funzione $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ è detta *risolvente* del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$.

Teorema. *La soluzione* φ *dell'equazione integrale* (2) *con nucleo continuo* $\mathscr{K}(x, y)$ *è unica nella classe* $C(\overline{G})$ *per* $|\lambda| < 1/MV$ *e per qualunque* $f \in C(\overline{G})$ *è rappresentata con il risolvente* $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ *del nucleo* $\mathscr{K}(x, y)$ *mediante l'equazione*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathscr{R}(x, y; \lambda) f(y)\, dy, \tag{20}$$

in altre parole, è valida la seguente equazione operatoriale:

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}, \tag{21}$$

dove R *è un operatore integrale con nucleo* $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$.

Dimostrazione. Conformemente al teorema del § 17.1, la soluzione φ dell'equazione (2) è unica nella classe $C(\overline{G})$ per $|\lambda| < 1/MV$ e per qualunque $f \in C(\overline{G})$ è rappresentata nella forma di una serie di Neumann convergente (12). Sostituendo in questa serie le espressioni di iterazioni $K^h f$ in termini dei nuclei iterati $\mathscr{K}_h(x, y)$ ed utilizzando la convergenza uniforme della serie (19) per il risolvente $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$, si ottiene la formula (20):

$$\varphi(x) = \int_G \left[\lambda \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h \mathscr{K}_{h+1}(x, y)\right] f(y)\, dy + f(x) =$$

$$= \lambda \int_G \mathscr{R}(x, y; \lambda) f(y)\, dy + f(x).$$

Il teorema è dimostrato.

Dimostriamo che i nuclei iterati $(K^*)_p(x, y)$ ed il risolvente $\mathscr{R}_*(x, y; \lambda)$ del nucleo coniugato hermitiano $\mathscr{K}^*(x, y)$ sono espressi in termini dei nuclei iterati $\mathscr{K}_p(x, y)$ e del risolvente del nucleo iniziale $\mathscr{K}(x, y)$ come segue:

$$(\mathscr{K}^*)_p(x, y) = \mathscr{K}_p^*(x, y), \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

$$\mathscr{R}_*(x, y; \lambda) = \overline{\mathscr{R}}(y, x; \bar{\lambda}), \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}. \tag{23}$$

L'uguaglianza (22) segue dalla formula (16), secondo la quale

$$(\mathscr{K}^*)^p = (\mathscr{K}^p)^*, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Visto che $|\mathscr{K}^*(x, y)| = |\mathscr{K}(y, x)| \leqslant M$, si conclude che, da quanto abbiamo dimostrato, la serie (19) per il risolvente $\mathscr{R}_*(x, y; \lambda)$

del nucleo $\mathscr{K}^*(x, y)$ converge per $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$ e $|\lambda| < 1/MV$. Da ciò, utilizzando l'uguaglianza (22), si ottiene la formula (23):

$$\mathscr{R}_*(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\mathscr{K}^*)_{k+1}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathscr{K}^*_{k+1}(x, y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overline{\mathscr{K}}_{k+1}(y, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lambda}^k \mathscr{K}_{k+1}(y, x) = \overline{\mathscr{R}}(y, x; \overline{\lambda}).$$

Dalla (23) si ottiene

$$\mathscr{R}_*(x, y; \overline{\lambda}) = \overline{\mathscr{R}}(y, x; \lambda) = \mathscr{R}^*(x, y; \lambda), \quad |\lambda| < \frac{1}{MV},$$

e, di conseguenza, in virtù della (21), è valida la formula

$$(I - \overline{\lambda}\mathscr{K}^*)^{-1} = I + \overline{\lambda}R^*, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}. \tag{21*}$$

Osservazione. Si può dimostrare che il risolvente $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo continuo $\mathscr{K}(x, y)$ ammette un prolungamento meromorfico in tutto il piano della variabile complessa λ ed inoltre i suoi poli sono i numeri caratteristici del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$. Questa proposizione sarà dimostrata sotto per i nuclei degeneri ed hermitiani.

3. Equazioni integrali di Volterra. Supponiamo che sia $n = 1$, che la regione G sia l'intervallo $(0, a)$ ed il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ si annulli nel triangolo $0 < x < y < a$ (fig. 68). Questo nucleo si dice *nucleo di Volterra*. Le equazioni (1) e (2) con nucleo di Volterra assumono la forma

$$\int_0^x \mathscr{K}(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x), \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathscr{K}(x, y)\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{24}$$

e sono dette *equazioni integrali di Volterra* di prima e di seconda specie, rispettivamente.

Le equazioni integrali di Volterra di prima specie per derivazione possono essere ridotte ad equazioni di seconda specie:

$$\mathscr{K}(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial \mathscr{K}(x, y)}{\partial x}\varphi(y)\,dy = f'(x),$$

se $\mathscr{K}(x, y)$ e $\mathscr{K}_x(x, y)$ sono continui per $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant a$, $\mathscr{K}(x, x) \neq \neq 0$, $x \in [0, a]$, $f \in C^1([0, a])$ e $f(0) = 0$. Non considereremo qui le equazioni integrali di Volterra di prima specie.

Supponiamo che nell'equazione integrale (24) sia $f \in C([0, a])$ e che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ sia continuo nel triangolo chiuso $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \leqslant a$ (si veda la fig. 68). In questo caso $|\mathscr{K}(x, y)| \leqslant M$ e l'opera-

tore integrale

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy$$

trasferisce $C([0, a])$ in $C([0, a])$.

Come per l'equazione di Fredholm (§ 17.1), definiamo le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$ conformemente alla seguente formula:

$$\varphi^{(0)} = f, \quad \varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 1, 2, \ldots \quad (25)$$

Le iterazioni $K^p f$ appartengono a $C([0, a])$ e soddisfano la stima

$$|(K^p f)(x)| \leqslant \| f \|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \quad x \in [0, a], \quad p = 0, 1, \ldots \quad (26)$$

Dimostriamo la stima (26) per induzione rispetto a p. Per $p = 0$, la stima (26) è valida. Supponendola valida per $p - 1$, dimostriamo la sua validità per p:

$$|(K^p f)(x)| = |K(K^{p-1} f)| = \left| \int_0^x \mathscr{K}(x, y)(K^{p-1} f)(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \| f \|_C M^{p-1} \int_0^x \frac{y^{p-1}}{(p-1)!}\, dy = \| f \|_C \frac{(Mx)^p}{p!}.$$

Dalla stima (26) segue che la serie di Neumann (10) è maggiorata su $[0, a]$ mediante una serie numerica convergente

$$\| f \|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{(Ma)^k}{k!} = \| f \|_C e^{|\lambda| Ma} \quad (27)$$

e per questa ragione è regolarmente convergente in x su $[0, a]$ per λ qualsiasi, definendo una funzione continua $\varphi(x)$. Dunque, in virtù della (25) le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$ per $p \to \infty$ tendono uniformemente alla funzione φ:

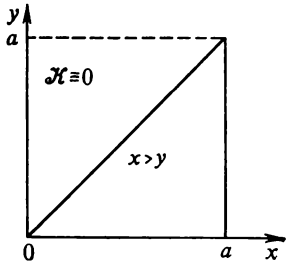


Fig. 68.

$$\varphi^{(p)}(x) \xrightarrow{x \in [0, a]} \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad p \to \infty. \quad (28)$$

Qui, in virtù della (27), è valida la disuguaglianza

$$\| \varphi \|_C \leqslant \| f \|_C e^{|\lambda| Ma}. \quad (29)$$

Passando al limite, per $p \to \infty$, nella relazione di ricorrenza (25) ed utilizzando la convergenza uniforme della successione $\varphi^{(p)}$ a φ su $[0, a]$, concludiamo che la funzione costruita $\varphi(x)$ soddisfa l'equazione integrale (24).

Dimostriamo che la soluzione dell'equazione (24) è unica nella classe C ($[0, a]$) per λ qualsiasi. Per ciò è sufficiente dimostrare che la corrispondente equazione omogenea ha in questa classe una sola soluzione nulla (§ 1.11). Infatti, se φ_0 è la soluzione dell'equazione omogenea (24), cioè $\varphi_0 = \lambda K\varphi_0$, si ha

$$\varphi_0 = \lambda K(\lambda K\varphi_0) = \lambda^2 K^2\varphi_0 = \ldots = \lambda^p K^p\varphi_0, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Applicando a queste uguaglianze la (26), cioè

$$|\varphi_0(x)| = |\lambda^p K^p\varphi_0| \leqslant |\lambda|^p \| \varphi_0 \|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

e facendo tendere p a ∞, si ottiene $\varphi_0(x) = 0$, $x \in [0, a]$, quanto si voleva dimostrare.

Formuliamo i risultati ottenuti nella forma del seguente

Teorema. *Ogni equazione integrale di Volterra* (24) *con nucleo continuo* $\mathcal{K}(x, y)$ *per* λ *qualsiasi ha un'unica soluzione* φ *nella classe* C ($[0, a]$) *per qualunque termine noto* $f \in C$ ($[0, a]$). *Questa soluzione è data dalla serie di Neumann regolarmente convergente* (28) *e soddisfa la disuguaglianza* (29).

Corollario. *Un nucleo di Volterra continuo non ha numeri caratteristici.*

4. Equazioni integrali con nucleo polare. Il nucleo

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mathcal{H}(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n,$$

con $\mathcal{H}(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$, si dice *nucleo polare*; se $\alpha < n/2$, $\mathcal{K}(x, y)$ si dice *nucleo debolmente polare.*

Affinché un nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ *sia polare, è necessario e sufficiente che questo nucleo sia continuo per* $x \neq y$, $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$ *e soddisfi la disuguaglianza*

$$|\mathcal{K}(x, y)| \leqslant \frac{A}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n, \quad x \in G, \quad y \in G.$$

Infatti, la necessità della condizione è evidente e la sufficienza deriva dalla rappresentazione

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mathcal{K}(x, y)\,|x - y|^{\alpha+\varepsilon}}{|x - y|^{\alpha+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < n - \alpha,$$

dove la funzione

$$\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{K}(x, y)\,|x - y|^{\alpha+\varepsilon}$$

è continua su $\overline{G} \times \overline{G}$.

Lemma 1. *Un operatore integrale K con un nucleo polare $\mathscr{K}(x, y)$ trasferisce $C(\overline{G})$ in $C(\overline{G})$ e $\mathscr{L}_2(G)$ in $\mathscr{L}_2(G)$ ed è limitato:*

$$\| Kf \|_C \leqslant N \| f \|_C, \qquad f \in C(\overline{G}), \tag{30}$$

$$\| Kf \| \leqslant \sqrt{NN^*}\, \| f \|, \qquad f \in \mathscr{L}_2(G), \tag{31}$$

dove

$$N = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |\mathscr{K}(x, y)|\, dy, \quad N^* = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |\mathscr{K}^*(x, y)|\, dy.$$

Dimostrazione. Sia $f \in C(\overline{G})$. Allora la funzione

$$(Kf)(x) = \int_G \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy = \int_G \frac{\mathscr{H}(x, y)}{|x-y|^{\alpha}} f(y)\, dy$$

è continua su $\overline{G}$ (si veda il § 1.6), in modo che l'operatore K trasferisce $C(\overline{G})$ in $C(\overline{G})$ ed è valida la disuguaglianza (30):

$$\| Kf \|_C = \max_{x \in G} \int_G |\mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy| \leqslant$$

$$\leqslant \| f \|_C \max_{x \in G} \int |\mathscr{K}(x, y)|\, dy = N \| f \|_C.$$

Sia $f \in \mathscr{L}_2(G)$. Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij, si ottiene

$$\| Kf \|^2 = \int_G |Kf|^2\, dx = \int_G \Big| \int_G \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy \Big|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_G \Big[\int_G \sqrt{|\mathscr{K}(x, y)|}\, \sqrt{|\mathscr{K}(x, y)|}\, |f(y)|\, dy \Big]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_G \int_G |\mathscr{K}(x, y')|\, dy' \int_G |\mathscr{K}(x, y)|\, |f(y)|^2\, dy\, dx \leqslant$$

$$\leqslant N \int_G |f(y)|^2 \int_G |\mathscr{K}(x, y)|\, dx\, dy \leqslant NN^* \int_G |f(y)|^2\, dy = NN^* \| f \|^2,$$

da cui segue che l'operatore K trasferisce $\mathscr{L}_2(G)$ in $\mathscr{L}_2(G)$ ed è valida la disuguaglianza (31).

Il lemma è dimostrato.

Utilizzando il lemma dimostrato e ripetendo i ragionamenti del § 17.1 concludiamo che il teorema del § 17.1 resta anche valido per l'equazione integrale (2) con nucleo polare $\mathscr{K}(x, y)$ nella regione limitata $\overline{G} \times \overline{G}$, con la sostituzione di MV con N: *se* $|\lambda| < 1/N$, *nella classe* $C(\overline{G})$ *esiste un'unica soluzione per qualunque* $f \in C(\overline{G})$ *e questa soluzione è data da una serie di Neumann regolarmente convergente su* $\overline{G}$.

Lemma 2. *Se* $\mathscr{K}_i(x, y)$ *sono nuclei polari,*

$$|\mathscr{K}_i(x, y)| \leqslant \frac{A_i}{|x-y|^{\alpha_i}}, \quad \alpha_i < n, \quad i = 1, 2,$$

e la regione G *è limitata, allora il nucleo*

$$\mathscr{K}_3(x, y) = \int_G \mathscr{K}_2(x, y')\, \mathscr{K}_1(y', y)\, dy'$$

è polare anch'esso, ed inoltre

$$\begin{cases} |\mathscr{K}_3(x, y)| \leqslant \dfrac{A_3}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}}, & \text{se } \alpha_1+\alpha_2 > n, \\ |\mathscr{K}_3(x, y)| \leqslant A_4 |\ln |x-y|| + A_5, & \text{se } \alpha_1+\alpha_2 = n; \end{cases} \tag{32}$$

$\mathscr{K}_3(x, y)$ *è continuo su* $\overline{G} \times \overline{G}$, *se* $\alpha_1 + \alpha_2 < n$.

Dimostrazione. Rappresentando i nuclei polari $\mathscr{K}_i(x, y)$ nella forma

$$\mathscr{K}_i(x, y) = \frac{\mathscr{H}_i(x, y)}{|x-y|^{\alpha_i+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < n - \alpha_i,$$

dove $\mathscr{H}_i(x, y)$ sono funzioni continue su $\overline{G} \times \overline{G}$, riscriviamo il nucleo $\mathscr{K}_3(x, y)$ nella forma

$$\mathscr{K}_3(x, y) = \int_G \frac{\mathscr{H}_2(x, y')\, \mathscr{H}_1(y', y)}{|x-y'|^{\alpha_2+\varepsilon} |y'-y|^{\alpha_n+\varepsilon}}\, dy'.$$

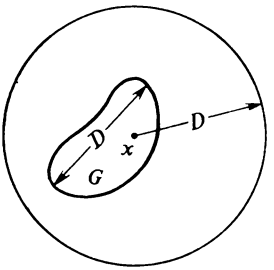


Fig. 69.

Se $\alpha_1 + \alpha_2 < n$, allora per $\varepsilon < 1/2\,(n - \alpha_1 - \alpha_2)$, $\varepsilon > 0$, il nucleo $\mathscr{K}_3(x, y)$ è continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$ (si veda il § 1.6). Se, invece, $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant n$, ragionando come nel § 1.6, concludiamo che $\mathscr{K}_3(x, y)$ è continuo per $x \neq y$, $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$.

Dunque, per dimostrare il lemma, non resta altro che dimostrare le stime (32) per $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant n$. Considerando le disuguaglianze per i nuclei $\mathscr{K}_i(x, y)$, abbiamo

$$|\mathscr{K}_3(x, y)| \leqslant A_1 A_2 \int_G \frac{dy'}{|x-y'|^{\alpha_2} |y'-y|^{\alpha_1}}, \quad x \in G, \quad y \in G.$$

Passando in questo integrale a nuove variabili d'integrazione $\eta = x - y'$ e sostituendo il dominio d'integrazione ottenuto con uno più grande, una sfera U_D, dove D è il diametro della regione G (fig. 69), arriviamo alla relazione

$$|\mathscr{K}_3(x, y)| \leqslant A_1 A_2 \int_{U_D} \frac{d\eta}{|\eta|^{\alpha_2} |x-y-\eta|^{\alpha_1}}.$$

Introducendo le notazioni

$$|x-y|=r, \quad \frac{x-y}{r}=s, \quad |s|=1$$

e sostituendo nell'ultimo integrale le variabili d'integrazione $\eta = r\xi$, $d\eta = r^n\, d\xi$, si ottiene

$$|\mathscr{K}_3(x, y)| \leqslant A_1 A_2 r^{n-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_{U\frac{D}{r}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2}|s-\xi|^{\alpha_1}} =$$

$$= A_1 A_2 r^{n-\alpha_1-\alpha_2} \left(\int\limits_{|\xi|\leqslant 2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2}|s-\xi|^{\alpha_1}} + \int\limits_{2<|\xi|<\frac{D}{r}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2}|s-\xi|^{\alpha_1}} \right). \quad (33)$$

Visto che $|s| = 1$, l'integrale del primo termine è una quantità uniformemente limitata:

$$\int\limits_{|\xi|\leqslant 2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2}|s-\xi|^{\alpha_1}} \leqslant A_6. \quad (34)$$

Tenendo conto dell'uguaglianza

$$|\xi-s| \geqslant |\xi|-|s| = |\xi|-1 \geqslant \frac{1}{2}|\xi|,$$

(per $|\xi| > 2$), possiamo stimare il secondo integrale:

$$\int\limits_{2<|\xi|<\frac{D}{r}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2}|s-\xi|^{\alpha_1}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\alpha_1} \int\limits_{1<|\xi|<\frac{D}{r}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_1+\alpha_2}} = 2^{\alpha_1}\sigma_n \int\limits_1^{\frac{D}{r}} \rho^{n-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\alpha_1}\sigma_n \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1+\alpha_2-n}, & \text{se } \alpha_1+\alpha_2 > n; \\ \ln \dfrac{D}{r}, & \text{se } \alpha_1+\alpha_2 = n. \end{cases} \quad (35)$$

Dalle (33)-(35) seguono le (32). Il lemma è dimostrato.

Dal lemma dimostrato segue che tutti i nuclei iterati $\mathscr{K}_p(x, y)$ di un nucleo polare $\mathscr{K}(x, y)$ sono polari e soddisfano le relazioni

$$|\mathscr{K}_p(x, y)| \leqslant \begin{cases} A_p|x-y|^{-p\alpha+(p+1)n}, & \text{se } p\alpha-(p-1)n > 0; \\ A_p|\ln|x-y|| + B_p, & \text{se } p\alpha-(p-1)n = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Dal numero $p_0 = [n/(n-\alpha)] + 1$ i nuclei iterati $\mathscr{K}_p(x, y)$ sono continui. (Qui $[t]$ denota la parte integrale del numero $t \geqslant 0$.)

Da ciò, utilizzando il lemma del § 17.4 e ragionando come nel § 17.2 concludiamo che il risolvente del nucleo polare $\mathscr{K}(x, y)$

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x, y) = \mathscr{R}_1(x, y; \lambda) + \mathscr{R}_2(x, y; \lambda) \quad (37)$$

rappresenta la somma di due termini: del termine polare

$$\mathscr{R}_1(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{p_0-2} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x, y)$$

e del termine continuo

$$\mathscr{R}_2(x, y; \lambda) = \sum_{k=p_0-1}^{\infty} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x, y). \tag{38}$$

In questo caso la serie (38) è uniformemente convergente per $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$, $|\lambda| \leqslant 1/N - \varepsilon$, per ε positivo arbitrario, e definisce una funzione continua $\mathscr{R}_2(x, y; \lambda)$ per $x \in G$, $y \in \overline{G}$ e $|\lambda| > 1/N$, che è analitica in λ nel cerchio $|\lambda| < 1/N$.

Da quanto è stato detto segue che il *teorema del* § 17.2 *resta valido per l'equazione integrale* (2) *con nucleo polare* $\mathscr{K}(x, y)$ *a condizione che* $|\lambda| < 1/N$. Inoltre, le formule (22), (23) e (21*) per $(\mathscr{K}_p^*)(x, y)$, $\mathscr{R}_*(x, y; \lambda)$ e $(I - \bar{\lambda}K^*)^{-1}$ sono valide, evidentemente, anch'esse, se $|\lambda| < 1/N$ e $|\lambda| < 1/N^*$.

5. **Esercizi.** a) Dimostrare che il risolvente $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo continuo $\mathscr{K}(x, y)$ soddisfa l'equazione integrale di Fredholm per $|\lambda| MV < 1$:

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x, y') \mathscr{R}(y', y; \lambda)\, dy' + \mathscr{K}(x, y).$$

b) Supponiamo che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ dell'equazione integrale di Fredholm (2) appartenga a $\mathscr{L}_2(G \times G)$. Utilizzando la stima (28) del § 1.10, dimostrare che, per qualunque $f \in \mathscr{L}_2(G)$, il metodo delle approssimazioni successive converge in $\mathscr{L}_2(G)$ se $|\lambda| C < 1$.

c) Dimostrare che il risolvente del nucleo di Volterra è analitico in tutto il piano della variabile complessa λ (cioè questo risolvente è una funzione intera).

d) Siano $\mathscr{K} \in C$ $(x \geqslant 0)$ e $\mathscr{K}(x) = 0$ per $x < 0$. Dimostrare che la funzione generalizzata

$$\mathscr{E}(x) = \delta(x) + \mathscr{R}(x), \quad \mathscr{R} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathscr{K} * \mathscr{K} * \ldots * \mathscr{K}}_{k \text{ volte}},$$

è la soluzione fondamentale dell'operatore $(\delta - \mathscr{K}) *$ nell'algebra $\mathscr{D}_+'$ (cfr. il § 7.7 e 7.8). Qui la serie per $\mathscr{R}(x)$ è uniformemente convergente in ogni intervallo finito e verifica l'equazione integrale di Volterra

$$\mathscr{R}(x) = \int_0^x \mathscr{K}(x-y) \mathscr{R}(y)\, dy + \mathscr{K}(x), \qquad x \geqslant 0.$$

La funzione $\mathscr{R}(x - y)$ è il risolvente del nucleo $\mathscr{K}(x - y)$ per $\lambda = 1$.

e) Dimostrare che per $|\lambda| < 1$ l'equazione integrale di Milne

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} \mathscr{K}(x-y) \varphi(y)\, dy, \quad \mathscr{K}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

ha un'unica soluzione $\varphi = 0$ nella classe delle funzioni limitate in $[0, \infty)$.

f) Dimostrare che per $\lambda < 1/2$ la soluzione $\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)\,dy + f(x)$ è unica nella classe limitata in R^1 ed è data dalla formula

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|} f(y)\,dy.$$

g) Per l'operatore integrale di Paierls

$$K\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|^2}\,\varphi(y)\,dy$$

dimostrare la relazione $N = N^* \leqslant 1/\alpha\,(1 - e^{-\alpha D})$, dove D è il diametro della regione $G \subset R^3$.

§ 18. *Teoremi di Fredholm*

In questo paragrafo saranno dimostrati i teoremi di risolvibilità di Fredholm per l'equazione di Fredholm

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \tag{1}$$

con nucleo continuo $\mathscr{K}(x, y)$ e della sua equazione aggiunta

$$\psi = \lambda K^*\psi + g. \tag{1*}$$

1. Equazioni integrali con nucleo degenere. Il nucleo

$$\mathscr{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, g_i(y), \tag{2}$$

dove f_i e g_i appartengono a $C(\overline{G})$, si dice *nucleo degenere.*

Senza perdere di generalità possiamo assumere i sistemi di funzioni $\{f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ e $\{g_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ linearmente indipendenti. Infatti, se non è così, si ha allora, per esempio,

$$f_N(x) = c_1 f_1(x) + \ldots + c_{N-1} f_{N-1}(x)$$

ed il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$, in virtù della (2), assume la forma

$$\mathscr{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)\, g_i(y) + \sum_{i=1}^{N-1} c_i f_i(x)\, g_N(y) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)\, g_i^*(y).$$

Procedendo in modo simile, dopo un numero finito di passi, arriveremo ad una situazione nella quale i sistemi di funzioni $\{f_i\}$ e $\{g_i\}$, nella rappresentazione (2), risulteranno linearmente indipendenti.

Consideriamo l'equazione integrale di Fredholm con nucleo degenere (2)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G g_i(y)\,\varphi(y)\,dy + f(x) \tag{3}$$

e l'equazione aggiunta

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \overline{g}_i(x) \int_G \overline{f}_i(y)\, \psi(y)\, dy + g(x). \qquad (3^*)$$

Cercheremo le soluzioni φ e ψ delle equazioni integrali (3) e (3*) nella classe $C(\overline{G})$.

Dimostriamo che queste equazioni si riducono a sistemi di equazioni algebriche lineari e possono, quindi, essere studiate e risolte mediante i metodi noti di algebra lineare.

Riscriviamo l'equazione (3) nella forma

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) + f(x), \qquad (4)$$

dove

$$c_i = \int_G \varphi(y)\, g_i(y)\, dy = (\varphi, \overline{g}_i) \qquad (5)$$

sono numeri incogniti. Moltiplicando l'uguaglianza (4) per $g_k(x)$, integrando su G ed utilizzando la (5), si ottiene il seguente sistema di equazioni algebriche lineari per le incognite c_i:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i \int_G g_k(x)\, f_i(x)\, dx + \int_G g_k(x)\, f(x)\, dx. \qquad (6)$$

Introducendo le notazioni

$$\alpha_{ki} = \int_G g_k(x)\, f_i(x)\, dx, \qquad a_k = \int_G f(x)\, g_k(x)\, dx = (f, \overline{g}_k), \qquad (7)$$

riscriviamo il sistema (6) come segue:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki} c_i + a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (8)$$

Introducendo la matrice A ed i vettori $\boldsymbol{c}$ ed $\boldsymbol{a}$:

$$A = (\alpha_{ki}),\ \boldsymbol{c} = (c_1; c_2, \ldots, c_N),\ \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N),$$

rappresentiamo il sistema (8) nella forma matriciale

$$\boldsymbol{c} = \lambda A \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}. \qquad (9)$$

Dimostriamo che l'equazione integrale (3) e l'equazione algebrica (9) sono *equivalenti*. Infatti, se $\varphi \in C(\overline{G})$ è la soluzione dell'equazione (3), allora, come abbiamo appena dimostrato, i numeri $c_i = (\varphi, \overline{g}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, soddisfano il sistema (8). Inversamente, se i numeri c_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, soddisfano il sistema (8), la funzione $\varphi(x)$ costruita conformemente alla formula (4), è continua su

$\overline{G}$ e, in virtù della (7), soddisfa l'equazione (3)

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G g_i(y)\,\varphi(y)\,dy - f(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) +$$

$$+ f(x) - \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G g_i(y) \left[\lambda \sum_{k=1}^{N} c_k f_k(y) + f(y)\right] dy -$$

$$- f(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \left(c_i - \lambda \sum_{k=1}^{N} c_k \alpha_{ik} - a_i\right) = 0$$

Denotiamo con $D(\lambda)$ il determinante di sistema (9):

$$D(\lambda) = \det(I - \lambda A), \tag{10}$$

e con $M_{ki}(\lambda)$ il complemento algebrico della matrice $I - \lambda A$. È chiaro che $D(\lambda)$ e $M_{ki}(\lambda)$ sono polinomi in λ, ed inoltre $D(\lambda) \not\equiv 0$, visto che $D(0) = \det I = 1$.

Supponiamo che il numero (complesso) λ sia tale che $D(\lambda) \neq 0$. Secondo il teorema di Cramer, la soluzione del sistema algebrico (9) è unica ed è data dalla seguente formula:

$$c_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{N} M_{ki}(\lambda)\, a_i, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

Sostituendo la soluzione ottenuta (11) nella formula (4) e ricordando la definizione dei numeri a_k, si ottiene la soluzione dell'equazione integrale (3) per $D(\lambda) \neq 0$ nella forma

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i,\,k=1}^{N} M_{ik}(\lambda)\, f_i(x) \int_G g_k(y)\, f(y)\, dy + f(x). \tag{12}$$

D'altra parte, conformemente al teorema del § 17.2, per λ sufficientemente piccoli (ed allora $D(\lambda) \neq 0$), questa soluzione è espressa in termini del risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ mediante la formula (20) del § 17.2. Di conseguenza,

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,\,k=1}^{N} M_{ik}(\lambda)\, f_i(x)\, g_k(y). \tag{13}$$

Dunque, il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo degenere è una funzione razionale di λ e, quindi, ammette un prolungamento meromorfico su tutto il piano della variabile complessa λ (si veda § 17.2, osservazione).

2. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo degenere. Nel punto precedente abbiamo costruito in forma esplicita la soluzione di un'equazione integrale con nucleo degenere. Conti-

nuiamo lo studio di queste equazioni e stabiliamo le condizioni della loro risolvibilità.

Come l'equazione (3), riduciamo l'equazione aggiunta (3*) ad un sistema equivalente di equazioni algebriche lineari. Abbiamo

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \overline{g}_i(x) + g(x), \tag{4*}$$

dove $d_i = (\psi, f_i)$ sono numeri incogniti. Il corrispondente sistema di equazioni algebriche lineari equivalente all'equazione (3*) è della forma

$$d_k = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ki} d_i + b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{8*}$$

dove

$$\beta_{ki} = \int_G \overline{f}_k(x)\, \overline{g}_i(x)\, dx = \overline{\alpha}_{ik}, \quad b_k = (g, f_k). \tag{7*}$$

Dunque, il sistema (8*) è aggiunto a quello (8):

$$\boldsymbol{d} = \overline{\lambda} A^* \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}, \tag{9*}$$

dove

$$A^* = (\beta_{ki}) = (\overline{\alpha}_{ik}) = \overline{A}', \quad \boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_N),$$
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N).$$

Dal corso dell'algebra lineare sappiamo[1] che i determinanti ed i ranghi di una matrice e della sua trasposta coincidono. Perciò, in virtù della (10), si ha

$$\begin{cases} \det(I - \overline{\lambda} A^*) = \det(I - \lambda \overline{A}') = \overline{\det(I - \lambda A')} = \overline{D(\lambda)}, \\ \operatorname{rang}(I - \overline{\lambda} A^*) = \operatorname{rang}\overline{(I - \lambda A')} = \operatorname{rang}(I - \lambda A) = q. \end{cases} \tag{14}$$

Possono essere esaminati due casi.

I. $D(\lambda) \neq 0$. Allora $q = N$ ed i sistemi (9) e (9*) sono univocamente risolvibili per $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ qualsiasi. Di conseguenza, le equazioni (3) e (3*) sono anch'esse univocamente risolvibili per f e g qualsiasi e queste soluzioni sono date dalle formule (4) e (4*), rispettivamente.

II. $D(\lambda) = 0$. In questo caso $q < N$ e, in virtù della (14), i sistemi omogenei (9) e (9*) hanno esattamente $N - q$ soluzioni linearmente indipendenti:

$$\boldsymbol{c}^{(s)} = (c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \ldots, c_N^{(s)}), \quad \boldsymbol{d}^{(s)} = (d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \ldots, d_N^{(s)}),$$
$$s = 1, 2, \ldots, N - q.$$

Le equazioni integrali omogenee (3) e (3*) avranno anch'esse esattamente $N - q$ soluzioni linearmente indipendenti definite dalle for-

[1] Si veda, per esempio, Beklemišev [1], cap. V.

mule (4) e (4*), rispettivamente:

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i^{(s)} f_i(x), \quad \psi_s(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i^{(s)} g_i(x), \tag{15}$$

$$s = 1, 2, \ldots, N-q.$$

Dimostriamo ora l'indipendenza lineare di questi sistemi di soluzioni, $\{\varphi_s, 1 \leqslant s \leqslant N-q\}$ e $\{\psi_s, 1 \leqslant s \leqslant N-q\}$. Supponiamo che esistano numeri p_s, $s = 1, 2, \ldots, N-q$ tali che

$$\sum_{s=1}^{N-q} p_s \varphi_s(x) = 0, \quad x \in G,$$

cioè, in virtù della (15), si ha

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x) \sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \quad x \in G$$

Da ciò, in virtù dell'indipendenza lineare del sistema di funzioni $\{f_i, 1 \leqslant i \leqslant N\}$, segue che

$$\sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Visto che il sistema di vettori $\{c^{(s)}, 1 \leqslant s \leqslant N-q\}$ è linearmente indipendente in R^N, le relazioni precedenti implicano che $p_s = 0$, $s = 1, 2, \ldots, N-q$, il che dimostra l'indipendenza lineare del sistema di soluzioni $\{\varphi_s\}$. In modo analogo è stabilita l'indipendenza del sistema di soluzioni $\{\psi_s\}$.

Inoltre, per la risolvibilità del sistema (9) per $D(\lambda) = 0$ è necessario e sufficiente che siano verificate le seguenti condizioni di ortogonalità [1]:

$$(a, d^{(s)}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \bar{d}_i^{(s)} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, N-q. \tag{16}$$

Le condizioni (16) sono equivalenti alle condizioni

$$(f, \psi_s) = \int_G f(x) \bar{\psi}_s(x)\, dx = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, N-q,$$

poiché, in virtù delle (15) e (7), si ha

$$\int_G f(x) \bar{\psi}_s(x)\, dx = \lambda \sum_{i=1}^{N} \int_G f(x) g_i(x)\, dx \bar{d}_i^{(s)} = \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i \bar{d}_i^{(s)} = \lambda (a, d^{(s)}).$$

Dunque, abbiamo dimostrato i seguenti teoremi, detti *teoremi di Fredholm.*

Teorema 1. *Se* $D(\lambda) \neq 0$, *l'equazione* (3) *e l'equazione aggiunta* (3*) *sono univocamente risolvibili con termini noti* f *e* g *qualsiasi.*

[1] Questa è la forma geometrica del teorema di Kronecker-Capelli.

Teorema 2. *Se* $D(\lambda) = 0$, *le equazioni omogenee* (3) *e* (3*) *hanno lo stesso numero di soluzioni linearmente indipendenti uguale a* $N - q$, *in cui* q *è il rango della matrice* $I - \lambda A$.

Teorema 3. *Se* $D(\lambda) = 0$, *per la risolvibilità dell'equazione* (3) *è necessario e sufficiente che il termine noto* f *sia ortogonale a tutte le soluzioni* ψ_s, $s = 1, 2, \ldots, N - q$, *dell'equazione omogenea aggiunta* (3*).

Dai teoremi 1 e 2 segue che i numeri caratteristici di un nucleo degenere coincidono con le radici del polinomio $D(\lambda)$ e, di conseguenza, sono *finiti in numero*. Inoltre, dalla formula (13) per un risolvente segue che i numeri caratteristici di un nucleo degenere coincidono con i poli del suo risolvente (cfr. l'osservazione del § 17.2).

Osservazione. Può succedere che le funzioni f_i e g_i, nella rappresentazione (2) di un nucleo degenere, dipendono dal parametro complesso λ, e cioè: siano $f_i(x; \lambda)$ e $g_i(x; \lambda)$ continue in (x, λ) in $\overline{G} \times U_\omega$ ed analitiche rispetto a λ nel cerchio U_ω. *In questo caso i teoremi di Fredholm* 1-3 *restano validi a condizione che* $|\lambda| < \omega$.

Dimostriamo che il *determinante* $D(\lambda)$ *è una funzione analitica nel cerchio* $|\lambda| < \omega$. Infatti, gli elementi di matrice A, calcolati per mezzo della formula (7),

$$\alpha_{ki}(\lambda) = \int_G g_k(x; \lambda) f_i(x; \lambda)\, dx,$$

sono funzioni analitiche nel cerchio $|\lambda| < \omega$. Perciò, in virtù della (10), $D(\lambda)$ è una funzione analitica in questo cerchio ed inoltre $D(\lambda) \not\equiv 0$.

3. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo continuo. I teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo degenere dimostrati nel punto precedente possono essere estesi alle equazioni integrali con nucleo continuo arbitrario. L'essenza della dimostrazione sta nel fatto che un nucleo continuo è rappresentato come somma di un nucleo degenere e di un nucleo continuo sufficientemente piccolo. Ciò permette, utilizzando i risultati del § 17 sulla risolvibilità delle equazioni integrali con nucleo piccolo, di ridurre la corrispondente equazione integrale ad un'equazione integrale con nucleo degenere per la quale i teoremi di Fredholm sono stati già stabiliti. Ne seguirà che i teoremi di Fredholm sono validi per le equazioni con nucleo continuo in una regione limitata.

Dunque, sia il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$. Secondo il teorema di Weierstrass (si veda il § 1.3), questo nucleo può essere approssimato con precisione grande a piacere mediante polinomi, cioè, per ε positivo qualsiasi, esiste un polinomio

$$\mathscr{P}(x, y) = \sum_{0 \leqslant |\alpha+\beta| \leqslant N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \tag{17}$$

tale che

$$| \mathscr{K}(x, y) - \mathscr{P}(x, y) | < \varepsilon, \; x \in \overline{G}, \; y \in \overline{G}.$$

Dunque, il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ può essere rappresentato nella forma

$$\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{P}(x, y) + \mathscr{Q}(x, y), \tag{18}$$

dove $\mathscr{P}(x, y)$ è un nucleo degenere (polinomio) e $\mathscr{Q}(x, y)$ un nucleo continuo piccolo, $| \mathscr{Q}(x, y) | < \varepsilon$, $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$.

In virtù della (18) l'equazione integrale di Fredholm assume la forma

$$\varphi = \lambda P\varphi + \lambda Q\varphi + f, \tag{19}$$

dove P e Q sono operatori integrali con nuclei $\mathscr{P}(x, y)$ e $\mathscr{Q}(x, y)$, rispettivamente, ed inoltre $P + Q = K$.

Dimostriamo che, per $| \lambda | < 1/\varepsilon V$, nella classe $C(\overline{G})$ l'equazione integrale (19) è equivalente ad un'equazione integrale con nucleo degenere. Per ciò introduciamo una nuova funzione $\Phi(x)$ incognita mediante la formula

$$\Phi = \varphi - \lambda Q\varphi. \tag{20}$$

Secondo il teorema del § 17.2, la funzione φ è *univocamente* espressa in termini di Φ mediante la formula

$$\varphi = (I - \lambda Q)^{-1}\Phi = (I + \lambda R)\,\Phi, \tag{21}$$

dove R è un operatore integrale con nucleo $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$, risolvente del nucleo $\mathscr{Q}(x, y)$. In virtù delle (20) e (21), l'equazione (19) assume la seguente forma equivalente:

$$\Phi = \lambda P\,(I + \lambda R)\,\Phi + f = \lambda T\Phi + f, \tag{22}$$

dove

$$T = P + \lambda PR. \tag{23}$$

Ricordiamo che il risolvente $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ è continuo rispetto a $(x, y; \lambda)$ in $\overline{G} \times \overline{G} \times U_{1/\varepsilon V}$ ed analitico rispetto a λ nel cerchio $| \lambda | < 1/\varepsilon V$ (si veda § 17.2). Prendendo in considerazione il lemma del § 17.2, concludiamo che l'operatore T è un operatore integrale con nucleo continuo

$$\mathscr{T}(x, y; \lambda) = \mathscr{P}(x, y) + \lambda \int_G \mathscr{P}(x, y')\,\mathscr{R}(y', y; \lambda)\,dy'.$$

Inoltre, dalla (17) segue che $\mathscr{T}(x, y; \lambda)$ è degenere ed analitico in λ nel cerchio $| \lambda | < 1/\varepsilon V$.

Trasformiamo ora l'equazione integrale aggiunta (1*). In virtù della (18), $K^* = P^* + Q^*$, e perciò l'equazione (1*) assume la forma

$$(I - \overline{\lambda} Q^*)\,\psi = \overline{\lambda} P^*\psi + g. \tag{19*}$$

Applicando l'operatore $(I - \bar{\lambda}Q^*)^{-1}$ all'equazione (19*) ed utilizzando l'uguaglianza (21*) del § 17.2,

$$(I-\bar{\lambda}Q^*)^{-1}=I+\bar{\lambda}R^*, \quad |\lambda|<\frac{1}{\varepsilon V},$$

riduciamola all'equazione equivalente

$$\psi=(I-\bar{\lambda}Q^*)^{-1}(\bar{\lambda}P^*\psi+g)=(I+\bar{\lambda}R^*)(\bar{\lambda}P^*\psi+g)=$$
$$=\bar{\lambda}(P^*+\bar{\lambda}R^*P^*)\psi+(I+\bar{\lambda}R^*)g. \quad (24)$$

Introducendo le notazioni

$$g_1=(I+\bar{\lambda}R^*)g, \quad g=(I-\bar{\lambda}Q^*)g_1 \quad (25)$$

e tenendo conto del fatto che, conformemente alle formule (16) del § 17.2 e (23) si ha

$$P^*+\bar{\lambda}R^*P^*=(P+\lambda PR)^*=T^*,$$

riscriviamo l'equazione (24) nella forma

$$\psi=\bar{\lambda}T^*\psi+g_1. \quad (22^*)$$

Dunque, per $|\lambda|<1/\varepsilon V$, nella classe $C(\bar{G})$ l'equazione integrale (1) è equivalente a quella (22) con nucleo degenere $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$ analitico nel cerchio $|\lambda|<1/\varepsilon V$, mentre l'equazione aggiunta (1*) è equivalente all'equazione (22*), aggiunta della (22). Ma per le equazioni (22) e (22*) sono validi i teoremi di Fredholm 1-3 ed il determinante $D(\lambda)$ è una funzione analitica nel cerchio $|\lambda|<1/\varepsilon V$ (si veda il § 18.2 osservazione). Da ciò, utilizzando l'equivalenza tra queste equazioni e quelle iniziali (1) e (1*), si ottengono i seguenti *teoremi di Fredholm* per le equazioni integrali con nucleo continuo. L'insieme di questi teoremi si dice alternativa di Fredholm.

Alternativa di Fredholm. *Se l'equazione integrale* (1) *con nucleo continuo è risolvibile in* $C(\bar{G})$ *per un termine noto* $f \in C(\bar{G})$ *qualsiasi, anche l'equazione aggiunta* (1*) *è risolvibile in* $C(\bar{G})$ *per un termine noto* $g \in C(\bar{G})$ *qualsiasi, ed inoltre queste soluzioni sono uniche* (primo teorema di Fredholm).

Se l'equazione integrale (1) *non è risolvibile in* $C(\bar{G})$ *per un termine* f *qualsiasi, allora*

1) *le equazioni omogenee* (1) *e* (1*) *hanno uno stesso numero (finito) di soluzioni linearmente indipendenti* (secondo teorema di Fredholm);

2) *perché l'equazione* (1) *sia risolvibile, è necessario e sufficiente che il termine noto* f *sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea aggiunta* (1*) (terzo teorema di Fredholm).

Dimostrazione. Per $\lambda = 0$ l'alternativa di Fredholm è, evidentemente, valida. Perciò poniamo $\lambda \neq 0$ e nelle costruzioni precedenti scegliamo $\varepsilon < 1/|\lambda| V$.

Supponiamo che l'equazione (1) sia risolvibile in $C(\bar{G})$ per $f \in C(\bar{G})$ qualsiasi. Allora l'equazione (22), equivalente alla (1), con un nucleo degenere sarà anch'essa risolvibile in $C(\bar{G})$ per f qualsiasi. Applicando il teorema 3 del § 18.2 concludiamo che $D(\lambda) \neq 0$. Ma, in questo caso, conformemente al teorema 1 del § 18.2 l'equazione (22) e l'equazione aggiunta (22*) sono univocamente risolvibili per f e g_1 qualsiasi appartenenti a $C(\bar{G})$. Però le funzioni g_1 e g sono biunivocamente espresse mediante le formule (25) e, di conseguenza, le equazioni equivalenti (1) e (1*) sono univocamente risolvibili in $C(\bar{G})$ per f e g qualsiasi. Il primo teorema di Fredholm è dimostrato.

Se l'equazione (1) non è risolvibile in $C(\bar{G})$ per un f qualsiasi, allora anche l'equazione (22) con nucleo degenere equivalente alla (1) non è risolvibile in $C(\bar{G})$ per un f qualsiasi. In base al teorema 1 del § 18.2 concludiamo che $D(\lambda) = 0$. Ma allora, conformemente al teorema 2 del § 18.2, le equazioni omogenee (22) e (22*) hanno uno stesso numero (finito) di soluzioni linearmente indipendenti in $C(\bar{G})$. Visto che le funzioni Φ e φ sono collegate dalle relazioni (20), le equazioni omogenee equivalenti (1) e (1*) hanno uno stesso numero (finito) di equazioni linearmente indipendenti in $C(\bar{G})$ (si veda il § 1.11). Il secondo teorema di Fredholm è dimostrato.

Inoltre, in base al teorema 3 del § 18.2 per la risolvibilità dell'equazione (22) per $D(\lambda) = 0$ è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea aggiunta (22*). Ma le soluzioni ψ delle equazioni omogenee equivalenti (1*) e (22*), come pure i secondi membri f delle equazioni equivalenti (1) e (22), sono identiche. Di conseguenza, per la risolvibilità dell'equazione (1), nel caso considerato, è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (1*). Il terzo teorema di Fredholm è dimostrato.

Dimostriamo ora il q u a r t o t e o r e m a d i F r e d h o l m: *In ogni cerchio* $|\lambda| \leqslant R$ *ci può essere solo un numero finito di numeri caratteristici del nucleo* $\mathscr{K}(x, y)$.

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon = 1/(R+1)V$. Allora per $|\lambda| < R+1$ avremo $|\lambda| < 1/\varepsilon V$. Per questa ragione per $|\lambda| < R+1$ le equazioni omogenee (1) e (22) sono equivalenti. Di conseguenza, nel cerchio $|\lambda| < R+1$ i numeri caratteristici del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ coincidono con le radici dell'equazione $D(\lambda) = 0$ (si veda il § 18.2). Dato che il nucleo $\mathscr{T}(x, y; \lambda)$ è analitico in λ nel cerchio $|\lambda| < R+1$, $D(\lambda)$ è una funzione analitica in questo cerchio (si veda il § 18.2 osservazione). In base alla proprietà di unicità[1] delle funzioni analitiche concludiamo che, nel cerchio $|\lambda| \leqslant R$, ci può essere solo un numero finito di radici dell'equazione $D(\lambda) = 0$, e quindi anche il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ può avere solo un numero finito di numeri caratteristici. Il teorema è dimostrato.

[1] Si veda, per esempio, Sidorov, Fedorjuk e Šabunin [1], cap. II.

4. Corollari dei teoremi di Fredholm. Dal quarto teorema di Fredholm segue che l'*insieme dei numeri caratteristici di un nucleo continuo non ha punti limite finiti* e non è altro che numerabile. (Questo insieme può anche essere vuoto, come, per esempio, per un nucleo di Volterra, si veda il § 17.3).

Dal secondo teorema di Fredholm segue anche che la *molteplicità di ogni numero caratteristico è finita.*

Di conseguenza, tutti i numeri caratteristici del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ si possono numerare in ordine crescente del loro modulo:

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda|_2 \leqslant \ldots, \tag{26}$$

ripetendo λ_k in questa successione tante volte quant'è la sua molteplicità. Denotiamo le corrispondenti autofunzioni con $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ e facciamo corrispondere ad ogni autovalore una autofunzione φ_k:

$$\varphi_k = \lambda_k K\varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots,^1. \tag{27}$$

Per il secondo teorema di Fredholm, $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots$ sono numeri caratteristici del nucleo $\mathscr{K}^*(x, y)$ ed inoltre le molteplicità di λ_k e $\overline{\lambda}_k$ sono le stesse. Denotiamo con ψ_k le corrispondenti autofunzioni

$$\psi_k = \overline{\lambda}_k K^*\psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{27*}$$

Le autofunzioni φ_k e ψ_k sono continue su $\bar{G}$.

Dimostriamo che se $\lambda_k \neq \lambda_i$, si ha

$$(\varphi_k, \psi_i) = 0. \tag{28}$$

Prendendo in considerazione l'uguaglianza (14) del § 17.2, si ottiene dalle (27) e (27*)

$$(\varphi_k, \psi_i) = (\varphi_k, \overline{\lambda}_i K^*\psi_i) = \lambda_i (K\varphi_k, \psi_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_k}(\varphi_k, \psi_i),$$

da cui, in virtù del fatto che $\lambda_k \neq \lambda_i$, seguono le uguaglianze (28).

Notiamo che λ_k^p e φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *sono i numeri caratteristici e le corrispondenti autofunzioni del nucleo iterato* $\mathscr{K}_p(x, y)$.

Quest'asserzione segue dalle uguaglianze (27), secondo le quali si ha

$$\varphi_k = \lambda_k^p K^p \varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{29}$$

Inversamente, *se* μ *è l'autovalore e* φ *la corrispondente autofunzione del nucleo iterato* $\mathscr{K}_p(x, y)$, *allora almeno una delle radici* λ_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, *dell'equazione* $\lambda^p = \mu$, *è un autovalore del nucleo iniziale* $\mathscr{K}(x, y)$.

Quest'asserzione segue dall'uguaglianza

$$(\mu K^p - I)\varphi = (-1)^{p-1}(\lambda_1 K - I) \ldots (\lambda_p K - I)\varphi = 0. \tag{30}$$

[1] Se λ_k non è un semplice autovalore, le corrispondenti φ_k si possono scegliere mediante metodi diversi e quindi la corrispondenza (27) tra λ_k e φ_k non è univoca.

Infatti, se

$$\psi = (\lambda_2 K - I) \ldots (\lambda_p K - I)\,\varphi \neq 0, \tag{31}$$

si ha, in virtù della (30), $(\lambda_1 K - I)\,\psi = 0$, e per questa ragione λ_1 è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$. Se, invece, $\psi = 0$, cioè, in virtù della (31), si ha

$$(\lambda_2 K - I) \ldots (\lambda_p K - I)\,\varphi = 0,$$

allora, ripetendo il ragionamento precedente, si ottiene che o λ_2 è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$, o $(\lambda_3 K - I) \ldots (\lambda_p K - I)\,\varphi = 0$, ecc.

Riformuliamo ora l'alternativa di Fredholm in termini di autovalori e di autofunzioni.

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *le equazioni integrali* (1) *e* (1*) *sono univocamente risolvibili per qualunque termine noto.*

Se $\lambda = \lambda_k$, *le equazioni omogenee*

$$K\varphi = \lambda_k \varphi \text{ e } K^*\psi = \bar{\lambda}_k \psi$$

hanno uno stesso numero (finito) $r_k \geqslant 1$ *di soluzioni linearmente indipendenti, di autofunzioni* $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{k+r_k-1}$ *del nucleo* $\mathscr{K}(x, y)$ *e di autofunzioni* $\psi_k, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_{k+r_k-1}$ *del nucleo* $\mathscr{K}^*(x, y)$, *corrispondenti agli autovalori* λ_k *e* $\bar{\lambda}_k$ (r_k *è la molteplicità di* λ_k *e di* $\bar{\lambda}_k$).

Se $\lambda = \lambda_k$, *per la risolvibilità dell'equazione* (1) *è necessario e sufficiente che sia*

$$(f, \psi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r_k - 1. \tag{32}$$

Osservazione. Questo processo di riduzione dell'equazione integrale (1) alla (22) con un nucleo degenere indica che l'equazione (1) può essere approssimativamente risolta per qualunque λ nel seguente modo: 1) il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è approssimato mediante il polinomio $\mathscr{P}(x, y)$ (mediante un altro nucleo degenere); 2) per il piccolo nucleo $\mathscr{Q}(x, y) = \mathscr{K}(x, y) - \mathscr{P}(x, y)$, va costruito, in modo approssimato, il risolvente $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$, mediante il metodo del § 17.2; 3) viene composta l'equazione integrale (22) con nucleo degenere $\mathscr{T}(x, y; \lambda)$; 4) mediante il metodo del § 18.1, si costruisce la soluzione Φ dell'equazione (22) ed infine, 5) per mezzo della formula (21) si trova la soluzione φ dell'equazione (1).

5. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo polare. Estendiamo i teoremi di Fredholm alle equazioni integrali con nucleo polare (si veda il § 17.4)

$$\mathscr{K}(x, y) = \frac{\mathscr{H}(x, y)}{|x - y|^{\alpha}}, \quad \alpha < n,$$

dove $\mathscr{H}(x, y)$ è un nucleo continuo su $\bar{G} \times \bar{G}$ e G è una regione limitata.

Dimostriamo che, per ε positivo qualsiasi, esiste un nucleo degenere $\mathcal{P}(x, y)$ tale che

$$\max_{x\in\bar{G}} \int_G |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)|\, dy < \varepsilon, \tag{33}$$

$$\max_{x\in\bar{G}} \int_G |\mathcal{K}^*(x, y) - \mathcal{P}^*(x, y)|\, dy < \varepsilon. \tag{33*}$$

Infatti, il nucleo

$$\mathcal{L}(x, y) = \begin{cases} \mathcal{K}(x, y), & |x-y| \geqslant \frac{1}{N} \\ \mathcal{H}(x, y) N^{\alpha}, & |x-y| < \frac{1}{N}, \end{cases}$$

è continuo e, per N sufficientemente grande, si ha

$$\int_G |\mathcal{K}(x-y) - \mathcal{L}(x-y)|\, dy = \int_{|x-y|<\frac{1}{N}} |\mathcal{H}(x, y)| \left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha}} - N^{\alpha}\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|x-y|<\frac{1}{N}} \frac{|\mathcal{H}(x, y)|}{|x-y|^{\alpha}}\, dy \leqslant \max_{\bar{G}\times\bar{G}} |\mathcal{H}(x, y)| \int_{|x-y|<\frac{1}{N}} \frac{dy}{|x-y|^{\alpha}} =$$

$$= c \int_{|\xi|<\frac{1}{N}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha}} = c\sigma_n \int_0^{\frac{1}{N}} \rho^{n-1-\alpha}\, d\rho = \frac{c\sigma_n}{n-\alpha} \frac{1}{N^{n-\alpha}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \bar{G},$$

ed analogamente

$$\int_G |\mathcal{K}^*(x, y) - \mathcal{L}^*(x, y)|\, dy =$$

$$= \int_G |\mathcal{K}(y, x) - \mathcal{L}(y, x)|\, dy < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \bar{G}.$$

Approssimiamo il nucleo continuo $\mathcal{L}(x, y)$ mediante il nucleo degenere $\mathcal{P}(x, y)$ (si veda il § 18.3):

$$|\mathcal{L}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2V}, \quad x \in \bar{G}, \quad y \in \bar{G}.$$

Ne segue la possibilità di approssimare il nucleo polare $\mathcal{K}(x, y)$ mediante i nuclei degeneri nel senso delle (33)-(33*):

$$\max_{x\in\bar{G}} \int_G |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in\bar{G}} \int_G |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{L}(x, y)|\, dy +$$

$$+ \max_{x\in\bar{G}} \int_G |\mathcal{L}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)|\, dy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2V} \int_G dy = \varepsilon.$$

In modo analogo è anche stabilita la (33*).

Dunque, per ε positivo qualsiasi il nucleo polare $\mathscr{K}(x, y)$ è rappresentabile nella forma $\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{P}(x, y) + \mathscr{Q}(x, y)$ dove $\mathscr{P}(x, y)$ è un nucleo degenere e $\mathscr{Q}(x, y)$ un piccolo nucleo polare che soddisfa, in virtù delle (33)-(33*), le relazioni

$$\max_{x \in \bar{G}} \int_G |\mathscr{Q}(x, y)|\, dy < \varepsilon, \quad \max_{x \in \bar{G}} \int_G |\mathscr{Q}^*(x, y)|\, dy < \varepsilon.$$

Ripetendo ora i ragionamenti dei §§ 18.3, 18.4, ed utilizzando i risultati del § 17.4, sulla risolvibilità delle equazioni integrali con piccolo nucleo polare, concludiamo che *tutti i teoremi di Fredholm ed i loro corollari sono ancora validi per le equazioni integrali con nucleo polare.*

Notiamo che *tutte le autofunzioni di un nucleo polare* $\mathscr{K}(x, y)$ *appartenenti a* $\mathscr{L}_2(G)$ *appartengono a* $C(\bar{G})$.

Infatti, se $\varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0$, $\varphi_0 \in \mathscr{L}_2(G)$, si ha $\varphi_0 = \lambda_0^p K^p \varphi_0$. Ma per p sufficientemente grande il nucleo $\mathscr{K}_p(x, y)$ dell'operatore integrale K^p è continuo (si veda il § 17.4). Allora, conformemente al lemma del § 17.1, si ha $\varphi_0 = \lambda_0^p K^p \varphi_0 \in C(\bar{G})$, come si voleva dimostrare.

Osservazione. I teoremi di Fredholm restano validi anche per le equazioni integrali con nucleo polare su una superficie regolare a tratti limitata S:

$$\varphi(x) = \lambda \int_S \frac{\mathscr{H}(x, y)}{|x - y|^\alpha} \varphi(y)\, dS_y + f(x),$$

dove il nucleo $\mathscr{H}(x, y)$ è uniformemente continuo su $S \times S$ e l'esponente α è più piccolo delle dimensioni della superficie S (si veda Petrovskij [2], § 8).

6. Esercizi. a) Dimostrare che se $\mathscr{K}(t)$ è una funzione continua di periodo 2π e se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{K}(t)\, e^{ikt}\, dt \neq 0, \quad k \text{ è un intero,}$$

allora

$$\lambda_k = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{K}(t)\, e^{ikt}\, dt} \quad \text{e} \quad \varphi_k(x) = e^{-ikx}$$

sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathscr{K}(x - y)$, $-\pi < x, y < \pi$.

b) Dimostrare che se $\mathscr{K}(t)$ è una funzione (assolutamente) integrabile su R^1 e se $F[\mathscr{K}](\mu) \neq 0$, allora

$$\lambda = \frac{1}{F[\mathscr{K}](\mu)} \quad \text{e} \quad \varphi(x) = e^{-i\mu x}$$

è l'autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathscr{K}(x - y)$, $-\infty < x, y < \infty$.

c) Dimostrare che $\lambda = \sqrt{2/\pi}$ è l'autovalore del nucleo $\cos(xy)$, $0 < x, y < \infty$ a cui corrispondono le autofunzioni

$$\varphi(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xy) f(y)\, dy,$$

dove $f(x)$ è una qualunque funzione appartenente a $\mathscr{L}_2(0, \infty)$.

Notiamo che, per le equazioni integrali con nuclei degli esempi b) e c), i teoremi di Fredholm non sono validi (le regioni d'integrazione in queste equazioni sono illimitate!).

§ 19. *Equazioni integrali con nucleo hermitiano*

Un nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è detto *hermitiano* se questo nucleo coincide con il coniugato hermitiano, $\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{K}^*(x, y)$.

La corrispondente equazione integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x, y) \varphi(y)\, dy + f(x) \tag{1}$$

per λ reali coincide con la sua aggiunta, essendo $K^* = K$. Conviene considerare quest'equazione nello spazio $\mathscr{L}_2(G)$.

1. Operatori integrali con nucleo continuo hermitiano. Supponiamo che K sia un operatore integrale con nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$. Quest'operatore trasferisce $\mathscr{L}_2(G)$ (G è una regione limitata) in $\mathscr{L}_2(G)$ (si veda il § 17.1) ed è hermitiano (si veda il § 17.2, il § 1.12):

$$(Kf, g) = (f, Kg), \quad f, g \in \mathscr{L}_2(G) = \mathscr{M}_K. \tag{2}$$

Inversamente, se un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathscr{K}(x, y)$ è hermitiano, questo nucleo è hermitiano.

Infatti, dall'uguaglianza (2) segue che il nucleo $\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{K}^*(x, y)$ è hermitiano (si veda il § 17.1).

Dalla formula (22) del § 17.2, segue che *tutti i nuclei iterati $\mathscr{K}_p(x, y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$ sono auch'essi hermitiani*:

$$\mathscr{K}_p^*(x, y) = (\mathscr{K}^*)_p(x, y) = \mathscr{K}_p(x, y).$$

Lemma. *Un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathscr{K}(x, y)$ trasferisce ogni insieme limitato appartenente a $\mathscr{L}_2(G)$ in un insieme limitato in $C(\bar{G})$ e costituito da funzioni equicontinue* [1] *su $\bar{G}$.*

Dimostrazione. Sia B un insieme limitato in $\mathscr{L}_2(G)$: $\| f \| \leqslant A$, $f \in B$. Conformemente al lemma del § 17.1, l'operatore K trasferisce l'insieme B in un insieme limitato in $C(\bar{G})$: $\| Kf \|_C \leqslant M\sqrt{V}$, A, $f \in B$. Inoltre, visto che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è uniformemente continuo

[1] La definizione di un insieme di funzioni equicontinue è data nel § 1.3.

su $\bar{G} \times \bar{G}$, per un ε positivo qualsiasi esiste un numero δ positivo tale che

$$|\mathscr{K}(x', y) - \mathscr{K}(x'', y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{V}\sqrt{V}A},$$

quando $|x' - x''| < \delta$, x', x'' ed $y \in \bar{G}$. Da ciò, utilizzando la disuguaglianza (4) del § 17.1, in cui $\mathscr{K}(x, y)$ è sostituito con $\mathscr{K}(x', y) - \mathscr{K}(x'', y)$, per tutte le $f \in B$ si ottiene

$$|(Kf)(x') - (Kf)(x'')| =$$

$$= \left| \int_{\bar{G}} [\mathscr{K}(x', y) - \mathscr{K}(x'', y)] f(y)\, dy \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{V}\sqrt{V}A} \sqrt{V}\, \|f\| \leqslant \varepsilon,$$

quando $|x' - x''| < \delta$, x' $x'' \in \bar{G}$. Ciò vuol dire che l'insieme $\{(Kf)(x), f \in B\}$ consiste di funzioni equicontinue su $\bar{G}$. Il lemma è dimostrato.

2. Lemma di Arzelà-Ascoli. *Se un insieme infinito B è limitato in $C(K)$ dove K è un compatto, ed è composto da funzioni equicontinue su K, da quest'insieme si può scegliere una successione convergente in $C(K)$.*

Dimostrazione. Come è noto, l'insieme di punti con coordinate razionali è numerabile. Perciò tutti questi punti dell'insieme K possono essere numerati: $x_1, x_2, \ldots$ Per ipotesi, l'insieme di numeri $\{f(x_1), f \in B\}$ è limitato. Qui sono possibili due casi.

1) Quest'insieme è infinito. Utilizzando il teorema di Bolzano-Weierstrass (si veda il § 1.1), scegliamo da quest'insieme una successione convergente $f_k^{(1)}(x_1)$, $k = 1, 2, \ldots$

2) Quest'insieme è finito. In questo caso esiste una successione di funzioni $f_k^{(1)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, che assumono nel punto x_1 lo stesso valore.

Inoltre, visto che l'insieme di numeri $\{f_k^{(1)}(x_2), k = 1, 2, \ldots\}$ è limitato, scegliamo da quest'insieme, mediante il metodo descritto sopra, una sottosuccessione convergente $f_k^{(2)}(x_2)$, $k = 1, 2, \ldots$, ecc.

Consideriamo ora una successione diagonale $f_k(x) = f_k^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, di funzioni dell'insieme B. Per un qualunque punto x_i la successione numerica $f_k(x_i)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge poiché, per costruzione, per $k \geqslant i$, questa successione è contenuta nella successione convergente $f_k^{(i)}(x_i)$, $k = 1, 2, \ldots$

Dimostriamo ora che la successione di f_k, $k = 1, 2, \ldots$, è uniformemente convergente su K. Supponiamo che sia $\varepsilon > 0$. Visto che questa successione consiste di funzioni equicontinue su K, esiste un numero δ tale che per $k = 1, 2, \ldots$, si ha

$$|f_k(x) - f_k(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

quando $|x - x'| < \delta$, x e $x' \in K$. Essendo K un insieme limitato, dall'insieme di punti $x_1, x_2, \ldots$ si possono scegliere un numero finito di questi punti: $x_1, x_2, \ldots, x_l$, $l = l(\varepsilon)$, in modo che, per ogni

punto $x \in K$, esista un punto x_i, $1 \leqslant i \leqslant l$, tale che $|x - x_i| < \delta$. Ricordando che la successione di $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge ai punti $x_1, x_2, \ldots, x_l$, concludiamo che esiste un numero $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$|f_k(x_i) - f_p(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k, p \geqslant N, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{4}$$

Sia ora x un punto arbitrario dell'insieme K. Scegliendo un punto x_i, $1 \leqslant i \leqslant l$, tale che $|x - x_i| < \delta$, in virtù delle (3) e (4) si ottiene

$$|f_k(x) - f_p(x)| \leqslant |f_k(x) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_p(x_i)| + \\ + |f_p(x_i) - f_p(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad k, p \geqslant N,$$

dove N non dipende da x. Ciò significa che la successione di f_k, $k = 1, 2, \ldots$, converge in se stessa in $C(K)$. Conformemente al teorema di Cauchy, (si veda il § 1.3), questa successione converge in $C(K)$ ad una funzione appartenente a $C(K)$. Il lemma è dimostrato.

Osservazione. Il lemma di Arzelà-Ascoli esprime la proprietà di *compattezza* di un qualunque insieme limitato in $C(K)$ composto di funzioni equicontinue su K. Il lemma del § 19.1 afferma che un operatore integrale con nucleo continuo trasferisce ogni insieme limitato da $\mathcal{L}_2(G)$ in un insieme compatto in $C(\bar{G})$. Ogni operatore che possiede questa proprietà è detto *completamente continuo* (compatto) da $\mathcal{L}_2(G)$ in $C(\bar{G})$.

3. Equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano. Non tutti i nuclei che non sono identicamente nulli, hanno autovalori; per esempio, come è stato mostrato nel § 17.3 i nuclei di Volterra non hanno autovalori. Tuttavia, è valido il seguente

Teorema. *Ogni nucleo continuo hermitiano* $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ *ha almeno un autovalore e l'autovalore* λ_1 *più piccolo in modulo soddisfa il principio variazionale*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(G)} \frac{\|Kf\|}{\|f\|}. \tag{5}$$

Dimostrazione. Denotiamo con ν la frontiera superiore esatta del funzionale $\|Kf\|$ sull'insieme di funzioni f, appartenenti a $\mathcal{L}_2(G)$, con norma unitaria:

$$\nu = \sup_{\|f\|=1} \|Kf\|. \tag{6}$$

Dalla (6) del § 17.1, segue che $\|Kf\| \leqslant MV$ sulle funzioni di quest'insieme e quindi $\nu \leqslant MV$. È inoltre evidente che $\nu \geqslant 0$. Dimostriamo che $\nu > 0$. Di fatti, se $\nu = 0$, allora, in virtù della (6), avremmo $\|Kf\| = 0$, cioè $Kf = 0$ per tutte le $f \in \mathcal{L}_2(G)$, e quindi

$\mathscr{K}(x, y) \equiv 0$, $x \in G$, $y \in G$ (si veda il § 17.1), il che contraddice l'ipotesi.

Dalla definizione di frontiera superiore esatta ν segue l'esistenza di una successione di f_k, $k = 1, 2, \ldots$, $\| f_k \| = 1$, tale che

$$\| Kf_k \| \to \nu, \quad k \to \infty; \tag{7}$$

inoltre, è valida la disuguaglianza

$$\| K^2 f \| = \left\| K\left(\frac{Kf}{\| Kf \|}\right) \right\| \| Kf \| \leqslant \nu \| Kf \|, \quad f \in \mathscr{L}_2(G). \tag{8}$$

Dimostriamo ora che

$$K^2 f_k - \nu^2 f_k \to 0, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{L}_2(G). \tag{9}$$

Infatti, utilizzando le (2), (8) e (7), si ottiene

$$\begin{aligned}
\| K^2 f_k - \nu^2 f_k \|^2 &= (K^2 f_k - \nu^2 f_k,\ K^2 f_k - \nu^2 f_k) = \\
&= (K^2 f_k,\ K^2 f_k) + \nu^4 (f_k,\ f_k) - \nu^2 (f_k,\ K^2 f_k) - \nu^2 (K^2 f_k,\ f_k) = \\
&= \| K^2 f_k \|^2 + \nu^4 - 2\nu^2 (Kf_k,\ Kf_k) \leqslant \nu^2 \| Kf_k \|^2 + \\
&\quad + \nu^4 - 2\nu^2 \| Kf_k \|^2 = \nu^4 - \nu^2 \| Kf_k \|^2 \to 0, \quad k \to \infty,
\end{aligned}$$

il che è equivalente alla relazione limite (9).

Conformemente al lemma del § 19.1, la successione delle funzioni Kf_k, $k = 1, 2, \ldots$, è limitata in $C(\bar{G})$ e consiste di funzioni equicontinue su $\bar{G}$. Ma in questo caso, in base al lemma di Arzelà-Ascoli (si veda il § 19.2), esiste anche una sottosuccessione $\psi_i = Kf_{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, che converge in $C(\bar{G})$ ad una funzione $\psi \in C(\bar{G})$, $\| \psi - \psi_i \|_C \to 0$, $i \to \infty$. Da ciò, utilizzando le (4) e (5) del § 17.1, e la relazione (9), si ottiene

$$\begin{aligned}
&\| K^2 \psi - \nu^2 \psi \|_C \leqslant \\
&\quad \leqslant \| K^2 (\psi - \psi_i) \|_C + \nu^2 \| \psi - \psi_i \|_C + \| K^2 \psi_i - \nu^2 \psi_i \|_C \leqslant \\
&\quad \leqslant MV \| K(\psi - \psi_i) \|_C + \nu^2 \| \psi - \psi_i \|_C + \| K(K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}) \|_C \leqslant \\
&\quad \leqslant (M^2 V^2 + \nu^2) \| \psi - \psi_i \|_C + M\sqrt{V} \| K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i} \| \to 0, \ i \to \infty,
\end{aligned}$$

e, come conseguenza,

$$K^2 \psi = \nu^2 \psi.$$

Dimostriamo che $\psi \neq 0$. Dalla relazione limite (9) segue che

$$K\psi_i - \nu^2 f_{k_i} \to 0, \ i \to \infty \text{ in } \mathscr{L}_2(G),$$

e, di conseguenza, $\| K\psi_i \| \to \nu^2$, $i \to \infty$. D'altra parte, dal lemma del § 17.1 segue che $\| K\psi_i \| \to \| K\psi \|$, $i \to \infty$. Quindi, $\| K\psi \| = \nu^2 > 0$, da cui segue che $\psi \neq 0$.

Dunque, la funzione ψ costruita è un'autofunzione del nucleo $\mathscr{K}_2(x, y)$ corrispondente all'autovalore $1/\nu^2$. Ma, allora, almeno uno

dei numeri $\pm 1/\nu$ è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ (si veda il § 18.4). In tal modo, l'autovalore λ_1 costruito è uguale a $1/\nu$ in modulo e, quindi, in virtù della (6), soddisfa il principio variazionale (5).

Non resta altro che stabilire che λ_1 è l'autovalore più piccolo in modulo del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$. Infatti, se λ_0 e φ_0 sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione, cioè $\lambda_0 K\varphi_0 = \varphi_0$, allora, in virtù della (5), si ha

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in \mathscr{L}_2(G)} \frac{\|Kf\|}{\|f\|} \geqslant \frac{\|K\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

e quindi $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_0|$. Il teorema è dimostrato.

Come è stato stabilito nel § 19.1, un operatore integrale K con nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$ è anch'esso hermitiano. Conformemente al teorema del § 1.12, gli autovalori del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ sono reali, e le autofunzioni, corrispondenti a differenti autovalori, sono ortogonali. Inoltre, secondo il quarto teorema di Fredholm l'insieme degli autovalori di un nucleo simile non è altro che numerabile, mentre conformemente al secondo teorema di Fredholm la molteplicità di ogni autovalore è finita. Pertanto il sistema di autofunzioni di un operatore K non è altro che numerabile e questo sistema può essere scelto ortonormale (cfr. il 1.12).

Considerando il teorema sopra dimostrato ed i teoremi di Fredholm (si veda il § 18.3), per le equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x, y) \not\equiv 0$, si ottengono le seguenti asserzioni:

L'insieme di autovalori $\{\lambda_k\}$ *non è vuoto, è situato sull'asse reale, non ha punti limite finiti; ogni autovalore è di molteplicità finita ed il sistema di autofunzioni* $\{\varphi_k\}$ *può essere scelto ortonormale*:

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}. \tag{10}$$

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *l'equazione* (1) *è univocamente risolvibile per un termine noto* $f \in C(\bar{G})$ *qualsiasi. Se* $\lambda = \lambda_k$, *per la risolvibilità dell'equazione* (1) *è necessario e sufficiente che*

$$(f, \varphi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r_k - 1, \tag{11}$$

dove $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{k+r_k-1}$ *sono autofunzioni corrispondenti all'autovalore* λ_k *e* r_k *è la molteplicità di* λ_k.

4. Equazioni integrali con nucleo polare hermitiano. *Tutti i risultati ottenuti nel* § 19.3, *per le equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano, sono validi anche per le equazioni integrali con nucleo polare hermitiano.*

Infatti, per queste equazioni integrali sono validi i teoremi di Fredholm ed i loro corollari (si veda il § 18.5).

Inoltre, per un nucleo polare hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$ tutti i nuclei iterati $\mathscr{K}_p(x, y)$ sono hermitiani e polari e, per $p \geqslant p_0 = [n/(n - \alpha)] + 1$, questi nuclei sono continui (si veda il § 17.4).

Non resta altro che estendere il teorema del § 19.3, ai nuclei polari hermitiani $\mathscr{K}(x, y) \not\equiv 0$. Introduciamo la notazione

$$\nu = \sup_{\|f\|=1} \|Kf\|. \tag{12}$$

Allora, in virtù del fatto che $\mathscr{K}(x, y) \not\equiv 0$ e della disuguaglianza (31) del § 17.4, si ha $0 < \nu \leqslant N = N^*$. Come nella dimostrazione del teorema del § 19.3 dalla (12) segue che esiste una successione di f_k, $k = 1, 2, \ldots$, $\|f_k\| = 1$, tale che

$$K^2 f_k - \nu^2 f_k \to 0, \quad k \to \infty \quad \text{in } \mathscr{L}_2(G).$$

Da ciò, applicando la disuguaglianza (31) del § 17.4, per $p = 1, 2, \ldots$ si ottiene

$$\|K^{2p} f_k - \nu^{2p} f_k\| = \|(K^{2p-2} + \nu^2 K^{2p-4} + \ldots + \nu^{2p-2} I)(K^2 f_k - \nu^2 f_k)\| \leqslant$$
$$\leqslant (N^{2p-2} + \nu^2 N^{2p-4} + \ldots + \nu^{2p-2}) \|K^2 f_k - \nu^2 f_k\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

cioè

$$K^{2p} f_k - \nu^{2p} f_k \to 0, \quad k \to \infty \quad \text{in} \quad \mathscr{L}_2(G). \tag{13}$$

Ma per $2p \geqslant p_0$ il nucleo $\mathscr{K}_{2p}(x, y)$ è continuo. Per questa ragione, come nella dimostrazione del teorema del § 19.3, dalla relazione limite (13) segue che $1/\nu^{2p}$ è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}_{2p}(x, y)$. Ma allora, visto che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è hermitiano, tutti i suoi autovalori sono reali, almeno uno dei numeri $\pm 1/\nu$ è l'autovalore λ_1 di questo nucleo (si veda il § 18.4). Da ciò e dalla (12) segue che il principio variazionale (5) è anche valido per l'autovalore λ_1. Evidentemente, λ_1 è l'autovalore più piccolo in modulo del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$. Questo completa l'estensione del teorema del § 19.3, ai nuclei polari hermitiani.

§ 20. *Teorema di Hilbert-Schmidt e suoi corollari*

1. Teorema di Hilbert-Schmidt per un nucleo continuo hermitiano. Supponiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ siano gli autovalori del nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x, y) \not\equiv 0$ disposti in ordine di crescita del loro modulo, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$, e che $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ siano le corrispondenti autofunzioni ortonormali, $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}$.

Come sappiamo, gli autovalori λ_k sono reali e le autofunzioni $\varphi_k(x)$ sono continue su $\bar{G}$; in questo caso l'insieme $\{\lambda_k\}$ è finito o numerabile; nell'ultimo caso si ha $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Inoltre, in virtù del teorema del § 19.3, è valida la disuguaglianza

$$\|Kf\| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|} \|f\|, \quad f \in \mathscr{L}_2(G). \tag{1}$$

Notiamo un'altra disuguaglianza, e cioè [1]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leqslant \int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2 dy, \quad x \in \bar{G}. \tag{2}$$

[1] Se il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ ha un numero finito di autovalori, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, poniamo $\lambda_k = \infty$ per $k > N$.

(Nel seguito, nel § 20, sarà mostrato che, nella disuguaglianza (2), sia soddisfatto il segno di uguaglianza.)

La disuguaglianza (2) per un x appartenente a $\bar{G}$ rappresenta una disuguaglianza di Bessel (si veda il § 1.8) per la funzione $\overline{\mathscr{K}}(x, y)$, i cui coefficienti di Fourier, in termini del sistema ortonormale $\{\varphi_k(y)\}$, sono uguali a

$$(\overline{\mathscr{K}}, \varphi_k) = \int_{\bar{G}} \overline{\mathscr{K}}(x, y)\, \bar{\varphi}_k(y)\, dy = \overline{K\varphi_k} = \frac{1}{\lambda_k}\, \bar{\varphi}_k(x).$$

Introduciamo ora una successione di nuclei continui hermitiani

$$\mathscr{K}^{(p)}(x, y) = \mathscr{K}(x, y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\, \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

I corrispondenti operatori integrali $K^{(p)}$ hermitiani sono soggetti alla formula

$$K^{(p)} f = Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i}\, \varphi_i, \quad f \in \mathscr{L}_2(G). \tag{4}$$

Dimostriamo che $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots$, e $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \ldots$ *costituiscono tutti gli autovalori e tutte le autofunzioni del nucleo* $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$.

Infatti, in virtù della (4) abbiamo

$$K^{(p)}\varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i}\, \varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\, \varphi_k, \quad k \geqslant p+1,$$

di modo che λ_k e φ_k, $k \geqslant p+1$, siano autovalori ed autofunzioni del nucleo $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$. Inversamente, siano λ_0 e φ_0 un autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$, e cioè, in virtù della (4), si avrà

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)}\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i}\, \varphi_i. \tag{5}$$

Di qui per $k = 1, 2, \ldots, p$ si ottiene

$$(\varphi_0, \varphi_k) = \lambda_0 (K\varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} =$$

$$= \lambda_0 (\varphi_0, K\varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i}\, \delta_{ik} =$$

$$= \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) = 0,$$

e quindi, in virtù della (5), $\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0$. Dunque, λ_0 e φ_0 sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$.

Visto che φ_0 è ortogonale a tutte le autofunzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, ne segue che λ_0 coincide con uno degli autovalori $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots$ e φ_0 può essere considerata uguale a φ_k per $k \geqslant p+1$.

Dunque, λ_{p+1} è il più piccolo autovalore in modulo del nucleo $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$. Applicando la disuguaglianza (1) a questo nucleo e tenendo conto della (4), si ottiene la disuguaglianza

$$\| K^{(p)} f \| = \| Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \| \leqslant \frac{\| f \|}{| \lambda_{p+1} |}, \quad f \in \mathscr{L}_2(G), \quad p = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Supponiamo che un nucleo hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$ abbia un numero finito di autovalori: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Da quanto abbiamo dimostrato, il nucleo hermitiano $\mathscr{K}^{(N)}(x, y)$ non ha autovalori, e quindi, in base al teorema del § 19.3, si ha $\mathscr{K}^{(N)}(x, y) \equiv 0$, in modo che, in virtù della (3), si ha

$$\mathscr{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}, \tag{7}$$

il che significa che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è degenere.

Da ciò, e ricordando anche che un nucleo degenere ha sempre un numero finito di autovalori (si veda il § 18.2), formuliamo il seguente risultato: *affinché un nucleo continuo hermitiano sia degenere, è necessario e sufficiente che questo nucleo abbia un numero finito di autovalori.*

Diremo che una funzione $f(x)$ è originalmente rappresentabile in termini del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ se esiste una funzione $h \in \mathscr{L}_2(G)$ tale che

$$f(x) = \int_G \mathscr{K}(x, y) h(y) \, dy, \quad x \in G. \tag{8}$$

Teorema di Hilbert-Schmidt. *Se una funzione $f(x)$ è originalmente rappresentabile in termini di un nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$, cioè $f = Kh$, la sua serie di Fourier nelle autofunzioni del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è regolarmente (e, quindi, uniformemente) convergente su $\overline{G}$ a questa funzione:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x). \tag{9}$$

Dimostrazione. Visto che $f = Kh$, $h \in \mathscr{L}_2(G)$, in base al lemma del § 17.1, $f \in C(\overline{G})$ ed i coefficienti di Fourier delle funzioni f e h in termini delle autofunzioni $\{\varphi_k\}$ del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ sono collegate con la relazione

$$(f, \varphi_k) = (Kh, \varphi_k) = (h, K\varphi_k) = \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}. \tag{10}$$

Se il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ ha un numero finito di autovalori, si ha, in virtù della (7),

$$f(x) = Kh = \sum_{k=1}^{N} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ed il teorema di Hilbert-Schmidt è dimostrato.

Supponiamo ora che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ abbia un numero infinito di autovalori. In questo caso $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Perciò, in virtù delle (6) e (10), la serie (9) converge a f in $\mathscr{L}_2(G)$:

$$\left\| f - \sum_{p=1}^{p} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| = \left\| Kh - \sum_{k=1}^{p} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k \right\| \leqslant \frac{\| h \|}{|\lambda_{p+1}|} \to 0 \quad p \to \infty.$$

Resta da dimostrare che la serie (9) converge in modo regolare su $\bar{G}$. Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij e la (2), si ottiene, per tutti i valori di p e q,

$$\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)| \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \leqslant \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=p}^{q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2 \, dy \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant M \sqrt{V} \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \bar{G}. \qquad (11)$$

In virtù della disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, \varphi_k)|^2 \leqslant \| h \|^2,$$

il primo membro della disuguaglianza (11) tende a zero per $p, q \to \infty$. Ciò significa che la serie (9) è regolarmente convergente su $\bar{G}$. Il teorema è dimostrato.

Riportiamo alcuni corollari del teorema di Hilbert-Schmidt.

2. Sviluppo bilineare dei nuclei iterati. Dimostriamo che *un nucleo iterato $\mathscr{K}_p(x, y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$ può essere sviluppato in una serie bilineare in termini delle autofunzioni di questo nucleo,*

$$\mathscr{K}_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k^p}, \quad p = 2, 3, \ldots \qquad (12)$$

e la serie è regolarmente convergente su $\bar{G} \times \bar{G}$.

In virtù della formula (17) del § 17.2, per ogni $y \in \bar{G}$ il nucleo $\mathscr{K}_p(x, y)$ è originalmente rappresentabile in termini del nucleo $\mathscr{K}(x, y')$ e quindi, in base al teorema di Hilbert-Schmidt, esso può essere sviluppato in una serie di Fourier regolarmente convergente rispetto alle autofunzioni di questo nucleo:

$$\mathscr{K}_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathscr{K}_p(x, y), \varphi_k)\, \varphi_k(x).$$

Visto che il nucleo $\mathscr{K}_p(x, y)$ è hermitiano, abbiamo

$$(\mathscr{K}_p(x, y), \varphi_k) = \int_G \mathscr{K}_p(x, y)\, \overline{\varphi}_k(x)\, dx =$$

$$= \int_G \overline{\mathscr{K}}_p(y, x)\, \overline{\varphi}_k(x)\, dx = \overline{(K^p \varphi_k)}(y) = \frac{\overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k^p}, \quad p \geqslant 1. \quad (13)$$

Dunque, l'uguaglianza (12) è dimostrata e la serie della (12) è regolarmente convergente in $x \in \bar{G}$ per ogni $y \in \bar{G}$.

In particolare, ponendo nella formula (12) $p = 2$, $x = y$ e tenendo conto del fatto che, in virtù della (17) del § 17.2, si ha

$$\mathscr{K}_2(x, x) = \int_G \mathscr{K}(x, y')\, \mathscr{K}(y', x)\, dy' =$$

$$= \int_G \mathscr{K}(x, y')\, \overline{\mathscr{K}}(x, y')\, dy' = \int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2\, dy,$$

si ottiene l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2\, dy. \quad (14)$$

Dal lemma di Dini (si veda il § 1.3) segue che la serie (14) è uniformemente convergente su $\bar{G}$. Da ciò, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)\, \overline{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k^p} \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|^{p-2}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

concludiamo che la serie (12) è regolarmente convergente su $\bar{G} \times \bar{G}$.

Integrando termine a termine la serie uniformemente convergente (14) e tenendo conto della normalizzazione delle autofunzioni, si ottiene la formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_G \int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2\, dx\, dy. \quad (15)$$

3. Sviluppo bilineare di un nucleo continuo hermitiano. Esaminiamo la convergenza della serie (12) per $p = 1$, dimostriamo cioè

che *un nucleo continuo hermitiano* $\mathscr{K}(x, y)$ *può essere sviluppato in una serie bilineare rispetto alle sue autofunzioni*

$$\mathscr{K}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k}, \tag{16}$$

convergente uniformemente in $\mathscr{L}_2(G)$ *rispetto a* $y \in \overline{G}$, *e cioè*

$$\left\| \mathscr{K}(x, y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right\| \overset{y \in \overline{G}}{\Longrightarrow} 0, \quad p \to \infty. \tag{17}$$

L'uguaglianza (13), per $p = 1$, mostra che, per ogni $y \in \overline{G}$, i coefficienti di Fourier del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ in termini del sistema ortonormale $\{\varphi_k(x)\}$ sono uguali a $\overline{\varphi}_k(y)/\lambda_k$. Perciò, applicando la formula (16) del § 1.8, si ottiene l'uguaglianza

$$\left\| \mathscr{K}(x, y) - \sum_{k=1} \frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right\|^2 =$$

$$= \int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2\,dx - \sum_{k=1}^{p} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2}, \quad y \in \overline{G},$$

da cui, in virtù della convergenza uniforme della serie (14), concludiamo che la serie bilineare (16) converge al nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ nel senso della (17).

Dalla (17) segue, in particolare, che la serie (16) converge al nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ in $\mathscr{L}_2(G \times G)$, e cioè

$$\int_G \int_G \left| \mathscr{K}(x, y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right|^2 dx\,dy \to 0, \quad p \to \infty. \tag{18}$$

Per una forma bilineare (Kf, g) dimostriamo la formula

$$(Kf, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)\,\overline{(g, \varphi_k)}}{\lambda_k}, \quad f, g \in \mathscr{L}_2(G). \tag{19}$$

Di fatti, visto che $f \in \mathscr{L}_2(G)$, abbiamo, in base al teorema di Hilbert-Schmidt,

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ed inoltre, questa serie è uniformemente convergente su $\overline{G}$. Moltiplicando questa serie per una funzione $\overline{g}$ appartenente a $\mathscr{L}_2(G)$ (e, di conseguenza, una funzione che è assolutamente integrabile su $\overline{G}$, si veda il § 1.7), ed integrando a membro a membro questa serie ri-

spetto alla regione G, si ottiene la formula (19)

$$(Kf,\ g)=\int_G Kf\bar{g}\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,\ \varphi_k)}{\lambda_k}\int_G \varphi_k(x)\,\bar{g}(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,\ \varphi_k)\,\overline{(g,\ \varphi_k)}}{\lambda_k}.$$

Ponendo nella formula (19) $f = g$, si ottiene una rappresentazione della forma quadratica $(Kf,\ f)$ nella forma

$$(Kf,\ f)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|(f,\ \varphi_k)|^2}{\lambda_k},\qquad f\in\mathcal{L}_2(G). \tag{20}$$

La formula (20) rappresenta una generalizzazione della formula di riduzione agli assi principali della forma quadratica con un numero finito di variabili.

4. Soluzione di un'equazione integrale non omogenea con nucleo continuo hermitiano. Costruiamo la soluzione dell'equazione integrale non omogenea

$$\varphi=\lambda K\varphi+f \tag{21}$$

con nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x,\ y)$.

Se $\lambda\neq\lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *e* $f\in C(\bar{G})$, *la soluzione* (*unica*) φ *dell'equazione integrale* (21) *può essere rappresentata nella forma di una serie che è uniformemente convergente su* $\bar{G}$ (*formula di Schmidt*).

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,\ \varphi_k)}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x)+f(x). \tag{22}$$

Infatti, per $\lambda\neq\lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, una soluzione dell'equazione (21) esiste ed è unica in $C(\bar{G})$ per un termine noto $f\in C(\bar{G})$ qualsiasi (si veda il § 18.3). Per il teorema di Hilbert-Schmidt la funzione $K\varphi$ può essere sviluppata in una serie di Fourier uniformemente convergente in termini delle autofunzioni del nucleo $\mathscr{K}(x,\ y)$. Si ha quindi

$$\varphi=\lambda K\varphi+f=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\ \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k+f. \tag{23}$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier $(\varphi,\ \varphi_k)$. Dall'equazione (21) abbiamo

$$(\varphi,\ \varphi_k)=\lambda(K\varphi,\ \varphi_k)+(f,\ \varphi_k)=$$

$$=\lambda(\varphi,\ K\varphi_k)+(f,\ \varphi_k)=\frac{\lambda}{\lambda_k}(\varphi,\ \varphi_k)+(f,\ \varphi_k)$$

e, di conseguenza,

$$(\varphi,\ \varphi_k)=\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}(f,\ \varphi_k),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

da cui, in virtù della (23), segue la formula di Schmidt (22).

Conformemente al teorema di Hilbert-Schmidt si ha

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ed inoltre la serie è uniformemente convergente su $\bar{G}$. Perciò la formula di Schmidt (22) assume la seguente forma:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x) + f(x) =$$

$$= \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y)\, dy + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x) + f(x). \quad (24)$$

Inoltre, dalla convergenza regolare della serie bilineare (12), per $p = 2$, segue la convergenza regolare della serie bilineare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}$$

e la sua somma è una funzione continua rispetto a $x \in \bar{G}$, $y \in \bar{G}$, $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, e meromorfa rispetto a λ con poli semplici λ_k. Di conseguenza, per $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, nella formula (24) si può invertire l'ordine di sommatoria e d'integrazione, ottenendo come risultato

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \left[\mathcal{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \right] f(y)\, dy + f(x). \quad (25)$$

D'altra parte, secondo il teorema del § 17.2, per λ piccoli, la soluzione dell'equazione (21) può essere espressa in termini del risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$, mediante la formula (20) del § 17.2. Di conseguenza,

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \mathcal{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}. \quad (26)$$

Dunque, il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ ammette un prolungamento meromorfo in tutto il piano della variabile complessa λ con poli semplici λ_k e con residui uguali a

$$-\sum_{i=0}^{r_k - 1} \varphi_{k+i}(x)\, \overline{\varphi}_{k+i}(y), \quad (27)$$

dove φ_k, φ_{k+1}, φ_{k+r_k-1} sono le autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ corrispondenti a λ_k, e r_k è la molteplicità di λ_k (si veda l'osservazione del § 17.2).

Utilizzando l'uguaglianza (16), riscriviamo la formula (26) come segue:

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k - \lambda}, \tag{28}$$

e la serie bilineare converge in $\mathscr{L}_2(G \times G)$ (si veda il § 20.3).

Osservazione. La formula (22) resta anche valida per $\lambda = \lambda_j$ se, conformemente al terzo teorema di Fredholm, si ha

$$(f, \varphi_{j+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r_j - 1.$$

In questo caso la soluzione dell'equazione (21) non è unica e la sua soluzione generale, secondo la formula (38) del § 1.11, è data dalla formula

$$\varphi(x) = \lambda_j \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda_j} \varphi_k(x) + f(x) + \sum_{i=0}^{r_j - 1} c_i \varphi_{j+i}(x), \tag{29}$$

dove c_i sono costanti arbitrarie.

5. Nuclei definiti positivi. Un nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è detto *definito positivo* se il corrispondente operatore K è *positivo* (si veda il § 1.12), e cioè:

$$(Kf, f) \geqslant 0, \quad f \in \mathscr{L}_2(G).$$

Ogni nucleo definito positivo $\mathscr{K}(x, y)$ è hermitiano.

Infatti, dato che l'operatore K è hermitiano (si veda il § 1.12), anche il suo nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è hermitiano (si veda il § 19.1).

Affinché un nucleo continuo hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$ sia definito positivo, è necessario e sufficiente che tutti i suoi autovalori λ_k siano positivi.

Infatti, se $\lambda_k > 0$, in virtù della (20) si ha $(Kf, f) \geqslant 0$, $f \in \mathscr{L}_2(G)$, in modo che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è definito positivo. Inversamente, se il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è definito positivo, si ha

$$\frac{1}{\lambda_k} = (K\varphi_k, \varphi_k) \geqslant 0, \text{ cioè } \lambda_k > 0.$$

Se $\mathscr{K}(x, y)$ è un nucleo continuo definito positivo, è valido il seguente principio variazionale:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in \mathscr{L}_2(G) \\ (f, \varphi_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k-1}} \frac{(Kf, f)}{\|f\|^2} \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

ed il supremum *nella* (30) *è ottenuto su una qualunque autofunzione corrispondente all'autovalore λ_k.*

Infatti, utilizzando la formula (20) e tenendo conto delle disuguaglianze $\lambda_i \geqslant \lambda_k > 0$, $i \geqslant k$, per tutte le $f \in \mathscr{L}_2(G)$ tali che

$(f,\ \varphi_i) = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1$, si ottiene

$$\frac{(Kf,\ f)}{\|f\|^2} = \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(f,\ \varphi_i)|^2}{\lambda_i} \leqslant \frac{1}{\lambda_k \|f\|^2} \sum_{i=k}^{\infty} |(f,\ \varphi_i)|^2,$$

e, quindi, in virtù della disuguaglianza di Bessel, è valida la seguente disuguaglianza:

$$\frac{(Kf,\ f)}{\|f\|^2} \leqslant \frac{1}{\lambda_k}. \tag{31}$$

D'altra parte, per $f = \varphi_k$ abbiamo

$$\frac{(K\varphi_k,\ \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}. \tag{32}$$

La disuguaglianza (31) e l'uguaglianza (32) stabiliscono la validità del principio variazionale (30).

Ponendo nella (30) $k = 1$, si ottiene

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(G)} \frac{(Kf,\ f)}{\|f\|^2}. \tag{33}$$

6. Estensione della teoria di Hilbert-Schmidt alle equazioni integrali con nucleo polare hermitiano. *Il teorema di Hilbert-Schmidt ed i suoi corollari*, stabiliti in questo paragrafo per le equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano, *sono anche estendibili alle equazioni integrali con nucleo debolmente polare hermitiano* (si veda il § 17.4)

$$\mathcal{K}(x,\ y) = \frac{\mathcal{H}(x,\ y)}{|x-y|^{\alpha}}, \quad \alpha < \frac{n}{2}, \quad \mathcal{H}^*(x,\ y) = \mathcal{H}(x,\ y).$$

Infatti, per questi nuclei sono validi i risultati del § 19. Perciò, come mostra l'analisi della dimostrazione del teorema di Hilbert-Schmidt, per estendere questo teorema ai nuclei debolmente polari è sufficiente stabilire il seguente

Lemma. *Un operatore integrale K con nucleo debolmente polare $\mathcal{K}(x,\ y)$ trasferisce $\mathcal{L}_2(G)$ in $C(\overline{G})$ ed è limitato,*

$$\|Kf\|_C \leqslant L\|f\|, \tag{34}$$

dove

$$L^2 = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |\mathcal{K}(x,\ y)|^2\, dy.$$

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{L}_2(G)$. Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij abbiamo, per tutti gli $x \in \overline{G}$,

$$|(Kf)(x)| = \left| \int_G \mathcal{K}(x,\ y) f(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_G |\mathcal{K}(x,\ y)|^2\, dy \right]^{\frac{1}{2}} \|f\| \leqslant L\|f\|. \tag{35}$$

Inoltre, dai risultati del § 1.6, segue che le funzioni

$$(Kf)(x) = \int_G \frac{\mathscr{H}(x, y)}{|x-y|^\alpha} f(y)\, dy, \qquad \int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2\, dy$$

sono continue su $\bar{G}$. Perciò l'operatore K trasferisce $\mathscr{L}_2(G)$ in $C(\bar{G})$ e la disuguaglianza (34) segue dalla (35). Il lemma è dimostrato.

Sia ora il nucleo hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$ polare, $\alpha < n$. Per questi nuclei sono validi i risultati del § 19. Perciò, come segue dalla dimostrazione del teorema di Hilbert-Schmidt, la serie (9) converge in $\mathscr{L}_2(G)$. Tenendo conto del fatto che, per $p \geqslant p_1 = \left[\frac{n}{2(n-\alpha)}\right] + 1$, i nuclei iterati $\mathscr{K}_p(x, y)$ sono hermitiani e debolmente polari (si vedano i §§ 17.4 e 19.4), concludiamo che *le serie bilineari* (12) *sono regolarmente convergenti per* $p \geqslant 2p_1$. *Inoltre, le formule* (19) *e* (20) *e, di conseguenza, tutti i risultati del* § 20.5 *sono validi. La formula di Schmidt resta valida con la sostituzione della convergenza uniforme con la convergenza in* $\mathscr{L}_2(G)$.

Osservazione. Consideriamo l'equazione integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \rho(y)\, \mathscr{K}(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f(x), \tag{36}$$

dove il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è hermitiano ed il peso $\rho(y)$ è una funzione continua e positiva su $\bar{G}$. La sostituzione della funzione ignota $\psi = \sqrt{\rho}\varphi$ trasforma l'equazione (36) nell'equazione integrale equivalente

$$\psi(x) = \lambda \int_G \sqrt{\rho(x)\rho(y)}\, \mathscr{K}(x, y)\, \psi(y)\, dy + \sqrt{\rho(x)}\, f(x)$$

con nucleo hermitiano $\sqrt{\rho(x)\rho(y)}\,\mathscr{K}(x, y)$. Passando all'equazione iniziale (36), si vede che la teoria di Hilbert-Schmidt può essere estesa senza modifiche anche all'equazione integrale (36) con nucleo non hermitiano $\rho(y)\,\mathscr{K}(x, y)$ se quest'equazione è considerata nello spazio $\mathscr{L}_2(G; \rho)$ con prodotto scalare $(f, g)_\rho$ (si veda l'osservazione del § 1.9).

7. Teorema di Jentsch. Molti problemi della fisica matematica sono riducibili ad equazioni integrali con nucleo hermitiano reale. Questi nuclei sono detti *simmetrici* e soddisfano la relazione $\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{K}(y, x)$.

Le autofunzioni di un nucleo simmetrico $\mathscr{K}(x, y)$ *si possono scegliere reali.*

Infatti, se $\varphi_0 = \varphi_1 + i\varphi_2$ è una autofunzione del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ corrispondente all'autovalore λ_0, e cioè

$$\varphi_0 = \varphi_1 + i\varphi_2 = \lambda_0 K\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_1 + i\lambda_0 K\varphi_2,$$

ne segue, in virtù del fatto che $\mathscr{K}(x, y)$ e λ_0 sono reali, che le parti immaginaria e reale non nulle φ_1 e φ_2 della funzione φ_0 sono anch'esse autofunzioni corrispondenti a λ_0, e cioè

$$\varphi_1 = \lambda_0 K\varphi_1, \quad \varphi_2 = \lambda_0 K\varphi_2.$$

Diremo *nucleo positivo* il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$, se $\mathscr{K}(x, y) > 0$, $x \in G$ ed $y \in G$. Evidentemente, se il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è positivo, sono anche positivi tutti i suoi nuclei iterati $\mathscr{K}_p(x, y)$.

Teorema di Jentsch. *Se un nucleo polare simmetrico $\mathscr{K}(x, y)$ è positivo, il suo più piccolo (in modulo) autovalore λ_1 è positivo e semplice; la corrispondente autofunzione $\varphi_1(x)$ è positiva in G.*

Dimostrazione. Siano λ_1 il più piccolo autovalore in modulo (reale) di un nucleo polare positivo simmetrico $\mathscr{K}(x, y)$ e φ_1 un'autofunzione reale arbitraria corrispondente a λ_1, $\varphi_1 = \lambda_1 K\varphi_1$. Allora λ_1^2 è il più piccolo autovalore del nucleo polare definito positivo $\mathscr{K}_2(x, y)$ e φ_1 è l'autofunzione corrispondente a λ_1^2, $\varphi_1 = \lambda_1^2 K^2\varphi_1$.

Dimostriamo che $\varphi_1(x)$ non può cambiare di segno nella regione G, e cioè

$$|\varphi_1(x)\varphi_1(y)| = \varphi_1(x)\varphi_1(y), \quad x \in G, \quad y \in G.$$

Infatti, in caso contrario, in virtù della continuità della funzione $\varphi_1(x)$ (si veda il § 18.5), esistono intorni $U(x'; r) \subset G$ ed $U(y'; \rho) \subset G$ tali che

$$|\varphi_1(x)||\varphi_1(y)| > \varphi_1(x)\varphi_1(y), \quad x \in U(x'; r), \quad y \in U(y'; \rho),$$

e quindi, in base alla condizione $\mathscr{K}_2(x, y) > 0$, si ha

$$\frac{(K^2|\varphi_1|, |\varphi_1|)}{\||\varphi_1|\|^2} = \frac{1}{\|\varphi_1\|^2}\int_G\int_G \mathscr{K}_2(x, y)|\varphi_1(x)||\varphi(y)|\,dx\,dy >$$

$$> \frac{1}{\|\varphi_1\|^2}\int_G\int_G \mathscr{K}_2(x, y)\varphi_1(x)\varphi_1(y)\,dx\,dy = \frac{(K^2\varphi_1, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} = \frac{1}{\lambda_1^2},$$

il che contraddice al principio variazionale (33).

Dimostriamo che la funzione $\varphi_1(x)$ non può annullarsi nella regione G e, quindi, può essere scelta positiva in G.

Infatti, nel caso contrario esiste un punto $x' \in G$ tale che

$$\varphi_1(x') = \lambda_1^2\int_G \mathscr{K}_2(x', y)\varphi_1(y)\,dy = 0,$$

da cui, in virtù della condizione $\mathscr{K}_2(x, y) > 0$, segue la contraddizione: $\varphi_1(y) \equiv 0$, $y \in G$.

Dal fatto che $\varphi_1(x)$ è positiva segue che anche λ_1 è positivo, poiché $\mathscr{K}(x, y) > 0$ e $\lambda_1 = K\varphi_1/\varphi_1 > 0$.

Dimostriamo che λ_1 è un semplice autovalore.

Infatti, se esistesse una funzione reale φ_2 linearmente indipendente di φ_1, corrispondente a λ_1, allora per tutte le c reali la loro com-

binazione reale $\varphi_1 + c\varphi_2$ sarebbe anch'essa un'autofunzione reale corrispondente a λ_1 e, quindi, come abbiamo dimostrato, non potrebbe annullarsi nella regione G, il che è impossibile visto che c è arbitraria. Il teorema è dimostrato.

Osservazione. Il teorema di Jentsch è valido per un qualunque nucleo polare positivo (senza supporre la sua simmetria). Il corrispondente teorema è anche valido per le matrici ad elementi positivi; in questo caso esso si chiama teorema di Perron.

8. **Metodo di Kellogg.** Per determinare in modo approssimato il più piccolo (in modulo) autovalore λ_1 e le corrispondenti autofunzioni di un nucleo polare hermitiano $\mathscr{K}(x, y)$ viene applicato il metodo delle approssimazioni successive di Kellogg. Supponiamo che una funzione reale $\varphi^{(0)}$, appartenente a $\mathscr{L}_2(G)$, non sia ortogonale a tutte le autofunzioni corrispondenti a λ_1. Costruiamo le successioni

$$\varphi_{(p)}(x) = \frac{\varphi^{(p)}(x)}{\| \varphi^{(p)} \|}, \quad \lambda_{(p)} = \frac{\| \varphi^{(p-1)} \|}{\| \varphi^{(p)} \|}, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

dove $\varphi^{(p)} = K^r \varphi^{(0)}$ sono le iterazioni della funzione $\varphi^{(0)}$ (si veda il § 17.1). I termini $\lambda_{(p)}$ e $\varphi_{(p)}(x)$ di queste successioni sono presi come approssimazioni a $|\lambda_1|$ ed alla corrispondente autofunzione $\varphi_1(x)$.

Spieghiamo il metodo di Kellogg per le equazioni integrali con nucleo positivo debolmente polare simmetrico. Conformemente al teorema di Jentsch, per questi nuclei λ_1 è positivo e semplice, in modo che si ha $0 < \lambda_1 < |\lambda_2| \leqslant, \ldots$; la corrispondente autofunzione $\varphi_1(x)$ è positiva per $x \in G$; le autofunzioni $\varphi_k(x)$ sono reali (si veda il § 20.7).

Teorema [1]. *Sia $\mathscr{K}(x, y)$ un nucleo positivo debolmente polare simmetrico. Allora, per ogni funzione $\varphi^{(0)}(x) \geqslant 0$, $\| \varphi_{(0)} \| = 1$, la successione $\{\lambda_{(p)}\}$ decresce in modo monotono e converge a λ_1, mentre la successione $\{\varphi_{(p)}\}$ converge a φ_1 in $\mathscr{L}_2(G)$ ed in $C(\bar{G})$, ed inoltre sono valide le relazioni*

$$0 \leqslant \lambda_{(p)} - \lambda_1 \leqslant \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2p-2} \frac{1 - c_1^2}{c_1^2}, \quad p = 2, 3, \ldots; \tag{38}$$

$$\| \varphi_{(p)} - \varphi_1 \| \leqslant \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \frac{\sqrt{1 - c_1^2}}{c_1}, \quad p = 1, 2, \ldots; \tag{39}$$

$$\| \varphi_{(p)} - \varphi_1 \|_C \leqslant L^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^p \frac{\sqrt{1 - c_1^2}}{c_1}, \quad p = 2, 3, \ldots, \tag{40}$$

dove $c_1 = (\varphi^{(0)}, \varphi_1)$, $L^2 = \max\limits_{x \in \bar{G}} \int\limits_{\bar{G}} |\mathscr{K}(x, y)|^2 \, dy$.

[1] Si veda Vladimirov [1].

Dimostrazione. In base al teorema di Hilbert-Schmidt (si veda i §§ 20.1 e 20.6) abbiamo

$$\varphi^{(p)}(x) = K^p \varphi^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^p} \varphi_k(x), \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{41}$$

dove, in virtù della disuguaglianza di Bessel, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \| \varphi^0 \|^2 = 1, \quad c_k = (\varphi^{(0)}, \varphi_k), \quad c_1 > 0, \tag{42}$$

e le serie (41) convergono uniformemente rispetto a $x \in G$.

In virtù del fatto che $(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}$, dalle uguaglianze (41) seguono le seguenti uguaglianze:

$$\| \varphi^{(p)} \|^2 = (\varphi^{(p)}, \varphi^{(p)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{2p}}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{43}$$

Dimostriamo che la successione $\lambda_{(p)}$, $p = 1, 2, \ldots$, è monotonamente decrescente e che $\lambda_{(p)} \geqslant \lambda_1$.

Infatti, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij, si ottiene

$$\| \varphi^{(p)} \|^2 = (\varphi^{(p)}, \varphi^{(p)}) = (K\varphi^{(p-1)}, \varphi^{(p)}) =$$
$$= (\varphi^{(p-1)}, K\varphi^{(p)}) = (\varphi^{(p-1)}, \varphi^{(p+1)}) \leqslant \| \varphi^{(p-1)} \| \, \| \varphi^{(p+1)} \|,$$

dalla quale, insieme con (37), seguono le disuguaglianze:

$$\lambda_{(p+1)} = \frac{\| \varphi^{(p)} \|}{\| \varphi^{(p+1)} \|} \leqslant \frac{\| \varphi^{(p-1)} \|}{\| \varphi^{(p)} \|} = \lambda_{(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Inoltre, dal principio variazionale (5) del § 19.3 (si veda anche il § 19.4) deduciamo che

$$\lambda_{(p)} = \frac{\| \varphi^{(p-1)} \|}{\| \varphi^{(p)} \|} = \frac{\| \varphi^{(p-1)} \|}{\| K\varphi^{(p-1)} \|} \geqslant \inf_{f \in \mathcal{L}_2(G)} \frac{\| f \|}{\| Kf \|} = \lambda_1,$$
$$p = 1, 2, \ldots,$$

come si voleva dimostrare.

Prendendo in considerazione le uguaglianze (43), si ottiene

$$\lambda_{(p)} - \lambda_1 = \frac{\| \varphi^{p-1} \|}{\| \varphi^{(p)} \|} - \lambda_1 = \lambda_1 \left[\frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p-2}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^{2p}} \right]^{\frac{1}{2}} - \lambda_1,$$
$$p = 2, 3, \ldots. \tag{44}$$

Notiamo le seguenti disuguaglianze che sono valide per $x \geqslant y \geqslant 0$:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1+y}} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(x-y), \qquad 1 + \frac{1+x}{1+y} - \frac{2}{\sqrt{1+y}} \leqslant x. \tag{45}$$

Applicando la prima delle disuguaglianze (45) per

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p-2} \quad \text{e} \quad y = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p}$$

al secondo membro delle uguaglianze (44) ed utilizzando la (42), otteniamo le disuguaglianze (38):

$$0 \leqslant \lambda_{(p)} - \lambda_1 \leqslant \frac{\lambda_1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p-2} \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_k^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2p-2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \leqslant \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2p-2} \frac{1-c_1^2}{c_1^2}.$$

Dimostriamo le relazioni

$$\left\| \frac{\varphi^{(p)}}{\lambda_1^q \| \varphi^{(p+q)} \|} - \varphi_1 \right\| \leqslant \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^p \frac{\sqrt{1-c_1^2}}{c_1}, \tag{46}$$

$$p = 1, 2, \ldots; \quad q = 0, 1, \ldots$$

Utilizzando le formule (41) e (43), si ottiene

$$\left\| \frac{\varphi^{(p)}}{\lambda_1^q \| \varphi^{(p+q)} \|} - \varphi_1 \right\|^2 = \left\| \left(\frac{c_1}{\lambda_1^{q+p} \| \varphi^{(p+q)} \|} - 1 \right) \varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_1^q \| \varphi^{(p+q)} \|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^p} \varphi_k \right\|^2 =$$

$$= \left(\frac{c_1}{\lambda_1^{p+q} \| \varphi^{(p+q)} \|} - 1 \right)^2 + \frac{1}{\lambda_1^{2q} \| \varphi^{(p+q)} \|^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{2p}} =$$

$$= 1 + \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2k}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p+2q}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p+2q}}}. \tag{47}$$

Applicando la seconda delle disuguaglianze (45) per

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p} \quad \text{e} \quad y = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p+2q}$$

al secondo membro delle uguaglianze (47) e prendendo in considerazione la (42), si ottengono le disuguaglianze (46):

$$\left\| \frac{\varphi^{(p)}}{\lambda_1^{(q)} \| \varphi^{(p+q)} \|} - \varphi_1 \right\|^2 \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_k}{c_2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2p} \frac{1-c_1^2}{c_1^2}.$$

Le disuguaglianze (39) seguono dalle (46), per $q = 0$, in virtù della (37). Dimostriamo le disuguaglianze (40). Tenendo conto della disuguaglianza (34) del § 20.6, si ottiene

$$\| \varphi_{(p)} - \varphi_1 \|_C = \left\| \frac{\varphi^{(p)}}{\| \varphi^{(p)} \|} - \varphi_1 \right\|_C = \left\| K \left(\frac{\varphi^{(p-1)}}{\| \varphi^{(p)} \|} - \lambda_1 \varphi_1 \right) \right\|_C \leqslant$$

$$\leqslant L\lambda_1 \left\| \frac{\varphi^{(p-1)}}{\lambda_1 \| \varphi^{(p)} \|} - \varphi_1 \right\|.$$

Applicando, al secondo membro della disuguaglianza ottenuta, la disuguaglianza (46) per $q = 1$, con la sostituzione di p con $p - 1$, si ottengono le relazioni (40). Il teorema è dimostrato.

Osservazione 1. Il teorema dimostrato sulla convergenza del metodo di Kellogg è anche valido per i nuclei positivi polari simmetrici. In questo caso le relazioni (40) hanno luogo per $p \geqslant 2p_1$ (si veda il § 20.6).

Osservazione 2. In modo analogo si può dimostrare che il metodo delle approssimazioni successive del § 17.1, per $|\lambda| < |\lambda_1|$ converge in $C(\bar{G})$ con un errore di $O(|\lambda/\lambda_1|^p)$ se il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è hermitiano e polare.

9. Teorema di Mercer. *Se un nucleo continuo hermitiano* $\mathscr{K}(x, y)$ *ha un numero finito di autovalori negativi, la sua serie bilineare* (16) *è regolarmente convergente su* $\bar{G} \times \bar{G}$.

Dimostriamo prima il seguente

Lemma. *Se un nucleo continuo* $\mathscr{K}(x, y)$ *è definito positivo, si ha*

$$\mathscr{K}(x, x) \geqslant 0, \quad x \in \bar{G}.$$

Dimostrazione. Il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è hermitiano (si veda il § 20.5) ed allora $\mathscr{K}(x, x) = \overline{\mathscr{K}}(x, x)$ è reale. Se esistesse un punto $x_0 \in G$ tale che $\mathscr{K}(x_0, x_0) < 0$, allora, in base alla continuità, si potrebbe trovare un intorno $U \subset G$ del punto x_0 tale che $\operatorname{Re} \mathscr{K}(x, y) < 0$, $x \in U$, $y \in U$. Scegliendo una funzione non negativa continua $\varphi(x) \not\equiv$

$\not\equiv 0$, con supporto in U, si ottiene

$$(K\varphi, \varphi) = \int_U \int_U \mathscr{K}(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy = \\ = \int_U \int_U \operatorname{Re} \mathscr{K}(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy < 0,$$

il che contraddice il fatto che il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è definito positivo. Il lemma è dimostrato.

Dimostrazione del teorema di Mercer. È sufficiente dimostrare questo teorema per i nuclei $\mathscr{K}(x, y)$ definiti positivi, in virtù dei risultati del § 20.1. Ma allora anche tutti i nuclei $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$ definiti con la formula (3), saranno continui definiti positivi (si veda il § 20.5). Secondo il lemma, $\mathscr{K}^{(p)}(x, x) \geqslant 0$, $x \in \bar{G}$, in modo da avere

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \leqslant \mathscr{K}(x, x) \leqslant M, \quad x \in \bar{G}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Da ciò, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij,

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{|\varphi_k(x)\, \bar{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k} \leqslant \Big[\sum_{k=p}^{q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \sum_{k=p}^{q} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k} \Big]^{1/2}, \tag{48}$$

concludiamo che, per ogni $y \in \bar{G}$, la serie (16) è uniformemente convergente in $x \in \bar{G}$. (Ricordiamo che questa serie è uniformemente convergente rispetto a $y \in \bar{G}$ al nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ in $\mathscr{L}_2(G)$, si veda il § 20.3). Di conseguenza, nell'uguaglianza (16) si può porre $x = y$, e si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} = \mathscr{K}(x, x). \tag{49}$$

Conformemente al lemma di Dini (si veda il § 1.3), la serie (49) è uniformemente convergente su $\bar{G}$ ed allora, dalla disuguaglianza (48), segue la convergenza regolare della serie bilineare (16). Il teorema è dimostrato.

Corollario. *Nelle condizioni del teorema di Mercer si ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_G \mathscr{K}(x, x)\, dx. \tag{50}$$

V. Problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico

In questo capitolo vengono studiati i problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico, ed in particolare, la teoria del potenziale per le equazioni di Laplace e di Poisson nello spazio e nel piano, nonché per l'equazione di Helmholtz nello spazio. È pure esposta, in un modo contratto, la teoria delle funzioni di Bessel e delle funzioni sferiche.

Se non si fanno esplicite riserve, la regione G è supposta limitata e la sua frontiera S è supposta regolare a tratti. Denotiamo con G_1 l'esterno di $\bar{G}$, $G_1 = R^n \setminus \bar{G}$, $G \cup S \cup G_1 = R^n$.

§ 21. *Problemi agli autovalori*

1. Impostazione del problema agli autovalori. Consideriamo il seguente problema al contorno omogeneo lineare per un'equazione di tipo ellittico (si veda il § 4.4):

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \quad x \in G, \tag{1}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0. \tag{2}$$

Supponiamo (si veda i §§ 4.1 e 4.4) che

$$\begin{cases} p \in C^1(\bar{G}), \quad q \in C(\bar{G}), \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad x \in G, \\ \alpha \in C(S), \quad \beta \in C(S), \quad \alpha(x) \geqslant 0, \quad \beta(x) \geqslant 0, \\ \alpha(x) + \beta(x) > 0, \quad x \in S. \end{cases} \tag{3}$$

Sia S_0 la parte di S per cui $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono simultaneamente positive.

Il problema (1)-(2) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ della classe $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ che soddisfi l'equazione (1) in G e le condizioni di frontiera (2) sulla frontiera S. Evidentemente, il problema (1)-(2) ha sempre una soluzione nulla, e questa soluzione non ha alcun interesse. Perciò il problema (1)-(2) dev'essere considerato come un problema agli autovalori (si veda il § 1.11) per l'operatore

$$L = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad}) + q.$$

Tutte le funzioni $f(x)$ della classe $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ che soddisfano le condizioni di frontiera (2) e la condizione $Lf \in \mathcal{L}_2(G)$ costituiscono la regione di definizione $\mathcal{M}_L$ dell'operatore L (si veda il § 1.10). Per il lemma 2 del § 5.2 $\mathcal{D}(G)$ è denso in $\mathcal{L}_2(G)$, e $\mathcal{D}(G)$ è, evidentemente, contenuto in $\mathcal{M}_L$, perciò $\mathcal{M}_L$ è denso in $\mathcal{L}_2(G)$.

Dunque, il problema (1)-(2) consiste nel trovare i valori di λ (gli *autovalori* di L), per i quali l'equazione

$$Lu = \lambda u \qquad (4)$$

ha soluzioni non nulle $u(x)$ che appartengono alla regione di definizione $\mathcal{M}_L$ (le *autofunzioni* corrispondenti a questi autovalori).

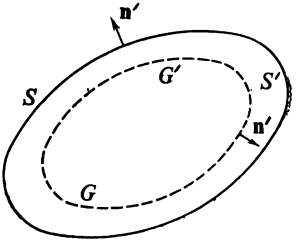


Fig. 70.

Osservazione. Le autofunzioni di regolarità $C^1(\bar{G})$ non sempre esistono. Per questa ragione in alcuni problemi l'esigenza di regolarità è meno forte. Questo è naturale per i problemi al contorno di prima specie (cioè non contenenti $\partial u/\partial n$, si veda il § 4.4). Per tutti gli altri problemi al contorno, $\partial u/\partial n$ su S è sottintesa come la cosiddetta derivata normale regolare (si veda il § 4.5, osservazione; § 24.2).

2. Formule di Green. Se $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ e $v \in C^1(\bar{G})$, è valida la *prima formula di Green*:

$$\int_G vLu\,dx = \int_G p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \int_S pv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \int_G quv\,dx. \qquad (5)$$

Per dimostrare la formula (5) prendiamo una regione arbitraria G' con una frontiera S' regolare a tratti, che si trova rigorosamente nella regione G (fig. 70). Visto che $u \in C^2(G)$, si ha anche $u \in C^2(\bar{G'})$ e, di conseguenza,

$$\int_{G'} vLu\,dx = \int_{G'} v[-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) + qu]\,dx =$$

$$= -\int_{G'} \operatorname{div}(pv\operatorname{grad}u)\,dx + \int_{G'} p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \int_{G'} quv\,dx.$$

Utilizzando ora la formula di Gauss-Ostrogradskij (si veda il § 2.2), si ottiene

$$\int_{G'} vLu\,dx = \int_{G'} p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \int_{S'} pv\frac{\partial u}{\partial n'}\,dS' + \int_{G'} quv\,dx.$$

Facendo tendere G' a G nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando il fatto che u e v appartengono a $C^1(\bar{G})$, concludiamo che il limite del secondo membro esiste e, quindi esiste anche il limite del primo membro ed è valida l'uguaglianza (5). In questo caso l'integrale del primo membro della (5) dev'essere considerato improprio [1].

Se u e v appartengono a $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, è valida la *seconda formula di Green*:

$$\int_G (vLu - uLv)\,dx = \int_S p\left(u\frac{\partial v}{\partial n} v - \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \tag{6}$$

Per dimostrare la formula (6), permutiamo u e v nella prima formula di Green (5):

$$\int_G uLv\,dx = \int_G p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx - \int_S pu\frac{\partial v}{\partial n}\,dS + \int_G quv\,dx,$$

e sottraiamo l'uguaglianza ottenuta dalla (5). Come risultato, si ottiene la seconda formula di Green (6).

In particolare, per $p = 1$ e $q = 0$, le formule di Green (5) e (6) si trasformano nelle seguenti formule (cfr. la formula (29) del § 6.5):

$$\int_G v\Delta u\,dx = -\int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \int_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS, \tag{7}$$

$$\int_G (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS. \tag{8}$$

3. Proprietà dell'operatore L. L'*operatore L è hermitiano*:

$$(Lf, g) = (f, Lg),\ f, g \in \mathscr{M}_L. \tag{9}$$

Infatti, visto che le funzioni f e $\bar{g}$ appartengono alla regione $\mathscr{M}_L$, si ha $Lf \in \mathscr{L}_2(G)$ e $L\bar{g} = \overline{Lg} \in \mathscr{L}_2(G)$ e la seconda formula di Green (6), per $u = f$ e $v = \bar{g}$ assume la forma

$$\int_G (\bar{g}Lf - f\overline{Lg})\,dx = (Lf, g) - (f, Lg) = \int_S p\left(f\frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g}\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS. \tag{10}$$

Inoltre, le funzioni f e $\bar{g}$ soddisfano la condizione di frontiera (2):

$$\alpha f + \beta\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad \alpha\bar{g} + \beta\frac{\partial \bar{g}}{\partial n}\Big|_S = 0. \tag{11}$$

[1] Qui ed in seguito si è supposto che la successione $S' \to S$ di superfici regolari a tratti venga scelta in modo che sia verificata la relazione limite

$$\int_{S'} f\frac{\partial u}{\partial n'}\,dS' \to \int_{S'} f\frac{\partial u}{\partial n'}\,dS, \quad S' \to S$$

per qualunque $u \in C^1(G)$ e $f \in C(\bar{G})$. Queste successioni S' esistono sempre per le superfici regolari a tratti S.

Per ipotesi, (3), $\alpha + \beta > 0$ su S. Perciò il sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari (11) ha una soluzione non nulla (α, β) e, quindi, il suo determinante è nullo, cioè

$$\left| \begin{matrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \end{matrix} \right|_S = f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_S = 0.$$

Tenendo conto dell'uguaglianza ottenuta, dalla formula (10) si ottiene l'uguaglianza (9) la quale significa che l'operatore L è hermitiano (si veda il § 1.12).

Sia $f \in \mathscr{M}_L$. Ponendo $u = f$ e $v = \bar{f}$ nella prima formula di Green (5) e tenendo conto del fatto che $Lf \in \mathscr{L}_2(G)$, si ottiene

$$(Lf, f) = \int_G p \,|\, \operatorname{grad} f \,|^2 dx - \int_S pf \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} dS + \int_G q \,|\, f \,|^2 dx. \qquad (12)$$

Dalla condizione di frontiera (2) segue che

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} f, \quad \text{se} \quad \beta(x) > 0, \quad x \in S;$$

$$f = 0, \qquad \text{se} \quad \beta(x) = 0, \quad x \in S.$$

Sostituendo queste relazioni nell'uguaglianza (12), si ottiene l'espressione per la forma quadratica

$$(Lf, f) = \int_G (p \,|\, \operatorname{grad} f \,|^2 + q \,|\, f \,|^2)\, dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \,|\, f \,|^2 dS, \quad f \in \mathscr{M}_L, \qquad (13)$$

dove S_0 è la parte di S per cui $\alpha(x) > 0$ e $\beta(x) > 0$.

La forma quadratica (Lf, f), $f \in \mathscr{M}_L$, è detta *integrale d'energia*.

In virtù delle ipotesi (3), nel secondo membro della (13), tutti e tre i termini sono non negativi. Per questa ragione eliminando il secondo ed il terzo termine e stimando per difetto il primo termine, otteniamo la disuguaglianza

$$(Lf, f) \geqslant \int_G p \,|\, \operatorname{grad} f \,|^2 dx \geqslant \min_{x \in \bar{G}} p(x) \int_G \,|\, \operatorname{grad} f \,|^2 dx,$$

cioè

$$(Lf, f) \geqslant p_0 \,\|\, |\, \operatorname{grad} f \,|\, \|^2, \quad f \in \mathscr{M}_L, \qquad (14)$$

dove $p_0 = \min p(x)$; in virtù del fatto che la funzione p è continua e positiva su $\bar{G}$, si ha $p_0 > 0$.

Dalla disuguaglianza (14) segue che l'*operatore L è positivo* (si veda il § 1.12), e cioè

$$(Lf, f) \geqslant 0, \quad f \in \mathscr{M}_L. \qquad (15)$$

Ne segue, in particolare, che l'operatore L è hermitiano (si veda il § 1.12).

4. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni dell'operatore L.

Tutti gli autovalori dell'operatore L sono non negativi.

Quest'asserzione segue dal fatto che l'operatore è positivo (si veda il § 1.12).

Le autofunzioni dell'operatore L, corrispondenti ai diversi autovalori, sono ortogonali tra loro.

Quest'asserzione segue dal fatto che l'operatore è hermitiano (si veda il § 1.12).

Le autofunzioni dell'operatore L possono essere scelte reali.

Quest'asserzione deriva dal fatto che l'operatore L è reale (cfr. il § 20.7). Infatti, siano λ_0 un autovalore (reale) ed u_0 la corrispondente autofunzione dell'operatore L, e cioè:

$$Lu_0 = \lambda_0 u_0, \quad u_0 \in \mathscr{M}_L. \tag{16}$$

Allora, separando nell'uguaglianza (16) la parte reale ed immaginaria, si ottiene che le parti immaginaria e reale non nulle dell'autofunzione $u_0 = u_1 + iu_2$ sono autofunzioni anch'esse corrispondenti all'autovalore λ_0, $Lu_j = \lambda_0 u_j$, $j = 1, 2$.

Lemma. *Affinché $\lambda = 0$ sia un autovalore dell'operatore L, è necessario e sufficiente che $q = 0$ ed $\alpha = 0$. In questo caso $\lambda = 0$ è un autovalore semplice ed $u_0 =$ costante è una corrispondente autofunzione.*

Dimostrazione. Necessità. Supponiamo che siano $\lambda = 0$ un autovalore dell'operatore L ed u_0 una corrispondente autofunzione, in modo che $Lu_0 = 0$, $u_0 \in \mathscr{M}_L$. Applicando alla funzione u_0 la formula (13), si ottiene

$$0 = (Lu_0, u_0) = \int_G (p \mid \operatorname{grad} u_0 \mid^2 + q \mid u_0 \mid^2) \, dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \mid u_0 \mid^2 dS,$$

da cui, tenendo conto delle ipotesi (3), concludiamo

$$p \operatorname{grad} u_0 = 0, \quad qu_0 = 0, \quad x \in G,$$

cioè $u_0 =$ costante $\neq 0$ e $q = 0$. Dalla condizione di frontiera (2) per l'autofunzione $u_0 =$ costante segue che $\alpha = 0$. La necessità delle condizioni è dimostrata. Abbiamo anche stabilito che $u_0 =$ costante è l'unica autofunzione che corrisponde all'autovalore $\lambda = 0$, cioè quest'autovalore è semplice.

Sufficienza. Se $q = 0$ ed $\alpha = 0$, allora, in virtù della (3), $\beta > 0$ ed il problema (1)-(2) diventa

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \lambda u, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

per il quale $u_0 =$ costante è un'autofunzione che corrisponde all'autovalore $\lambda = 0$. Il lemma è dimostrato.

Per $n \geqslant 2$ supponiamo che, nella condizione di frontiera, (2) sia $\beta = 0$ o $\beta = 1$, cioè una condizione della forma

$$\text{o} \quad u|_S = 0, \quad \text{o} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u|_S = 0, \quad \alpha \geqslant 0. \tag{17}$$

Allora, se la frontiera S della regione G è una superficie sufficientemente regolare ed i coefficienti $p > 0$, $q \geqslant 0$ ed $\alpha \geqslant 0$ sono funzioni sufficientemente regolari, è anche valido il seguente

Teorema 1. *L'insieme degli autovalori dell'operatore L non ha punti limite finiti; ogni autovalore è di molteplicità finita. Ogni funzione che appartiene a $\mathscr{M}_L$ può essere sviluppata in una serie di Fourier regolarmente convergente in termini delle autofunzioni dell'operatore L.*

Questo teorema sarà dimostrato per due casi particolari: 1) per il problema di Sturm-Liouville (si veda il § 22) e 2) per il problema di Dirichlet (si veda il § 28). La dimostrazione di questo teorema è contenuta nei libri di Michajlov [1], cap. IV, e di Ladyženskaja [1], cap. II.

In base al teorema riportato e dalle asserzioni precedenti, tutti gli autovalori precedenti possono essere numerati in ordine di grandezza:

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \quad \lambda_k \to \infty, \quad k \to \infty, \tag{18}$$

ripetendo λ_k in questa serie tante volte, quant'è la sua molteplicità. Indichiamo con $X_1, X_2, \ldots$, le corrispondenti autofunzioni in modo che, nella serie (18), ad ogni autovalore λ_k, corrisponda un'autofunzione X_k, e cioè:

$$LX_k = \lambda_k X_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad X_k \in \mathscr{M}_L.$$

Inoltre, le autofunzioni $\{X_k\}$ si possono scegliere reali ed ortonormali (si veda il § 1.12), in modo che

$$(LX_k, X_i) = \lambda_k (X_k, X_i) = \lambda_k \delta_{ki}. \tag{19}$$

Inoltre, ogni funzione f che appartiene a $\mathscr{M}_L$ può essere sviluppata in serie di Fourier nel sistema ortonormale $\{X_k\}$, e cioè:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) X_k(x), \tag{20}$$

e questa serie è regolarmente convergente su $\bar{G}$. Ma $\mathscr{M}_L$ è denso in $\mathscr{L}_2(G)$ (si veda il § 21.1). Da ciò e dal teorema del § 1.9 segue il seguente

Teorema 2. *Il sistema di autofunzioni dell'operatore L è completo in $\mathscr{L}_2(G)$.*

Sia $f \in \mathscr{M}_L$. Moltiplicando scalarmente la serie (20) a sinistra per Lf e tenendo conto del fatto che $Lf \in \mathscr{L}_2(G)$, si ottiene la formula per

l'integrale dell'energia:

$$(Lf, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{(f, X_k)}\,(Lf, X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, LX_k)\,\overline{(f, X_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f, \lambda_k X_k)\,\overline{(f, X_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, |\,(f, X_k)\,|^2. \tag{21}$$

Stabiliamo ora il seguente principio variazionale (cfr. il § 20.5):

$$\lambda_k = \inf_{\substack{f \in \mathscr{M}_L \\ (f,\, X_i) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k-1}} \frac{(Lf, f)}{\| f \|^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

dove l'infimum nella (22) è ottenuto su una qualunque autofunzione che corrisponde all'autovalore λ_k.

Infatti, utilizzando la formula (21) per la forma quadratica (Lf, f) e tenendo conto delle disuguaglianze (18): $\lambda_i \geqslant \lambda_k \geqslant 0$, $i \geqslant k$, per tutte le $f \in \mathscr{M}_L$ tali che $(f, X_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, si ottiene

$$(Lf, f) = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i\, |\,(f, X_i)\,|^2 \geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{\infty} |\,(f, X_i)\,|^2.$$

Ma, in virtù del teorema 2, è valida l'uguaglianza di Parseval (si veda il § 1.8)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\,(f, X_i)\,|^2 = \sum_{i=k}^{\infty} |\,(f, X_i)\,|^2 = \| f \|^2$$

e quindi

$$\lambda_k \leqslant \frac{(Lf, f)}{\| f \|^2}.$$

D'altra parte, per $f = X_k$, in virtù della (19), abbiamo

$$\frac{(LX_k, X_k)}{\| X_k \|^2} = \lambda_k, \quad (X_k, X_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Questo dimostra la validità del principio variazionale (22).

Ponendo $k = 1$ nella (22), si ottiene, in particolare,

$$\lambda_1 = \inf_{f \in \mathscr{M}_L} \frac{(Lf, f)}{\| f \|^2}.$$

Applicando la formula (21) alle funzioni

$$\eta_p = f - \sum_{i=1}^{p} (f, X_i)\, X_i, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

appartenenti a $\mathscr{M}_L$ e tenendo conto del fatto che

$$(\eta_p, X_k) = \Big(f - \sum_{i=1}^{p} (f, X_i)\, X_i, X_k\Big) = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \ldots, p \\ (f, X_k), & k = p+1, \ldots, \end{cases}$$

si ottiene

$$(L\eta_p, \eta_p) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda_k |(f, X_k)|^2.$$

Da ciò e dal fatto che la serie (21) è convergente segue che

$$(L\eta_p, \eta_p) \to 0, \; p \to \infty. \tag{23}$$

Applicando la disuguaglianza (14) alle funzioni η_p e tenendo conto della (23) si ottiene, per $p \to \infty$;

$$\| \, | \operatorname{grad} \eta_p | \, \|^2 = \left\| \left| \operatorname{grad} f - \sum_{i=1}^{p} (f, X_i) \operatorname{grad} X_i \right| \right\|^2 \leqslant \frac{1}{p_0} (L\eta_p, \eta_p) \to 0.$$

La relazione ottenuta significa che

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) \operatorname{grad} X_k(x), \tag{24}$$

ed inoltre, la serie (24) converge a grad f in $\mathcal{L}_2(G)$.

Dunque, abbiamo ottenuto il seguente

Teorema 3. *Se $f \in \mathcal{M}_L$, la serie* (20) *può essere derivata termine a termine rispetto a x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, una volta e le serie* (24) *ottenute convergono a $\partial f / \partial x_i$ in $\mathcal{L}_2(G)$.*

Osservazione. I risultati ottenuti possono essere estesi, in modo corrispondente, anche al problema al contorno agli autovalori per l'equazione $Lu = \lambda \rho u$, dove il peso $\rho(x) > 0$ è una funzione continua su $\overline{G}$ se questo problema è considerato nello spazio $\mathcal{L}_2(G; \rho)$ (cfr. il § 1.9, osservazione).

5. Significato fisico degli autovalori e delle autofunzioni. Per $p = 1$ e $\beta = 0$ il problema agli autovalori (1) - (2) assume la forma

$$-\Delta u + q(x) u = \lambda u, \; u|_S = 0. \tag{25}$$

Come è noto [1] gli autovalori del problema (25) determinano i livelli d'energia di una particella quantistica che si sposta in un campo esterno con potenziale

$$V(x) = \begin{cases} q(x), & x \in \overline{G}, \\ +\infty, & x \overline{\in} \overline{G}. \end{cases}$$

Le corrispondenti autofunzioni sono le funzioni d'onda dell'operatore stazionario di Schrödinger (si veda il § 2.7),

$$-\Delta u + V(x) u = \lambda u. \tag{26}$$

Come sarà mostrato nel § 32, gli autovalori dell'operatore L determinano le frequenze naturali di vibrazione delle regioni limi-

[1] Si veda, per esempio, Blochintsev [1], cap. VIII, e Messiah [1].

tate (volumi, membrane, corde, aste ecc.), e le corrispondenti autofunzioni danno le ampiezze delle vibrazioni armoniche.

Il più piccolo autovalore dell'operatore stazionario di trasporto (si veda il § 2.4) determina anche la criticità di un reattore nucleare, mentre la corrispondente autofunzione dà la densità del flusso di neutroni nel reattore allo stato critico.

§ 22. *Problema di Sturm-Liouville*

Per $n = 1$ il problema agli autovalori (1)-(2) del § 21.1 è detto *problema di Sturm-Liouville*

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0. \tag{2}$$

Conformemente alle condizioni (3) del § 21.1, assumiamo che

$$p \in C^1([0, l]), \quad q \in C([0, l]), \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geqslant 0,$$

$$h_1 \geqslant 0, \quad h_2 \geqslant 0, \quad H_1 \geqslant 0, \quad H_2 \geqslant 0, \quad h_1 + h_2 > 0, \quad H_1 + H_2 > 0.$$

Ricordiamo che la regione di definizione $\mathscr{M}_L$ dell'operatore L consiste di funzioni $u(x)$ della classe $C^2(0, l) \cap C^1([0, l])$, $u'' \in \mathscr{L}_2(0, l)$ che soddisfano le condizioni di frontiera.

L'espressione (13) del § 21.3, per la forma quadratica (Lf, f), $f \in \mathscr{M}_L$, assume la seguente forma:

$$(Lf, f) = \int_0^l (p|f'|^2 + q|f|^2)\,dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(l)|f(l)|^2$$

(gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente).

1. Funzione di Green. Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L; ciò significa che, in virtù del lemma del § 21.4, o $q \not\equiv 0$, o $h_1 \neq 0$, oppure $H_1 \neq 0$.

Consideriamo il problema al contorno

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \quad u \in \mathscr{M}_L, \tag{3}$$

dove $f \in C(0, l) \cap \mathscr{L}_2(0, l)$. Dato che $\lambda = 0$ non è un autovalore dell'operatore L, la soluzione del problema al contorno (3) nella classe $\mathscr{M}_L$ è unica (si veda il § 1.11). Costruiamo la soluzione di questo problema.

Siano v_1 e v_2 soluzioni non nulle (reali) dell'equazione omogenea $Lv = 0$ che soddisfano le condizioni

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0, \quad H_1 v_2(l) + H_2 v_2'(l) = 0. \tag{4}$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie segue che queste soluzioni esistono sempre ed appartengono alla classe C^2

([0, l]). Le soluzioni v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti, in caso contrario $v_1(x) = cv_2(x)$ e, di conseguenza, in base alla (4) la soluzione v_1 soddisfa anche la seconda condizione di frontiera della (2). Ciò significa che v_1 è un'autofunzione dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$, contrariamente all'ipotesi. Perciò il determinante wronskiano vale

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, l].$$

Inoltre, ha luogo l'identità di Ostrogradskij-Liouville [1]

$$p(x)\, w(x) = p(0)\, w(0), \quad x \in [0, l]. \tag{5}$$

Cercheremo la soluzione del problema (3) per mezzo del metodo di variazione delle costanti arbitrarie,

$$u(x) = C_1(x)\, v_1(x) + C_2(x)\, v_2(x). \tag{6}$$

Conformemente a questo metodo le funzioni C_1' e C_2' debbono soddisfare il sistema di equazioni differenziali lineari

$$C_1' v_1 + C_2' v_2 = 0, \quad C_1' v_1' + C_2' v_2' = -\frac{f}{p} \tag{7}$$

con il determinante $w(x) \neq 0$. Risolvendo questo sistema ed utilizzando l'identità (5), si ottiene

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{1}{w} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\frac{f}{p} & v_2' \end{vmatrix} = \frac{f(x)\, v_2(x)}{p(0)\, w(0)}, \\ C_2' &= \frac{1}{w} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & -\frac{f}{p} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)\, v_1(x)}{p(0)\, w(0)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Per soddisfare le condizioni di frontiera (2), poniamo $C_2(0) = 0$ e $C_1(l) = 0$, poiché, in virtù delle (4) e (7), si ha

$$\begin{aligned} h_1 u(0) - h_2 u'(0) &= h_1 [C_1(0)\, v_1(0) + C_2(0)\, v_2(0)] - \\ - h_2 [C_1(0)\, v_1'(0) + C_1'(0)\, v_1(0) + C_2(0)\, v_2'(0) + C_2'(0)\, v_2(0)] &= \\ = C_1(0) [h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0)] + C_2(0) [h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)] &= 0, \end{aligned}$$

ed analogamente per l'estremità $x = l$. Integrando la (8) con la condizione che $C_1(l) = 0$ e $C_2(0) = 0$, abbiamo

$$C_1(x) = -\frac{1}{p(0)\, w(0)} \int_x^l f(y)\, v_2(y)\, dy,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{p(0)\, w(0)} \int_0^x f(y)\, v_1(y)\, dy.$$

[1] Si veda, per esempio, Pontrjaghin [1], cap. III.

Sostituendo le espressioni ottenute nella (6), troviamo la soluzione cercata del problema (3) nella forma

$$u(x) = -\frac{1}{p(0)\,w(0)}\left[v_2(x)\int_0^x f(y)\,v_1(y)\,dy + v_1(x)\int_x^l f(y)\,v_2(y)\,dy\right],$$

o

$$u(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x, y)\,f(y)\,dy, \tag{9}$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{p(0)\,w(0)}\begin{cases} v_1(x)\,v_2(y), & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ v_2(x)\,v_1(y), & y \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{10}$$

La funzione $\mathcal{G}(x, y)$ è detta *funzione di Green* del problema al contorno (3) o dell'operatore L.

Dunque, abbiamo dimostrato il seguente risultato :

Lemma. *Se* $\lambda = 0$ *non è un autovalore dell'operatore* L, *la soluzione del problema al contorno* (3) *esiste, è unica ed è espressa dalla formula* (9).

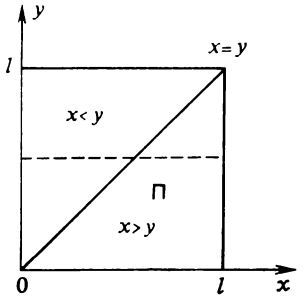


Fig. 71.

Riportiamo le proprietà della funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ che derivano direttamente dalla formula (10).

1) Questa funzione è reale e continua nel quadrato chiuso $\overline{\Pi} = [0, l] \times [0, l]$ ed appartiene alla classe C^2 nei triangoli chiusi

$$[0 \leqslant x \leqslant y \leqslant l] \text{ e } [0 \leqslant y \leqslant x \leqslant l]$$

(si veda la fig. 71).

2) Essa è simmetrica:

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x), \quad (x, y) \in \overline{\Pi}.$$

3) Sulla diagonale $x = y$ il salto della derivata $\mathcal{G}_x$ è uguale a $-1/p(y)$, cioè

$$\frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}(y-0, y)}{\partial x} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, l).$$

4) All'infuori della diagonale $x = y$ questa funzione soddisfa l'equazione omogenea

$$L_x \mathcal{G}(x, y) = 0, \; x \neq y, \quad (x, y) \in \overline{\Pi}.$$

5) Sui lati del quadrato Π essa soddisfa le condizioni di frontiera (2):

$$h_1 \mathcal{G}(0, y) - h_2 \frac{\partial \mathcal{G}(0, y)}{\partial x} = H_1 \mathcal{G}(l, y) + H_2 \frac{\partial \mathcal{G}(l, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in [0, l].$$

Esempio. La funzione di Green del problema al contorno

$$-u'' = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

ha la forma

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ (1-x)y, & y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Significato fisico della funzione di Green. Dalle proprietà 1), 3) e 4) segue che, per ogni $y \in (0, l)$, la funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ soddisfa in senso generalizzato (si veda il § 11.1) l'equazione

$$L_x \mathcal{G}(x, y) = \delta(x - y), \quad x \in (0, l).$$

Per questa ragione $\mathcal{G}(x, y)$ è una perturbazione, generata da una sorgente puntiforme d'intensità 1, che si trova nel punto y. Dunque, la funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ è una generalizzazione naturale di una soluzione fondamentale (si veda il § 11.2) con equazioni a coefficienti variabili e soggette alle condizioni di frontiera (cioè con equazioni che descrivono processi in un mezzo limitato non omogeneo).

2. Riduzione del problema di Sturm-Liouville ad un'equazione integrale. Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Frendholm con nucleo continuo, simmetrico e reale $\mathcal{G}(x, y)$.

Teorema. *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in \mathcal{M}_L, \quad f \in C(0, l) \cap \mathcal{G}_2(0, l) \tag{11}$$

con la condizione che $\lambda = 0$ *non sia un autovalore dell'operatore* L *è equivalente all'equazione integrale*

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{G}(x, y)\, u(y)\, dy + \int_0^l \mathcal{G}(x, y)\, f(y)\, dy, \quad u \in C([0, l]). \tag{12}$$

dove $\mathcal{G}(x, y)$ *è la funzione di Green dell'operatore* L.

Dimostrazione. Se $u(x)$ è la soluzione del problema al contorno (11), allora, applicando il lemma del § 22.1, con la sostituzione di f con $\lambda u + f$, si ottiene

$$u(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x, y)\, [\lambda u(y) + f(y)]\, dy,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (12).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in C([0, l])$ soddisfi l'equazione integrale (12). Consideriamo il problema al contorno

$$Lu = \lambda u_0 + f, \quad u \in \mathcal{M}_L.$$

Secondo il lemma del § 22.1, l'unica soluzione di questo problema è data dalla formula

$$u(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x, y)\,[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy = u_0(x),$$

da cui segue che $u_0 \in \mathcal{M}_L$ e soddisfa l'equazione

$$Lu_0 = \lambda u_0 + f,$$

cioè u_0 è la soluzione del problema al contorno (11). Il teorema è dimostrato.

Per $f = 0$ il problema al contorno (11) diventa il problema di Sturm-Liouville e, di conseguenza, il problema di Sturm-Liouville (1)-(2) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{G}(x, y)\,u(y)\,dy \tag{13}$$

a condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L.

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L. Per farlo, notiamo che, in virtù del lemma del § 24.4 $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q + 1)\,u = \mu u, \tag{14}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0. \tag{15}$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$, e perciò il problema (14)-(15) è equivalente al problema (1)-(2) per $\mu = \lambda + 1$.

Quindi, il problema di Sturm-Liouville (1)-(2) *è equivalente all'equazione integrale*

$$u(x) = (\lambda + 1) \int_0^l \mathcal{G}_1(x, y)\,u(y)\,dy, \tag{16}$$

dove $\mathcal{G}_1(x, y)$ *è la funzione di Green dell'operatore* L.

3. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni. Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouville ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea (16) con nucleo continuo $\mathcal{G}_1(x, y)$ simmetrico e, quindi, hermitiano. In questo caso gli autovalori λ del problema (1)-(2) sono collegati con i numeri caratteristici μ del nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ con la relazione $\mu = \lambda + 1$, mentre le corrispondenti autofunzioni coincidono. Quindi, per il problema di Sturm-Liouville sono validi tutti gli enunciati della teoria delle equazioni integrali con nucleo continuo simmetrico stabiliti nei §§ 19 e 20. In particolare, *l'insieme degli autovalori* $\{\lambda_k\}$ *di questo problema non è vuoto e non ha punti limite finiti*; *gli*

autovalori sono reali e sono anche di molteplicità finita; *le autofunzioni* $\{X_k\}$ *possono essere scelte reali ed ortonormali*; $X_k \in C^2([0, l])$.

Ma il problema di Sturm-Liouville ha alcune proprietà specifiche. Riportiamo alcune di queste proprietà.

Gli autovalori sono non negativi.

Quest'enunciato è stato dimostrato nel § 21.4.

L'insieme di autovalori è numerabile.

Infatti, se quest'insieme fosse finito, $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$, il nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ sarebbe rappresentato (si veda il § 20.1) come segue:

$$\mathcal{G}_1(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{X_k(x) X_k(y)}{\lambda_k + 1} \tag{17}$$

Ma $X_k \in C^2([0, l])$, e quindi la rappresentazione (17) contraddice la proprietà 3) della funzione di Green $\mathcal{G}_1(x, y)$. Proprio la contraddizione ottenuta dimostra il nostro enunciato.

Ogni autovalore è semplice.

Infatti, supponiamo che X_1 ed X_2 siano autofunzioni corrispondenti all'autovalore λ_0. Ciò significa che queste funzioni soddisfano l'equazione (1) per $\lambda = \lambda_0$ e le condizioni di frontiera (2). Dalla prima condizione di frontiera della (2)

$$h_1 X_1(0) - h_2 X_1'(0) = 0, \quad h_1 X_2(0) - h_2 X_2'(0) = 0$$

deriva, in virtù dell'ipotesi che $h_1 + h_2 > 0$.

$$\begin{vmatrix} X_1(0) & -X_1'(0) \\ X_2(0) & -X_2'(0) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} X_1(0) & X_2(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) \end{vmatrix} = 0,$$

cioè il determinante wronskiano per le soluzioni $X_1(x)$ ed $X_2(x)$ dell'equazione (1) per $\lambda = \lambda_0$ nel punto $x = 0$ si annulla, e quindi, queste soluzioni sono linearmente dipendenti. Ciò significa che λ_0 è un autovalore semplice del problema di Sturm-Liouville. (1)-(2).

Teorema (V. A. Steklov). *Ogni funzione* f *che appartiene a* $\mathcal{M}_L$ *può essere sviluppata in una serie di Fourier regolarmente convergente nel sistema delle autofunzioni* $\{X_k\}$ *del problema di Sturm-Liouville*,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) X_k(x). \tag{18}$$

Dimostrazione. Dato che $f \in \mathcal{M}_L$, abbiamo

$$L_1 f = Lf + f = h \in C(0, l) \cap \mathcal{L}_2(0, l).$$

Ma $\mathcal{M}_{L_1} = \mathcal{M}_L$, e quindi $f \in \mathcal{M}_{L_1}$. Dunque, la funzione f è una soluzione del problema al contorno

$$L_1 f = h, \quad f \in \mathcal{M}_{L_1},$$

ed inoltre, per costruzione (si veda il § 22.2), $\lambda = 0$ non è un autovalore dell'operatore L_1. Denotiamo con $\mathcal{G}_1(x, y)$ la funzione di

Green dell'operatore L_1. Secondo il lemma del § 22.1, la funzione f è espressa dall'integrale

$$f(x) = \int_0^l \mathcal{G}_1(x, y)\, h(y)\, dy,$$

cioè f può essere originalmente rappresentata in termini del nucleo continuo hermitiano $\mathcal{G}_1(x, y)$. Conformemente al teorema di Hilbert-Schmidt (si veda il § 20.1), la funzione f può essere sviluppata in una serie di Fourier regolarmente convergente delle autofunzioni del nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$. Ma le autofunzioni di questo nucleo coincidono con quelle dell'operatore L_1 le quali, a sua volta, coincidono con le autofunzioni $\{X_k\}$ dell'operatore L. Il teorema è dimostrato.

Dunque, per il problema di Sturm-Liouville è valido il teorema 1 del § 21.4, ed i suoi corollari. In particolare, *il sistema di autofunzioni del problema di Sturm-Liouville è completo in* $\mathcal{L}_2(0, l)$.

Osservazione. Mediante altri metodi V. A. Steklov ha dimostrato un enunciato più forte: ogni funzione $f \in C^1([0, l])$ che soddisfa le condizioni $f(0) = f(l) = 0$ può essere sviluppata in una serie di Fourier regolarmente convergente nelle autofunzioni del problema di Sturm-Liouville (1)-(2) (si veda Steklov [1], parte I, cap. V).

4. Determinazione degli autovalori e delle autofunzioni. Esponiamo qui il processo di calcolo degli autovalori e delle autofunzioni del problema di Sturm-Liouville (1)-(2). Siano $u_1(x; \lambda)$ ed $u_2(x; \lambda)$ soluzioni dell'equazione (1) soddisfacenti le condizioni iniziali

$$u_1(0; \lambda) = 1,\ u_1'(0; \lambda) = 0;\quad u_2(0; \lambda) = 0,\ u_2'(0; \lambda) = 1.$$

Allora la funzione

$$u(x; \lambda) = h_2 u_1(x; \lambda) + h_1 u_2(x; \lambda) \tag{19}$$

soddisfa l'equazione (1) e la prima delle condizioni di frontiera (2). Per soddisfare la seconda delle condizioni di frontiera (2), è necessario porre

$$H_1 h_2 u_1(l; \lambda) + H_1 h_1 u_2(l; \lambda) + H_2 h_2 u_1'(l; \lambda) + H_2 h_1 u_2'(l; \lambda) = 0.$$

Le radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ dell'equazione trascendente ottenuta danno tutti gli autovalori del problema di Sturm-Liouville (1)-(2). Le corrispondenti autofunzioni X_k sono date dalla formula (19) per $\lambda = \lambda_k$:

$$X_k(x) = u(x; \lambda_k) = h_2 u_1(x; \lambda_k) + h_1 u_2(x; \lambda_k),\ k = 1, 2, \ldots$$

Esempio. Calcoliamo gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville, per $p = 1$, $q = 0$, $h_2 = H_2 = 0$:

$$-u'' = \lambda u,\quad u(0) = u(l) = 0. \tag{20}$$

Per ciò scriviamo la soluzione generale dell'equazione differenziale (20)

$$u(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}\, x + C_2 \cos \sqrt{\lambda}\, x$$

e scegliamo le costanti arbitrarie C_1 e C_2 ed il parametro λ in modo che siano soddisfatte le condizioni di frontiera (20) e la condizione

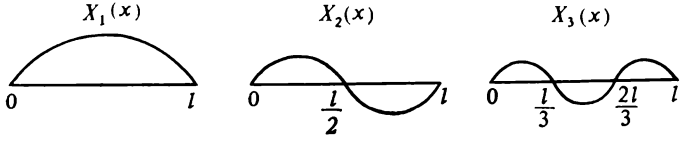


Fig. 72.

di normalizzazione $\| u \| = 1$. La condizione $u(0) = 0$ dà $C_2 = 0$, mentre quella $u(l) = 0$ ci dà $\sqrt{\lambda} l = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ in modo che

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad u(x) = C_1 \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Dalla condizione di normalizzazione

$$1 = \| u \|^2 = C_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{2} C_1^2$$

abbiamo $C_1 = \sqrt{2/l}$ e, di conseguenza,

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (21)$$

Per costruzione, il problema (20) non ha altre autofunzioni. Il sistema di autofunzioni (21) è completo in $\mathcal{L}_2(0, l)$ (si veda il § 22.3).

I grafici delle autofunzioni $X_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ sono dati nella fig. 72.

§ 23. *Funzioni di Bessel*

Consideriamo l'equazione

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - \nu^2) u = 0, \qquad (1)$$

detta *equazione di Bessel*. Ogni soluzione di quest'equazione non identicamente nulla, è detta *funzione cilindrica*. Osserviamo che i coefficienti dell'equazione (1) non soddisfano le condizioni del § 22.

1. Definizione e proprietà semplici delle funzioni di Bessel. Consideriamo, per $-\infty < \nu < \infty$, la funzione

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{2}$$

Questa funzione può essere rappresentata nella forma

$$J_\nu(x) = x^\nu f_\nu(x^2), \tag{3}$$

dove $f_\nu(\zeta)$ è una funzione intera,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)}. \tag{4}$$

Infatti, in virtù del criterio di D'Alembert, la serie (4) converge in modo uniforme su ogni compatto del piano della variabile complessa ζ e quindi definisce una funzione intera $f_\nu(\zeta)$.

Dunque, per $\nu = 0, \pm 1, \ldots, J_\nu(x)$ è una funzione analitica univoca, e per $\nu \neq 0, \pm 1, \ldots, J_\nu(x)$ è una funzione analitica a più valori; separiamo il ramo sul quale $x^\nu > 0$ per $x > 0$.

Verifichiamo che la funzione $J_\nu(x)$ soddisfa l'equazione (1). Utilizzando la relazione $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, si ottiene

$$x^2 J_\nu''(x) + xJ_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+\nu)(2k+\nu-1) + 2k + \nu - \nu^2]}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\,\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x),$$

come dovevasi dimostrare.

La funzione cilindrica $J_\nu(x)$ si dice *funzione di Bessel di ordine* ν.

In particolare,

$$\begin{cases} J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases} \tag{5}$$

Se $\nu > 0$ e non è intero, le funzioni $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x) = J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Ciò segue dalla (2) in virtù del fatto

che

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} [1 + O(x^2)], \quad x \to 0, \quad \nu \neq -1, -2, \ldots . \tag{6}$$

Se, invece, $\nu = n$ è intero, si ha

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \tag{7}$$

e, quindi, le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti.

Dimostriamo l'uguaglianza (7). Tenendo conto del fatto che $\Gamma(-k) = \infty$, $k = 0, 1, \ldots$, abbiamo dalla (2)

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Notiamo che per $\nu = n$ (n è un intero non negativo) la seconda soluzione linearmente indipendente $Y_n(x)$ dell'equazione di Bessel (1) ha la seguente proprietà:

$$Y_n(x) = \begin{cases} c_n x^{-n} [1 + o(1)], & n \geqslant 1, \\ c_0 \ln x \, [1 + o(1)], & n = 0, \end{cases} \quad x \to +0. \tag{8}$$

Quest'asserzione segue dalla formula di Ostrogradskij-Liouville (si veda la (5) del § 22.1) per $p(x) = x$,

$$Y_n'(x) J_n(x) - Y_n(x) J_n'(x) = \frac{a_n}{x}, \quad a_n \neq 0,$$

da cui

$$\left(\frac{Y_n}{J_n}\right)' = \frac{a_n}{x J_n^2(x)},$$

in modo che

$$Y_n(x) = J_n(x) \left[b_n - a_n \int_x^{x_n} \frac{d\xi}{\xi J_n^2(\xi)} \right]. \tag{9}$$

Scegliendo nella (9) x_n sufficientemente piccolo ed utilizzando il comportamento asintotico (6), dalla (9) si ottiene la (8).

2. Proprietà di ortogonalità. *Se* μ_1 *e* μ_2 *sono radici reali dell'equazione*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J_\nu'(\mu) = 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta > 0, \tag{10}$$

allora, per $\nu > -1$, *si ha*

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)\, J_\nu(\mu_2 x)\, dx = 0, \quad \mu_1^2 \neq \mu_2^2; \tag{11}$$

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\mu_1 x)\, dx = \frac{1}{2}\,[J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu^2(\mu_1). \tag{12}$$

Dimostrazione. Siano μ_1 e μ_2 numeri reali qualsiasi. In virtù della (1), le funzioni $J_\nu(\mu_1 x)$ e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_1 x) = 0.$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_2 x) = 0.$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $J_\nu(\mu_2 x)$, e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si ottiene quindi

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left\{x\left[J_\nu(\mu_1 x)\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} - J_\nu(\mu_2 x)\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right]\right\} dx =$$

$$= (\mu_2^2 - \mu_1^2)\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)\, J_\nu(\mu_2 x)\, dx,$$

oppure

$$x\,[\mu_1 J_\nu(\mu_2 x)\, J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x)\, J'_\nu(\mu_2 x)]\,\Big|_0^1 =$$

$$= (\mu_1^2 - \mu_2^2)\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)\, J_\nu(\mu_2 x)\, dx. \tag{13}$$

Ma per $x \to +0$ abbiamo dalla (2) (cfr. la (6))

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

$$\mu x J'_\nu(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x)\, J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x)\, J'_\nu(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}),\ x \to +0.$$

Dunque, in virtù della condizione $\nu > -1$, il primo membro dell'uguaglianza (13) si annulla per $x = 0$ e si ottiene

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)\, J_\nu(\mu_2 x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2}\,[\mu_1 J_\nu(\mu_2)\, J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1)\, J'_\nu(\mu_2)]. \tag{14}$$

Se μ_1 e μ_2 sono ora radici dell'equazione (10), cioè

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta\mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \quad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta\mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0, \tag{15}$$

ed i numeri α e β non si annullano simultaneamente, il determinante del sistema lineare (15) è nullo:

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\mu_1) & \mu_1 J'_\nu(\mu_1) \\ J_\nu(\mu_2) & \mu_2 J'_\nu(\mu_2) \end{vmatrix} = \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2) - \mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) = 0.$$

Da ciò e dalla (14) segue la proprietà d'ortogonalità (11).

Sia μ_1 una radice dell'equazione (10). Passando, nell'uguaglianza (14), al limite per $\mu_2 \to \mu_1$ ed utilizzando la regola di L'Hòpital e l'equazione (1), si ottiene la formula (12):

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\mu_1 x)\, dx =$$

$$= \lim_{\mu_2 \to \mu_1} \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2} [\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)] =$$

$$= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] =$$

$$= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} J_\nu^2(\mu_1) \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right).$$

3. Relazioni ricorrenti per le funzioni di Bessel. Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \tag{16}$$

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{16'}$$

Infatti, la formula (16) segue dalla (2):

$$J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] =$$

$$= \frac{-\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

In modo analogo si è stabilita la formula (16').

Le formule (16') e (16) si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{17'}$$

Per $m = 0, 1, \ldots$ si ottiene

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x), \tag{18}$$

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}. \tag{18'}$$

In particolare, per $m = 0, 1, \ldots$ dalle formule (5), (18) e (18') abbiamo

$$J_{m+1/2}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{m+1/2} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m \frac{\sin x}{x}, \tag{19}$$

$$J_{-m-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{m+1/2} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m \frac{\cos x}{x}. \tag{19'}$$

Infine, sottraendo le formule (16) e (16'), si ottiene ancora una relazione di ricorrenza:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0. \tag{20}$$

4. Radici delle funzioni di Bessel. Dimostriamo le seguenti proprietà delle radici dell'equazione (10) per $\nu > -1$. (Per $\beta = 0$ quest'equazione definisce le radici delle funzioni di Bessel.)

Teorema. *Le radici dell'equazione* (10) *per* $\nu > -1$ *sono reali, semplici, ad eccezione, forse, dello* 0; *queste radici sono simmetricamente disposte rispetto al punto* 0 *e non hanno punti limite finiti.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima il carattere reale delle radici. Dalla formula (2), in virtù del fatto che α, β e $\Gamma(\xi)$ sono reali, per ξ reali, si ottiene $J_\nu(\bar{x}) = \bar{J}_\nu(x)$.

$$\alpha J_\nu(\bar{\mu}) + \beta\bar{\mu} J'_\nu(\bar{\mu}) = \overline{\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'(\mu)}.$$

Per questa ragione, se μ è una radice dell'equazione (10), $\bar{\mu}$ è anch'essa una sua radice. Se $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$, applicando la formula (11) per $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \bar{\mu}$, si arriva ad una contraddizione:

$$0 = \int_0^1 x J_\nu(\mu x)\, J_\nu(\bar{\mu} x)\, dx = \int_0^1 x \,|\, J_\nu(\mu x) \,|^2\, dx.$$

Ciò significa che $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, cioè μ è un numero reale o immaginario: $\mu = ia$, $a \neq 0$ è reale. Ma l'ultimo caso non ha luogo, poiché, in virtù della (2) e del fatto che $\Gamma(\xi) > 0$, $\xi > 0$, si ha

$$\alpha J_\nu(ia) + \beta ia J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

La simmetria delle radici e l'assenza di punti limite finiti seguono dalla rappresentazione (si veda la (3))

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = \mu^\nu [(\alpha + \beta\nu) f_\nu(\mu^2) + \beta\mu^2 f'_\nu(\mu^2)]$$

e dal fatto che gli zeri di una funzione intera non possono avere punti limite finiti.

Dimostriamo la semplicità delle radici. Sia $\mu_0 > 0$ una radice dell'equazione (10) di molteplicità $\geqslant 2$, in modo che

$$\alpha J_\nu(\mu_0) + \beta\mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0,$$

$$\alpha J'_\nu(\mu_0) + \beta J'_\nu(\mu_0) + \beta\mu_0 J''_\nu(\mu_0) =$$

$$= -\beta\left(\mu_0 - \frac{\nu^2}{\mu_0}\right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J'_\nu(\mu_0) = 0 \quad (21)$$

in virtù dell'equazione (1). Dall'uguaglianza (21) concludiamo che a) $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$, b) oppure $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - \nu^2) = 0$. Il caso a) è impossibile in virtù del teorema dell'unicità della soluzione dell'equazione (1), poiché il punto $\mu_0 > 0$ non è singolare per quest'equazione. Dimostriamo che è anche impossibile il caso b). Per realizzare il caso b) è necessario che $\beta > 0$ e

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\nu^2 - \mu_0^2}, \quad 0 < \mu_0 \leqslant |\nu|$$

Sostituendo quest'espressione nella prima delle uguaglianze (21) ed elevando al quadrato, si ottiene

$$[J'_\nu(\mu_0)]^2 = \left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2} - 1\right) J_\nu^2(\mu_0),$$

il che, in virtù della (12), porta all'uguaglianza contraddittoria

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\mu_0 x)\, dx = 0.$$

Il teorema è dimostrato.

In base al teorema dimostrato si possono numerare le radici dell'equazione (10), disponendole in ordine crescente:

$$\mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \ldots \quad (22)$$

Scriviamo, per esempio, le prime tre radici di $J_0(x)$:

$$\mu_1^{(0)} = 2{,}4048, \quad \mu_2^{(0)} = 5{,}5201, \quad \mu_3^{(0)} = 8{,}6537.$$

I grafici approssimativi delle funzioni $J_0(x)$ e $J_1(x) = -J'_0(x)$ sono riportati nella fig. 73.

Scriviamo senza dimostrazione l'espressione asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \to +\infty. \quad (23)$$

Ne segue la formula approssimativa per le radici di $J_\nu(x)$:

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\nu + k\pi.$$

5. Problema al contorno agli autovalori per l'equazione di Bessel. Sia $\nu \geqslant 0$. Consideriamo il problema al contorno agli autovalori

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda x u, \quad 0 < x < 1, \tag{24}$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \quad x \to 0, \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \tag{25}$$

dove $\gamma = \min(\nu, 1)$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$. Alla regione di definizione $\mathscr{M}_{L_\nu}$ dell'operatore L_ν riferiamo le funzioni $u(x)$ della clas-

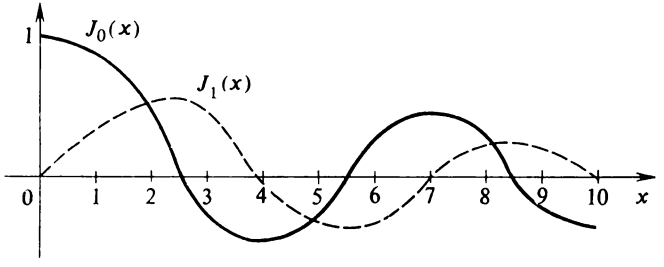


Fig. 73.

se $C^2((0, 1])$ che soddisfano le condizioni di frontiera (25) e la condizione $x^{-1/2}L_\nu u \in \mathscr{L}_2(0, 1)$; $\mathscr{M}_{L_\nu}$ è denso in $\mathscr{L}_2(0, 1)$.

Dalla definizione di $\mathscr{M}_{L_\nu}$ segue direttamente: *se* $u \in \mathscr{M}_{L_\nu}$, *si ha*

$$L_\nu u \in \mathscr{L}_2(0, 1) \quad e \quad xu'(x) \to 0, \; x \to 0 \tag{26}$$

L'operatore L_ν *è positivo* (*e, quindi è hermitiano*, si veda il § 1.12), *ed inoltre*

$$(L_\nu u, u) = \int_0^1 x\,|u'|^2\,dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x}\,dx + \frac{\alpha}{\beta}|u(1)|^2 \geqslant 0 \quad u \in \mathscr{M}_{L_\nu} \tag{27}$$

(per $\beta = 0$ l'ultimo termine della (27) s'annulla).

Infatti, la (27) segue dalle (25) e (26):

$$(L_\nu u, u) = \int_0^1 L_\nu u\bar{u}\,dx = -\int_0^1 (xu')'\bar{u}\,dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\,|u'|^2\,dx - xu'\bar{u}\,|_0^1 + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\,|u'|^2\,dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x}\,dx + \frac{\alpha}{\beta}|u(1)|^2.$$

Ogni autovalore λ *dell'operatore* L_ν *è non negativo e semplice. Affinché* $\lambda = 0$ *sia un autovalore dell'operatore* L_ν, *è necessario e sufficiente che* $\nu = 0$ *ed* $\alpha = 0$; *a quest'autovalore corrisponde l'autofunzione (unica)* $u(x) =$ costante.

Infatti, dal fatto che la forma quadratica $(L_\nu u, u)$ è non negativa, segue che gli autovalori λ sono non negativi; in questo caso, come pure nel § 21.4, stabiliamo che λ è nullo solo se $\nu = \alpha = 0$, e ad esso corrisponde l'autofunzione $u =$ costante. La semplicità di λ va dimostrata come nel § 22.3.

Sia $\mu_0 > 0$ una radice dell'equazione (10). Allora, dall'equazione di Bessel (1) e dalla (6), segue che $\lambda_0 = \mu_0^2$ è un autovalore e $J_\nu(\mu_0 x)$ è la corrispondente autofunzione dell'operatore L_ν. Inversamente, siano λ_0 un autovalore (positivo) ed $u_\nu(x)$ la corrispondente autofunzione dell'operatore L_ν. In questo caso (si veda il § 23.1), si ha

$$u_\nu(x) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda_0}\, x) + C_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda_0}\, x).$$

Ma dalla prima condizione di frontiera (25) e dalle (6) e (8) segue che $C_2 = 0$, ed allora $u_\nu(x) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda_0} x)$ e dalla seconda condizione di frontiera (25) segue che $\mu_0 = \sqrt{\lambda_0}$ è la radice dell'equazione (10).

Dunque,

$$\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2 \quad \text{e} \quad J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

sono tutti gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni dell'operatore L_ν.

6. Problema al contorno non omogeneo per l'equazione di Bessel. Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L_ν, cioè $\nu > 0$, oppure $\alpha > 0$ per $\nu = 0$. Utilizzando il metodo del § 22.1, costruiamo la funzione di Green $\mathcal{G}_\nu(x, y)$ dell'operatore L_ν.

Sia $\nu > 0$. Le funzioni x^ν e $x^{-\nu}$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $L_\nu u = 0$. Per questa ragione la funzione $v_1(x) = x^\nu$ soddisfa la prima condizione di frontiera (25) e la funzione

$$v_2(x) = ax^\nu + x^{-\nu}, \quad a = \frac{\beta\nu - \alpha}{\beta\nu + \alpha},$$

soddisfa la seconda condizione di frontiera (25). Quindi, conformemente alla formula (10) del § 22.1, la funzione $\mathcal{G}_\nu(x, y)$, per un certo $c_\nu \neq 0$, ha la forma

$$\mathcal{G}_\nu(x, y) = \begin{cases} c_\nu x^\nu (a y^\nu + y^{-\nu}), & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ c_\nu y^\nu (a x^\nu + x^{-\nu}), & y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{29}$$

Siano $\nu = 0$ ed $\alpha > 0$. Le funzioni 1 e $\ln x$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $L_0 u = 0$. Perciò $v_1(x) = 1$,

$v_2(x) = -\beta/\alpha + \ln x$, e

$$\mathcal{G}_0(x, y) = \begin{cases} c_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \ln y\right), & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ c_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \ln x\right), & y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{30}$$

La soluzione del problema al contorno

$$L_\nu u = f(x), \quad u \in \mathcal{M}_{L_\nu}, \quad f \in C((0, 1)], \; x^{-1/2} f \in \mathcal{L}_2(0, 1) \tag{31}$$

è unica ed è espressa mediante la formula

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) f(y)\, dy. \tag{32}$$

Quest'asserzione va stabilita nello stesso modo del § 22.2. L'unica differenza è legata alla prima condizione di frontiera della (25). Verifichiamo che questa condizione sia valida. Sia $\nu > 0$. In questo caso, utilizzando la (29) e la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij, otteniamo

$$|u(x)| = \left| c_\nu (a x^\nu + x^{-\nu}) \int_0^x y^\nu f(y)\, dy + c_\nu x^\nu \int_x^1 (a y^\nu + y^{-\nu}) f(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant O(x^\nu) + |c_\nu| x^{-\nu} \sqrt{\int_0^x y^{2\nu+1}\, dy} \sqrt{\int_0^x |f(y)|^2 \frac{dy}{y}} +$$

$$+ |c_\nu| x^\nu \sqrt{\int_x^1 y^{-2\nu+1}\, dy} \sqrt{\int_x^1 |f(y)|^2 \frac{dy}{y}} =$$

$$= O(x^\nu) + O(x) = O(x\gamma),$$

$x \to 0$, come volevasi dimostrare. In modo analogo più semplicemente è considerato il caso $\nu = 0$.

7. Completezza del sistema di funzioni di Bessel. Introduciamo lo spazio $\mathcal{L}_2[(0, 1); x]$ delle funzioni con prodotto scalare con norma (si veda il § 1.9, osservazione):

$$(f, g)_x = \int_0^1 x f(x) \bar{g}(x)\, dx, \quad \|f\|_x = \sqrt{(f, f)_x}.$$

In base ai risultati del punto precedente, come nel § 22.2, concludiamo che se $\lambda = 0$ non è un autovalore dell'operatore L_ν, il problema agli autovalori (24)-(25) è equivalente a quello agli auto-

valori per l'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y)\, yu(y)\, dy, \quad u \in C([0, 1]). \tag{33}$$

Passando ad una nuova funzione incognita $v(x) = \sqrt{x}u(x)$, riduciamo l'equazione integrale (33) alla forma equivalente (cfr. il § 20,6, osservazione):

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{xy}\, \mathcal{G}_\nu(x, y)\, v(y)\, dy, \quad v \in C([0, 1]). \tag{34}$$

In virtù delle (29) e (30), il nucleo $\sqrt{xy}\mathcal{G}_\nu(x, y) \not\equiv 0$ è reale, continuo e simmetrico. Per questa ragione all'equazione integrale (34) può essere applicata la teoria di Hilbert-Schmidt (si vedano i §§ 19 e 20). In particolare, esistono autovalori $\lambda_k^{(\nu)}$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots$ e $\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda_k^{(\nu)}}x)$, $k = 1, 2, \ldots$, sono le corrispondenti autofunzioni (si veda il § 23.5) ortogonali in $\mathcal{L}_2(0, 1)$.

Dunque, abbiamo dimostrato che il *problema al contorno* (24)-(25) *ha degli autovalori* $\lambda_1^{(\nu)} < \lambda_2^{(\nu)} < \ldots$, *che sono quadrati delle radici positive* $\mu_k^{(\nu)}$ *dell'equazione* (10); *le corrispondenti autofunzioni* $J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *formano un sistema ortogonale in* $\mathcal{L}_2[(0, 1); x]$, *ed inoltre, in virtù della* (12), *si ha*

$$\| J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x) \|_x^2 = \frac{1}{2}[J'_\nu(\mu_k^{(\nu)})]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_k^{(\nu)}}\right) J_\nu^2(\mu_k^{(\nu)}). \tag{35}$$

È valido il seguente

Teorema. *Se* $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$, *la funzione* $\sqrt{x}u(x)$ *può essere sviluppata in una serie di Fourier regolarmente convergente nel sistema di funzioni* $\sqrt{x}J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)$, $k = 1, 2, \ldots$;

$$\sqrt{x}u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\nu)} \sqrt{x}\, J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x), \quad a_k^{(\nu)} = \frac{(u,\ J(\mu_k^{(\nu)}x))_x}{\| J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x) \|_x^2}. \tag{36}$$

La **dimostrazione** di questo teorema è analoga a quella del teorema di V. A. Steklov (si veda il § 22.3). Se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$, ne segue che $L_\nu u = f(x)$ dove $f \in C((0, 1])$, $x^{-1/2}f \in \mathcal{L}_2(0, 1)$ (si veda il § 23.5). Per quanto è stato dimostrato (si veda il § 23.6), la funzione $u(x)$ è espressa in termini del nucleo $\mathcal{G}_\nu(x, y)$ mediante la formula (32), cioè

$$\sqrt{x}\, u(x) = \int_0^1 \sqrt{xy}\, \mathcal{G}_\nu(x, y) \frac{f(y)}{\sqrt{y}} dy.$$

Quindi, la funzione $\sqrt{x}u(x)$ è rappresentabile in termini del nucleo simmetrico continuo reale $\sqrt{xy}\mathcal{G}_\nu(x, y)$. Secondo il teorema di Hil-

bert-Schmidt (si veda il § 20.1), questa funzione può essere sviluppata in una serie di Fourier regolarmente convergente rispetto alle autofunzioni $\sqrt{x}J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)$ di questo nucleo.

Se, invece, $\lambda = 0$ è un autovalore dell'operatore L_ν (cioè per $\nu = \alpha = 0$, si veda il § 23.5), in questo caso, come nel § 22, è sufficiente considerare il problema

$$-(xu')' + xu = (\lambda + 1)\,xu,\ u(x) = O(1),\ x \to O,\ u'(1) = 0.$$

Il teorema è dimostrato.

L'insieme di funzioni $\{\sqrt{x}u(x),\ u \in \mathscr{M}_{L_\nu}\}$ è denso in $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Conformemente al teorema, ogni funzione della forma $\sqrt{x}u(x)$, $u \in \mathscr{M}_L$ può essere approssimata in $\mathscr{L}_2(0, 1)$ con precisione grande a piacere mediante combinazioni lineari del sistema ortogonale delle funzioni $\sqrt{x}J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Secondo il teorema del § 1.9, questo sistema è completo in $\mathscr{L}_2(0, 1)$.

Dunque, abbiamo dimostrato che il *sistema di autofunzioni* $J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *è completo in* $\mathscr{L}_2[(0, 1); x]$.

8. Altre funzioni cilindriche. Insieme con le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, sono molto importanti per le applicazioni altri tipi di funzioni cilindriche[1]. Queste funzioni sono:

funzioni di Hankel di prima specie

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{i}{\sin \pi\nu}\left[J_\nu(x)\,e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right],\quad \nu \neq n,$$

$$H_n^{(1)} = J_n(x) + \frac{i}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n};$$

funzioni di Hankel di seconda specie

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{i \sin \pi\nu}\left[J_\nu(x)\,e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right],\quad \nu \neq n,$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \frac{i}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n};$$

funzioni di Neumann

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu}\left[J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)\right],\quad \nu \neq n,$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n};$$

funzioni di argomento immaginario

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi}{2}\nu i} J_\nu(ix),\quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2}\nu i} H_\nu^{(1)}(ix).$$

---

[1] Un'esposizione più dettagliata sulle funzioni cilindriche che si può trovare, per esempio, in Smirnov [3], cap. VI, Tichonov e Samarskij [1], appendice II, Arsenin [1], cap. XI, Nikiforov e Uvarov [1], cap. III.

Si ha, quindi,

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{cases} \tag{37}$$

Utilizzando l'espressione asintotica (23) per $J_\nu(x)$, si ottiene per $x \to +\infty$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \tag{38_1}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \tag{38_2}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \tag{39}$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\,[1 + O(x^{-1})], \tag{40}$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\,[1 + O(x^{-1})]. \tag{41}$$

Analogamente, utilizzando la (6), si ottiene per $x \to +0$;

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x} + \ldots, \quad H_0^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x} + \ldots,$$

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{x} + \ldots, \quad K_0(x) = \ln\frac{1}{x} + \ldots .$$

9. Esescizi. a) Utilizzando le formule (16) e (17), dimostrare che, per $\nu > -1$, le radici positive delle funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{\nu+1}(x)$ si alternano, e cioè

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_1^{(\nu+1)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu+1)} < \ldots$$

b) Dimostrare l'uguaglianza

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n.$$

c) Utilizzanndo b), dimostrare che

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\theta - x\sin\theta)}\, d\theta, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

d) Dimostrare l'uguaglianza

$$J_\nu(e^{i\pi m}x) = e^{i\pi m\nu} J_\nu(x), \quad m = 0,\ \pm 1,\ \ldots$$

e) Dimostrare che, per $\nu > -1/2$, si ha

$$\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\nu - 1/2}\, e^{ix\xi}\, d\xi = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(x).$$

f) Supponiamo che la funzione $f(|x|)$ sia assolutamente integrabile su R^n e che per essa sia valida la formula d'inversione della trasformata di Fourier.

Dimostrare che la sua trasformata di Fourier è uguale a

$$(2\pi)^{n/2} |\xi|^{\frac{2-n}{2}} \int_0^\infty J_{\frac{n-2}{2}}(|\xi| r)\, r^{n/2} f(r)\, dr - f_1(|\xi|), \tag{42}$$

ed è valida la seguente formula d'inversione:

$$f(r) = (2\pi)^{-n/2} r^{\frac{2-n}{2}} \int_0^\infty J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)\, \rho^{n/2} f_1(\rho)\, d\rho. \tag{43}$$

Le formule (42) e (43) sono dette *trasformate di Hankel diretta* ed *inversa* di ordine $(n-2)/2$, rispettivamente.

§ 24. *Funzioni armoniche*

In questo paragrafo sono studiate le proprietà fondamentali delle funzioni armoniche.

Una funzione a valori reali $u(x)$ di classe $C^2(G)$ è detta *armonica in una regione* G se questa funzione soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in questa regione.

Per $n = 1$ le funzioni armoniche sono ridotte a quelle lineari e perciò la loro teoria non presenta alcun interesse. Per questa ragione poniamo in seguito sempre $n \geqslant 2$.

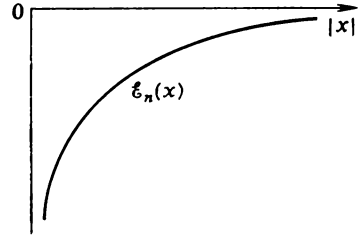


Fig. 74.

Un esempio non banale di una funzione armonica per $x \neq 0$ è la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace (si veda il § 11.8)

$$\mathscr{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \quad n = 2;$$

$$\mathscr{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geqslant 3.$$

Il grafico della funzione $\mathscr{E}_n(x)$ è rappresentato nella fig. 74.

1. Formula di Green. Se $u \in C^2(\bar{G})$ ed $u(x) = 0$, $x \bar{\in} \bar{G}$, per $x \bar{\in} S$ è valida la seguente *formula di Green*:

$$u(x) = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \int_G \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy + \\ + \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \int_S \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right] dS_y,$$

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_G \Delta u(y) \ln \frac{1}{|x-y|}\, dy + \tag{1}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y.$$

In altre parole, la funzione u è rappresentata nella forma della somma di tre potenziali newtoniani (logaritmici):

$$u(x) = V_n(x) + V_n^{(0)}(x) + V_n^{(1)}(x), \tag{2}$$

dove (per fissare le idee, poniamo $n \geqslant 3$)

$$V_n(x) = \mathscr{E}_n * \{\Delta u\} = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \int\limits_G \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy$$

è il potenziale di volume con densità $-\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\{\Delta u\}$;

$$V_n^{(0)}(x) = -\mathscr{E}_n * \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\delta_S\right) = \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \int\limits_S \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS_y$$

è il potenziale di uno strato semplice su S con densità di superficie $\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$;

$$V_n^{(1)}(x) = -\mathscr{E}_n * \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(u\delta_S) = \frac{-1}{(n-2)\,\sigma_n} \int\limits_S u(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dS_y$$

il potenziale di uno spazio su S con densità di superficie $-\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}u$.

Dimostriamo la formula di Green (1) per $n \geqslant 3$. Applicando la formula (27) del § 6.5, esempio c), alla funzione u e tenendo conto del fatto che $[u_S] = -u|_S$ e $[\partial u/\partial \boldsymbol{n}]_S = -\partial u/\partial \boldsymbol{n}|_S$, si ottiene

$$\Delta u = \{\Delta u\} - \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\delta_S - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(u\delta_S). \tag{3}$$

Visto che la funzione u è finita, la sua convoluzione con la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_n$ dell'operatore di Laplace esiste (si veda il § 7.6). Perciò, applicando la formula (13) del § 11.3 ed utilizzando l'uguaglianza (3), per la funzione u si ottiene la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} u = \mathscr{E}_n * \Delta u = \mathscr{E}_n * \{\Delta u\} - \mathscr{E}_n * \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\delta_S\right) - \mathscr{E}_n * \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(u\delta_S) = \\ = \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\left[-\frac{1}{|x|^{n-2}} * \{\Delta u\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{|x|^{n-2}} * \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\delta_S\right) + \frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(u\delta_S)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Da ciò, utilizzando la definizione dei potenziali newtoniani e le formule (37), (40) e (41) del § 7.10, otteniamo la formula di Green (1) per $n \geqslant 3$. Il caso $n = 2$ va considerato in modo analogo.

La formula di Green (1) è anche valida per le funzioni u della classe $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ se in questa formula l'integrale sulla regione G è inteso come improprio (cfr. il § 21.2). (Questo integrale può non essere assolutamente convergente.)

Per dimostrazione applichiamo la formula di Green (1) ad ogni sottoregione $G' \subset G$ con frontiera regolare a tratti e passiamo al limite per $G' \to G$. Utilizzando la regolarità supposta della funzione u, concludiamo che la formula di Green (1) è valida anche in questo caso.

Per una funzione u di classe $C^1(\overline{G})$ armonica nella regione G la formula di Green (1) assume la seguente forma:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial \boldsymbol{n}} - \right.$$

$$\left. - u(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right] dS_y, \quad n \geqslant 3;$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial \boldsymbol{n}} - \right.$$

$$\left. - u(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y, \quad n = 2. \qquad (5)$$

I potenziali di superficie $V_n^{(0)}(x)$ e $V_n^{(1)}(x)$ possono essere derivati con continuità all'infuori di S sotto il segno d'integrale *un numero infinito di volte*, e questi potenziali sono *funzioni armoniche all'infuori di S*. Da ciò e dalla formula (5) segue che *ogni funzione armonica è infinitamente derivabile* [1].

Osservazione. La formula di Green (1) esprime i valori di una funzione armonica in termini dei suoi valori e dei valori della sua derivata normale sulla frontiera di questa regione. Questa formula è analoga alla formula di Cauchy per le funzioni analitiche. È anche facile vedere l'analogia tra la formula di Green nella forma (2) e la formula simile (17) del § 13.3, per l'equazione d'onda.

2. Estensione delle formule di Green. Supponiamo che la frontiera S della regione G sia una superficie di classe C^1 (si veda il § 1.1) e che la funzione u appartenga a $C^1(G)$. Diremo che la funzione u ha *una derivata normale regolare* [2] su S se, uniformemente rispetto a tutti gli $x \in S$, esiste un limite della derivata normale $\partial u(x')/\partial \boldsymbol{n}_x$ per $x' \to x$, $x' \in -\boldsymbol{n}_x$, e denotiamo questo limite con $\partial u/\partial \boldsymbol{n} \equiv \equiv \partial u(x)/\partial \boldsymbol{n}_x$, in modo che

$$\frac{\partial u(x')}{\partial \boldsymbol{n}_x} \overset{x \in S}{\to} \frac{\partial u(x)}{\partial \boldsymbol{n}_x}, \quad x' \to x, \quad x' \in -\boldsymbol{n}_x.$$

Da questa definizione segue che, se una derivata normale regolare esiste, essa è continua su S ed è una derivata normale ordinaria. Inoltre, per tutti gli $x \in S$ esiste uniformemente un limite di $u(x')$ per $x' \to x$, $x' \in -\boldsymbol{n}_x$. Denotiamo questo limite con $u(x)$

[1] Lo è anche la funzione analitica (si veda il § 4.7).

[2] Questo termine è stato introdotto da A. M. Ljapunov [1].

in modo che $u \in C(S)$ e

$$u(x') \xrightarrow[x \in S]{} u(x), \quad x' \to x, \quad x' \in -\boldsymbol{n}_x. \tag{6}$$

La funzione $u(x)$ ridefinita in questo modo sarà continua su $\overline{G}$, cioè $u \in C(\overline{G})$.

Infatti, sia $x'_k \to x \in S$, $x'_k \in G$. Il punto x'_k si trova sul vettore $-\boldsymbol{n}_{x_k}$ che è normale a S in un punto $x_k \in S$, cioè $x'_k = x_k + \delta_k \boldsymbol{n}_{x_k}$ (fig. 75) e $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$. Utilizzando la continuità della funzione u su S e la limitatezza uniforme di $|\partial u(x')/\partial \boldsymbol{n}_{x_k}| < C$, $x' \in G$, $k \to \infty$, abbiamo

$$|u(x) - u(x'_k)| \leqslant |u(x) - u(x_k)| + |u(x_k) - u(x'_k)| \leqslant$$
$$\leqslant |u(x) - u(x_k)| + C\delta_k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Evidentemente, per le funzioni di classe $C^1(\overline{G})$ una derivata normale regolare esiste sempre.

Supponiamo che S sia una superficie appartenente alla classe C^2. In ogni punto $x \in S$ prendiamo, lungo la normale interna $-\boldsymbol{n}_x$, un segmento di lunghezza costante δ. L'insieme delle estremità x' di questi segmenti è descritto con l'equazione

$$x' = x - \delta \boldsymbol{n}_x. \tag{6}$$

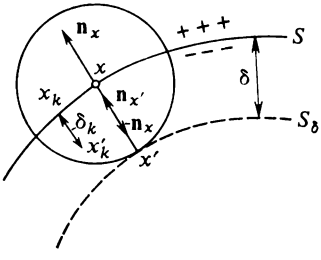


Fig. 75.

In virtù del lemma di Heine-Borel (si veda il § 1.1), per un δ sufficientemente piccolo questo insieme forma una superficie chiusa di classe C^1 che denotiamo con S_δ e chiameremo *una superficie parallela a S* (fig. 75).

Il vettore normale $\boldsymbol{n}_{x'}$ al punto $x' = x - \delta \boldsymbol{n}_x \in S_\delta$ è diretto lungo il vettore normale $\boldsymbol{n}_x$, $x \in S$ se $S \in C^2$.

Infatti, siano x un punto arbitrario su S ed $x = x(t)$, dove $t \geqslant 0$ è una curva arbitraria di classe C^1 su S che passa per x, $x = x(0)$. Allora $x'(t) = x(t) - \delta \boldsymbol{n}_{x(t)}$, dove $t \geqslant 0$ è una curva di classe C^1 si S_δ che passa per il punto $x' = x - \delta \boldsymbol{n}_x$. Derivando rispetto a t l'identità evidente $|x(t) - x'(t)|^2 = \delta^2$ (si veda la fig. 75), si ottiene

$$\left(x - x', \frac{dx}{dt}\right) = \left(x - x', \frac{dx'}{dt}\right), \tag{7}$$

da cui, ponendo $t = 0$ e tenendo conto del fatto che la tangente ad una curva nel punto x è ortogonale al vettore normale $\boldsymbol{n}_x$, concludiamo che

$$\delta\left(\boldsymbol{n}_x, \frac{dx'(0)}{dt}\right) = \delta\left(\boldsymbol{n}_x, \frac{dx(0)}{dt}\right) = 0. \tag{8}$$

Data l'arbitrarietà della curva scelta, ciò significa che il vettore normale $\boldsymbol{n}_x$ è ortogonale al piano tangente della superficie S_δ nel punto x', e cioè $\boldsymbol{n}_x = \boldsymbol{n}_{x'}$, come volevasi dimostrare.

Lemma. *Supponiamo che la frontiera S di una regione G sia una superficie di classe C^2 e che la funzione u appartenente a $C^1(G)$ abbia una derivata normale regolare $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ su S. Allora, per $f \in C(\overline{G})$, è valida l'uguaglianza*

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial \boldsymbol{n}_{x'}} dS_{x'} = \int_S f(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \boldsymbol{n}_x} dS_x, \tag{9}$$

dove S_δ è una superficie parallela a S.

Dimostrazione. Visto che i vettori normali $\boldsymbol{n}_x$ e $\boldsymbol{n}_{x'}$ nei punti $x \in S$ e $x' = x - \delta \boldsymbol{n}_x \in S_\delta$ sono nella stessa direzione, si ha

$$f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial \boldsymbol{n}_{x'}} = f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial \boldsymbol{n}_x} \xrightarrow{x \in S} f(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \boldsymbol{n}_x}, \tag{10}$$

$$x' \to x, \quad x' \in -\boldsymbol{n}_x,$$

in virtù della definizione di derivata normale regolare e della continuità della funzione f su $\overline{G}$. L'equazione (9) segue dalla relazione limite (10). Il lemma è dimostrato.

Da questo lemma segue che *le seguenti formule di Green restano valide per le superfici S di classe C^2 e per le funzioni che hanno una derivata normale regolare su S: formula* (5) *del* § 21.6 *se $u \in C^2(G)$, se $Lu \in \mathcal{L}^2(G)$, se la derivata $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ esiste e se $v \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$; formula* (6) *del* § 21.6 *se u, $v \in C^2(G)$ e se esistono le derivate $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ e $\partial v/\partial \boldsymbol{n}$; formula* (1) *del* § 24.1, *se $u \in C^2(G)$ e se esiste la derivata $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$.*

Infatti, applichiamo le formule di Green suddette ad una sottoregione qualsiasi limitata dalla superficie S_δ parallela a S. Passando in queste formule al limite per $\delta \to 0$ ed utilizzando la relazione limite (9), concludiamo che le formule di Green sono valide per le ipotesi enunciate.

3. Teorema della media. Dimostriamo prima la seguente asserzione: se *una funzione armonica u in una regione G appartiene a $C^1(\overline{G})$ (o se $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ esiste su S e $S \in C^2$), si ha*

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS = 0. \tag{11}$$

L'uguaglianza (11) segue dalla prima formula di Green della (7), § 21.2, per $v = 1$.

Teorema della media. *Se una funzione $u(x)$ è armonica nella sfera U_R ed è continua su $\overline{U}_R$, il suo valore nel centro di questa sfera è la*

sua media sulla sfera S_R:

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S_R} u(x)\, dS = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1} u(Rs)\, ds. \tag{12}$$

Dimostrazione. Applicando la formula di Green (5) per il punto $x = 0$ ad una qualunque sfera $|x| < \rho$, $\rho < R$, ed utilizzando la formula (11), per $n \geqslant 3$ si ottiene l'uguaglianza (12):

$$u(0) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[\frac{1}{\rho^{n-2}} \int_{S_\rho} \frac{\partial u(y)}{\partial n}\, dS - \int_{S_\rho} u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|y|^{n-2}}\, dS \right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma^n \rho^{n-1}} \int_{S_\rho} u(y)\, dS.$$

Visto che la funzione $u(x)$ è continua sulla sfera chiusa $\bar{U}_R$, l'uguaglianza (12) è anche valida per $\rho \to R$. Il caso $n = 2$ è considerato in modo analogo. Il teorema è dimostrato.

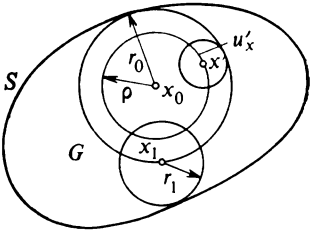


Fig. 76.

4. Principio del massimo. Utilizzando il teorema della media, stabiliamo il seguente p r i n c i p i o d e l m a s s i m o per le funzioni armoniche.

Teorema. *Se una funzione* $u(x) \not\equiv$ *costante è armonica in una regione limitata* G *e continua su* G, *questa funzione non può assumere i suoi valori massimo e minimo in* G, *e cioè*:

$$\min_{x \in S} u(x) < u(x) < \max_{x \in S} u(x), \quad x \in G. \tag{13}$$

Dimostrazione. Supponiamo, invece, che la funzione $u(x)$ assuma il suo valore massimo M in un certo punto $x_0 \in G$:

$$M = u(x_0) = \max_{x \in \bar{G}} u(x). \tag{14}$$

Visto che x_0 è un punto interno della regione G, esiste una sfera $U(x_0; r_0)$ del raggio più grande r_0 contenuta in G (fig. 76).

Dimostriamo che

$$u(x) \equiv M, \quad x \in \bar{U}(x_0;\ r_0). \tag{15}$$

Dalla (14) segue che

$$u(x) \leqslant M = u(x_0), \quad x \in U(x_0;\ r_0). \tag{16}$$

Se ad un certo punto $x' \in \bar{U}(x_0; r_0)$ sia $u(x') < M$, in questo caso, per continuità, la disuguaglianza $u(x) < M$ avrebbe luogo anche in un certo intorno $u_{x'}$ del punto x'. Ma allora, applicando alla sfera $S(x_0; \rho)$, in cui $\rho = |x' - x_0|$, la formula della media (12) ed

utilizzando la disuguaglianza (16) e quella $u(x) < M$, $x \in u_{x'}$, si ottiene

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int\limits_{S(x_0;\, \rho)} u(x)\, dS < \frac{M}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int\limits_{S(x_0;\, \rho)} dS = M,$$

il che contraddice la (14). Dunque, l'identità (15) è dimostrata.

Prendiamo ora un punto arbitrario $x_1 \in G$ che si trova sulla frontiera della sfera $\bar{U}(x_0; r_0)$ (fig. 76). Per dimostrazione, si ha $u(x_1) = M$. Applicando i ragionamenti precedenti al punto x_1, concludiamo che $u(x) \equiv M$ nella sfera più grande $\bar{U}(x_1; r_1) \subset \bar{G}$, ecc. In virtù del lemma di Heine-Borel, tutta la regione G è esaurita in un numero finito di passi e, quindi, $u(x) \equiv M$, $x \in G$, nonostante l'ipotesi.

La contraddizione ottenuta dimostra che l'ipotesi iniziale non è valida; quindi, la funzione $u(x)$ non può assumere il suo valore massimo in G. Sostituendo u con $-u$, concludiamo che $u(x)$ non può assumere il suo valore minimo in G. Il teorema è dimostrato.

Da questo teorema segue che *una funzione armonica non può avere all'interno di una regione né massimi, né minimi locali.*

5. Corollari del principio del massimo.

a) *Se la funzione* $u \in C(\bar{G})$ *è armonica in* G, *si ha*

$$|u(x)| \leqslant \max_{x \in S} |u(x)|, \quad x \in \bar{G}. \tag{17}$$

In particolare, se $u|_S = 0$, *si ha* $u(x) \equiv 0$, $x \in G$.

Quest'asserzione segue dalla disuguaglianza (13):

$$\pm u(x) \leqslant \max_{x \in S} \pm u(x) \leqslant \max_{x \in S} |u(x)|, \quad x \in \bar{G}.$$

Diremo che una funzione (generalizzata) $u(x)$ *è continua all'infinito ed assume il valore a all'infinito*, $u(\infty) = a$, se questa funzione è continua all'infuori di una sfera e tende ad a per $|x| \to \infty$.

b) *Se la funzione* $u \in C(\bar{G}_1)$ *è armonica in* $G_1 = R^n \setminus \bar{G}$ *ed* $u(\infty) = 0$, *si ha*

$$|u(x)| \leqslant \max_{x \in S} |u(x)|, \quad x \in \bar{G}_1. \tag{18}$$

In particolare, se $u|_S = 0$ *ed* $u(\infty) = 0$, *si ha* $u(x) \equiv 0$, $x \in G_1$.

Infatti, supponiamo che la sfera U_R contenga $\bar{G}$. In questo caso $S \cup S_R$ è la frontiera della regione $Q_R = G_1 \cap U_R$ (fig. 77). Applicando a questa regione la disuguaglianza (17), si ottiene

$$|u(x)| \leqslant \max_{x \in S \cup S_R} |u(x)| \leqslant \max_{x \in S} |u(x)| + \max_{x \in S_R} |u(x)|,$$

$$x \in \bar{Q}_R.$$

Visto che $u(\infty) = 0$, si ha

$$\max_{x \in S_R} | u(x) | \to 0, \quad R \to \infty.$$

Perciò, passando nella disuguaglianza ottenuta al limite, per $R \to \infty$, si ottiene la disuguaglianza (18).

c) *Se la successione di funzioni $u_1, u_2, \ldots$, armoniche in G e continue su $\overline{G}$ è uniformemente convergente sulla frontiera S, questa successione è anche uniformemente convergente su $\overline{G}$.*

Quest'asserzione segue dalla disuguaglianza (17):

$$| u_p(x) - u_q(x) | \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x \in S} | u_p(x) - u_q(x) | \to 0,$$
$$p, q \to \infty, \quad x \in \overline{G}. \tag{19}$$

Un'asserzione analoga è anche valida per la regione $G_1 = R^n \setminus \overline{G}$ a condizione che $u_k(\infty) = 0$.

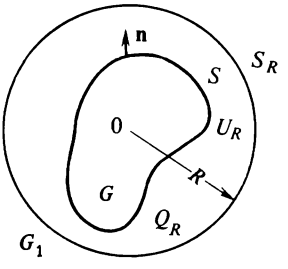


Fig. 77.

6. Eliminazione delle singolarità di una funzione armonica. Per le funzioni armoniche è valido il seguente teorema concernente l'eliminazione delle singolarità, analogo al corrispondente teorema per le funzioni analitiche.

Teorema. *Se una funzione $u(x)$ è armonica in una regione $G \setminus \{0\}$ e soddisfa la condizione*

$$u(x) = o(|\mathcal{E}_n(x)|), \quad x \to 0, \tag{20}$$

dove $\mathcal{E}_n$ è la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace, allora questa funzione continua in modo armonico nel punto $\{0\}$.

Dimostrazione. Sia $U_R \Subset G$. Introduciamo la funzione $\tilde{u}(x)$ uguale a $u(x)$ in $\overline{U}_R$ è nulla all'infuori di $\overline{U}_R$. Questa funzione è localmente integrabile e, in virtù della (3), § 24.1, il funzionale

$$\Delta\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial n} \delta_{S_R} + \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_{S_R}) \tag{21}$$

si annulla su tutte le funzioni fondamentali nulle nei dintorni del punto $\{0\}$. Ciò significa che la funzione generalizzata (21) è nulla o il suo supporto è il punto $\{0\}$. In questo caso, conformemente al teorema del § 8.4, questa funzione generalizzata è rappresentata nella forma di una combinazione finita di derivate di $\delta(x)$, cioè

$$\Delta\tilde{u} = -\frac{\partial u}{\partial n} \delta_{S_R} - \frac{\partial}{\partial n} (u \delta_{S_R}) + \sum_{|\alpha|=0}^{m} c_\alpha D^\alpha \delta. \tag{22}$$

Visto che la funzione $\widetilde{u}$ è finita, la sua convoluzione con la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_n$ esiste (si veda § 7. 6). Perciò, applicando la formula (13) del § 11, 6, dalla (22) si ottiene la rappresentazione

$$\widetilde{u} = \mathscr{E}_n * \Delta\widetilde{u} = -\mathscr{E}_n * \left(\frac{\partial u}{\partial n}\,\delta_{S_R}\right) - \mathscr{E}_n * \frac{\partial}{\partial n}\,(u\delta_{S_R}) + \sum_{|\alpha|=0}^{m} c_\alpha (\mathscr{E}_n * D^\alpha \delta) =$$

$$= V_n^{(0)}(x) + V_n^{(1)}(x) + \sum_{|\alpha|=0}^{m} c_\alpha D^\alpha \mathscr{E}_n(x). \qquad (23)$$

Visto che i potenziali di superficie $V_n^{(0)}$ e $V_n^{(1)}$ sono funzioni armoniche nella sfera U_R (si veda § 24. 1), dalla (23) e dalla condizione (20) segue che tutte le $c_\alpha = 0$, di modo che la funzione

$$u(x) = V_n^{(0)}(x) + V_n^{(1)}(x)$$

è armonica nella sfera U_R. Il teorema è dimostrato.

7. Funzioni armoniche generalizzate. La funzione continua $u(x)$ a valori reali è detta *armonica generalizzata* in un dominio G se questa funzione soddisfa l'equazione di Laplace in questo dominio, cioè

$$(\Delta u, \varphi) = \int u(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx = 0, \quad \varphi \in \mathscr{D}(G). \qquad (24)$$

Evidentemente, ogni funzione armonica è una funzione armonica generalizzata. È anche valido il seguente teorema inverso:

Teorema. *Ogni funzione armonica generalizzata $u(x)$ in una regione G è infinitamente derivabile e, quindi, è armonica in questa regione.*

Dimostrazione. Dato il carattere locale del teorema, possiamo porre $u \in C(\bar{G})$. Prolunghiamo la funzione u in zero all'infuori di $\bar{G}$ e sia $\widetilde{u}$ una funzione prolungata. Applicando la formula (13) del § 11.3, si ottiene la rappresentazione

$$\widetilde{u} = \Delta\widetilde{u} * \mathscr{E}_n, \qquad (25)$$

dove $\mathscr{E}_n$ è la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace. Dato che $\Delta\widetilde{u} = \Delta u = 0$, $x \in G$ e $\Delta\widetilde{u} = \Delta 0 = 0$, $x \in G_1$, si ha supp $\Delta\widetilde{u} \subset S$. Perciò, in base al teorema del § 7.6, per la convoluzione $\Delta\widetilde{u} * \mathscr{E}_n$ ha luogo la seguente rappresentazione:

$$(\Delta\widetilde{u} * \mathscr{E}_n, \varphi) = (\Delta\widetilde{u}(y) \cdot \mathscr{E}_n(\xi), \eta(y)\varphi(y+\xi)) =$$

$$= \left(\Delta\widetilde{u}(y), \eta(y) \int \mathscr{E}_n{}^{r}(\xi)\,\varphi(y+\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= \left(\Delta\widetilde{u}(y), \eta(y) \int \mathscr{E}_n(x-y)\,\varphi(x)\,dx\right), \quad \varphi \in \mathscr{D}, \qquad (26)$$

dove η è una funzione arbitraria appartenente a $\mathscr{D}$ ed uguale all'unità nell'intorno di S.

Sia $G' \Subset G$. Scegliamo nella (26) una funzione ausiliaria η tale che $\operatorname{supp} \eta \cap \bar{G}' = \varnothing$ (fig. 78). Visto che la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_n(x-y)$ è una funzione infinitamente derivabile per $x \neq y$, per la η scelta e per tutte le $\varphi \in \mathscr{D}(G')$ si ha

$$\eta(y)\,\mathscr{E}_n(x-y)\,\varphi(x) \in \mathscr{D}(R^{2n}).$$

Applicando ora la formula (14) del § 7.3, proprietà *f*), si ottiene

$$(\Delta\tilde{u} * \mathscr{E}_n, \varphi) = \int \varphi(x)\,(\Delta\tilde{u}(y),\ \eta(y)\,\mathscr{E}_n(x-y))\,dx,\quad \varphi \in \mathscr{D}(G')$$

da cui, in virtù della (25), segue la seguente uguaglianza (cfr. la (34), § 7.10):

$$u(x) = (\Delta\tilde{u}(y),\ \eta(y)\,\mathscr{E}_n(x-y)),\quad x \in G'.$$

Da questa rappresentazione, come nella dimostrazione del lemma del § 7.1, concludiamo che $u \in C^\infty(G')$. In virtù del fatto che la regione $G' \Subset G$ è arbitraria, ne segue che $u \in C^\infty(G)$. Quindi la funzione $u(x)$ soddisfa l'equazione di Lagrange in G nel senso classico (si veda il § 1.11), cioè è una funzione armonica in G. Il teorema è dimostrato.

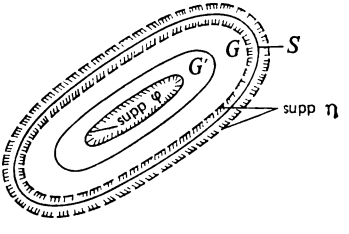


Fig. 78.

8. Altre proprietà delle funzioni armoniche. Notiamo due corollari che seguono dall'equivalenza dei concetti di armonicità generalizzata e di armonicità stabilita nel § 24.7.

a) *Se la successione* $u_1, u_2, \ldots$ *di funzioni armoniche in una regione* G *è debolmente* (*in particolare, uniformemente su ogni compatto* $K \subset G$ *o monotonamente*) *convergente ad una funzione* $u \in C(G)$, cioè

$$\int u_k(x)\,\varphi(x)\,dx \to \int u(x)\,\varphi(x)\,dx,\quad k \to \infty,\quad \varphi \in \mathscr{D}(G), \tag{27}$$

allora u *è una funzione armonica in* G.

Infatti, ogni funzione della successione $\{u_k\}$ soddisfa la relazione integrale (24). Ma allora, in virtù della (27), anche la funzione limite $u(x)$ appartenente a $C(G)$ soddisfa l'uguaglianza (24), cioè è una funzione armonica generalizzata e, quindi, una funzione armonica in G.

b) *Se la funzione* $u \in C(G)$ *è tale che, per ogni punto* $x \in G$, *esiste un numero* $r_0 = r_0(x) > 0$ *tale che per tutti gli* $r < r_0$ *è valida la*

condizione della media, cioè

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S_r} u(x-y)\, dS_y, \tag{28}$$

allora $u(x)$ è una funzione armonica in G.

Nella dimostrazione si può porre $u \in C(\bar{G})$; sia $\tilde{u}$ la funzione u prolungata mediante zero all'infuori di $\bar{G}$. Consideriamo $G' \Subset G$. In base al lemma di Heine-Borel (si veda il § 1.1) esiste un numero $r_0 = r_0(G') > 0$ tale che, per tutti gli $x \in G'$ e $r < r_0$, per la funzione $u(x)$ sarà verificata l'uguaglianza (28).

Formiamo la convoluzione

$$f_r(x) = \left(\frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \delta_{S_r} - \frac{1}{r^2}\delta\right) * \tilde{u}, \tag{29}$$

dove δ_{S_r} è uno strato semplice sulla sfera S_r (si veda il § 5.7). Utilizzando la formula (34) del § 7.10, esempio a), riscriviamo la convoluzione (29) nella forma

$$f_r(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \int_{S_r} \tilde{u}(x-y)\, dS_y - \frac{\tilde{u}(x)}{r^2}$$

In virtù della (28), ne segue che, per tutti i $r < r_0 f_r(x) = 0$, $x \in G'$. D'altra parte, utilizzando la relazione limite (41) del § 6.5, esempio h), e la continuità della convoluzione (si veda il § 7.6), si ottiene dalla (29)

$$f_r \to \frac{1}{2n} \Delta\delta * \tilde{u} = \frac{1}{2n} \Delta\tilde{u}, \quad r \to 0 \text{ in } \mathscr{D}',$$

e, di conseguenza, $\Delta\tilde{u} = \Delta u = 0$, $x \in G'$. Visto che $G_1 \Subset G$ è arbitrario, concludiamo che la funzione $u(x)$ è una funzione armonica generalizzata e, quindi, una funzione armonica in G.

9. Un analogo del teorema di Liouville. Per le funzioni armoniche in tutto lo spazio R^n è valido il seguente teorema analogo a quello di Liouville per le funzioni analitiche.

Teorema. *Se $u \in \mathscr{S}'$ soddisfa l'equazione di Laplace in tutto lo spazio R^n, allora u è un polinomio.*

Dimostrazione. Applicando, all'uguaglianza $\Delta u = 0$, la trasformazione di Fourier, si ottiene (si veda il § 9.3, esempio b)) $-|\xi|^2 F[u](\xi) = 0$, da cui segue che $F[u] = 0$, $\xi \neq 0$, cioè $F[u] = 0$ o il supporto di $F[u]$ è il punto $\{0\}$. Secondo il teorema del § 8.4, $F[u]$ può essere rappresentato nella forma

$$F[u](\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} c_\alpha D^\alpha \delta(\xi)$$

da cui segue che u è un polinomio. Il teorema è dimostrato.

Corollario. *Se la funzione u è armonica in R^n e soddisfa la disuguaglianza*

$$|u(x)| \leqslant C(1 + |x|)^m, \quad x \in R^n, \quad m \geqslant 0,$$

allora u è un polinomio (armonico) di un grado non superiore a m.

10. Comportamento di una funzione armonica all'infinito. Supponiamo che un punto x si trovi all'infuori di una sfera U_R. Eseguiamo l'*inversione*:

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad x = \frac{R^2}{|x^*|^2} x^*. \quad (30)$$

I punti x e x^* sono detti *simmetrici rispetto alla sfera* S_R. I punti simmetrici soddisfano la relazione

$$|x|\,|x^*| = R^2, \quad (31)$$

e perciò la trasformazione d'inversione trasforma biunivocamente l'esterno della sfera U_R in $\overline{U}_R \setminus \{0\}$ (fig. 79).

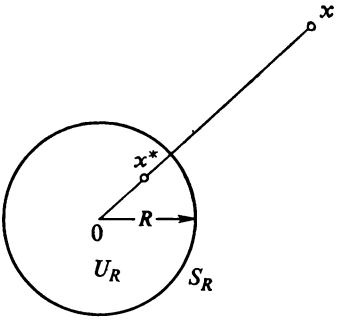


Fig. 79.

Supponiamo che $u(x)$ sia una funzione armonica all'infuori della sfera $\overline{U}_R$. La funzione

$$u^*(x^*) = \left(\frac{R}{|x^*|}\right)^{n-2} u\left(\frac{R^2}{|x^*|^2} x^*\right) \quad (32)$$

è detta *trasformazione di Kelvin* della funzione $u(x)$.

Dimostriamo che nella *trasformazione di Kelvin l'armonicità è conservata*, cioè la funzione $u^*(x^*)$ è armonica in $U_R \setminus \{0\}$.

Dimostriamo quest'enunciato per $n = 3$ (per $n \neq 3$ la dimostrazione è analoga). Per ciò passiamo alle coordinate sferiche (si veda il § 3.2). Siano $x = (r, \theta, \varphi)$ ed $u(x) = \tilde{u}(r, \theta, \varphi)$. In questo caso, in virtù delle (30) e (31), si ha $x^* = (\rho, \theta, \varphi)$, $\rho = R^2/r$ e, in virtù della (32)

$$u^*(x^*) = \tilde{u}^*(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{\rho} \tilde{u}\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta, \varphi\right).$$

Quindi,

$$\Delta u^*(x^*) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}^*}{\partial \varphi^2} =$$

$$= \frac{r^5}{R^5}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2}\right] =$$

$$= \frac{r^5}{R^5} \Delta u(x),$$

da cui segue l'enunciato richiesto.

Teorema. *Supponiamo che la funzione* $u(x)$ *sia armonica all'infuori della sfera* $\bar{U}_R$ *e per* $|x| \to \infty$ $u(x) = o(1)$ $(n \geqslant 3)$ o $u(x) = O(1)$ $(n = 2)$. *Si ha allora*

$$D^\alpha u(x) = O(1/|x|^{n-2+|\alpha|}), \quad |x| \to \infty, \tag{33}$$

se $n \geqslant 3$. *Se, invece,* $n = 2$, *si ha*

$$\lim u(x) = a, \quad |x| \to \infty. \tag{34}$$

$$D^\alpha u(x) = O(1/|x|^{1+|\alpha|}), \quad |x| \to \infty \ (|\alpha| \geqslant 1). \tag{35}$$

Dimostrazione. Eseguendo la trasformazione di Kelvin (32), si ottiene una funzione $u^*(x^*)$ armonica in $U_R\{\setminus 0\}$ che soddisfa, per $|x^*| \to 0$, la condizione

$$u^*(x^*) = \frac{1}{|x^*|^{n-2}} \begin{cases} o(1), & \text{se } n \geqslant 3, \\ O(1), & \text{se } n = 2, \end{cases}$$

cioè in entrambi i casi si ha

$$u^*(x^*) = o(|\mathscr{E}_n(x^*)|), \quad |x^*| \to 0.$$

Secondo il teorema dell'eliminazione delle singolarità di una funzione armonica (si veda il § 24.6) concludiamo che la funzione $u^*(x^*)$ è armonica nella sfera U_R. Eseguendo la trasformazione di Kelvin inversa, per la funzione $u(x)$ si ottiene la seguente rappresentazione:

$$u(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} u^*\left(\frac{R^2}{|x|^2} x\right),$$

dalla quale derivano le formule (33)-(35). Il teorema è dimostrato.

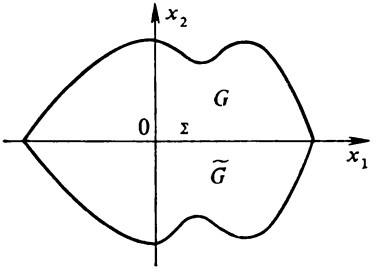


Fig. 80.

In modo analogo, per $n = 2$, possiamo dimostrare (cfr. il § 24.5) che, *se* $u(x)$ *è armonica nella regione* G_1, *continua su* $\bar{G}_1$ *ed* $u(x) = O(1)$, $|x| \to \infty$, *si ha*

$$|u(x)| \leqslant \max_{x \in S} |u(x)|, \quad x \in \bar{G}_1. \tag{36}$$

11. Esercizi. a) Utilizzando il teorema della media (si veda il § 24.3), dimostrare la seguente modificazione di questo teorema: se una funzione $u(x)$ è armonica in una sfera U_R e continua su $\bar{U}_R$, si ha $u(0) = \frac{n}{\sigma_n R^n} \int_U u(x)\, dx$.

b) Utilizzando a), dimostrare il teorema di Liouville: se una funzione $u(x)$ è armonica in R^n e limitata sopra (o sotto), si ha $u(x) =$ costante.

c) Utilizzando l'enunciato b) del § 24.8, dimostrare il seguente analogo del principio di simmetria di Riemann-Schwartz: supponiamo che la frontiera di una regione G contenga un insieme aperto Σ appartenente al piano $x_n = 0$ e sia $u(x)$ una funzione armonica in G che si annulla in Σ. Allora il prolungamento dispari della funzione $u(x)$ nella regione $\widetilde{G}$, simmetrica di G, rispetto al piano $x_n = 0$ è una funzione armonica nella regione $G \cup \Sigma \cup \widetilde{G}$ (fig. 80).

d) Dimostrare il seguente teorema: se u è un funzionale continuo lineare su $\mathscr{D}(G)$ (si veda il § 5.5, osservazione) e soddisfa l'equazione di Laplace nella regione G, allora u è una funzione armonica in G.

e) Utilizzando d), dimostrare che se una funzione generalizzata u soddisfa la condizione di Cauchy-Riemann $\partial u/\partial \bar{z} = 0$ in una regione $G \subset R^2$, questa funzione è analitica in G.

f) Utilizzando il metodo del § 24.9, dimostrare il teorema di Liouville per le funzioni analitiche.

g) Dimostrare la formula di Green (5) per le funzioni che sono armoniche in $G_1 = R^n \setminus \overline{G}$, e che hanno una derivata normale regolare su $S \in C^2$ ed $u(\infty) = 0$.

§ 25. *Funzioni sferiche*

Consideriamo ancora una classe di funzioni speciali che è importante per la fisica matematica.

1. Definizione di funzioni sferiche. Si dice *funzione sferica* (*armonica sferica*) di ordine $l = 0, 1, \ldots$ ogni polinomio armonico omogeneo di grado l considerato su una sfera unitaria $S_1 \subset R^n$. Dunque, tra le funzioni sferiche $Y_l(s)$, $s \in S_1$, di ordine l, ed i polinomi armonici omogenei $u_l(x)$, $x \in R^n$, l'uguaglianza

$$Y_l(s) = u_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \quad s = \frac{x}{|x|}, \tag{1}$$

stabilisce una relazione biunivoca.

Le funzioni sferiche Y_l ed $Y_{l'}$, di differenti ordini sono ortogonali in $\mathscr{L}_2(S_1)$, e cioè:

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S_1} Y_l(s)\, Y_{l'}(s)\, ds = 0, \quad l \neq l'. \tag{2}$$

Infatti, applicando per la sfera U_1 la formula di Green (8) del § 21.2 ai polinomi armonici

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

si ottiene

$$0 = \int_{S_1} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial (|x|^l Y_l)}{\partial \boldsymbol{n}} - |x|^l Y_l \frac{\partial (|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial \boldsymbol{n}} \right] ds =$$

$$= \int_{S_1} \left[Y_{l'} \frac{\partial (r^l Y_l)}{\partial r} - Y_l \frac{\partial (r^{l'} Y_{l'})}{\partial r} \right] ds = (l - l') \int_{S_1} Y_l(s)\, Y_{l'}(s)\, ds,$$

come volevasi dimostrare.

A titolo d'esempio, calcoliamo tutte le funzioni sferiche Y_l, $l = 0, 1, \ldots$, sulla circonferenza S_1 ($n = 2$). Conviene farlo in coordinate polari (r, φ), $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Applicando l'ope-

ratore di Laplace al polinomio armonico

$$u_l(x) = r^l Y_l(\varphi) \tag{3}$$

(si veda la (15), § 3.2), per la funzione sferica Y_l si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$Y_l'' + l^2 Y_l = 0,$$

da cui

$$Y_l(\varphi) = a_l \cos l\varphi + b_l \sin l\varphi, \quad l = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Dunque, le funzioni sferiche su una circonferenza sono funzioni trigonometriche. Qui, in virtù delle (3) e (4), si ha

$$u_l(x) = r^l (a_l \cos l\varphi + b_l \sin l\varphi) = a_l Re\, z^l + b_l \mathrm{Im}\, z^l,$$
$$z = x_1 + ix_2,$$

espressione che dà la forma generale di un polinomio armonico omogeneo di ordine l in R^2.

Il nostro compito è di calcolare tutte le funzioni sferiche Y_l, $l = 0, 1, \ldots$, sulla sfera S_1, per $n = 3$.

2. Equazione differenziale per le funzioni sferiche. Troviamo l'equazione differenziale per le funzioni sferiche sulla sfera S_1, per $n = 3$, in coordinate sferiche (r, θ, φ), $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Applicando al polinomio

$$u_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi) \tag{5}$$

l'operatore di Laplace (si veda la (14) del § 3.2), per la funzione sferica Y_l si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_l}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_l}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y_l = 0. \tag{6}$$

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (6) nella classe di funzioni $C^\infty(S_1)$.

Affinché la funzione Y_l sia una funzione sferica di ordine l è necessario e sufficiente che questa funzione appartenga alla classe $C^\infty(S_1)$ e soddisfi l'equazione (6).

Abbiamo già dimostrato la necessità delle condizioni. Dimostriamo ora la sufficienza di queste condizioni. Supponiamo che la funzione $Y_l \in C^\infty(S_1)$ sia la soluzione dell'equazione (6). Allora la funzione u_l costruita mediante la formula (5) soddisfa l'equazione di Laplace in coordinate sferiche e, quindi, è armonica in $R^3 \setminus \{0\}$. Inoltre, questa funzione è limitata in un intorno del punto $x = 0$. In base al teorema dell'eliminazione delle singolarità di una funzione armonica (si veda il § 24.6), la funzione u_l è armonica in R^3. Da ciò, utilizzando l'analogo di teorema di Liouville (si veda il § 24.9), concludiamo che $u_{l(x)}$ è un polinomio armonico omogeneo di ordine l. Ciò significa che la funzione Y_l è una funzione sferica di ordine l.

Per trovare soluzioni dell'equazione (6) applichiamo il metodo di Fourier. In conformità con lo schema generale di questo metodo [1] cerchiamo la soluzione Y_l dell'equazione (6) nella forma del prodotto

$$Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\cos\theta)\,\Phi(\varphi). \tag{7}$$

Sostituendo l'espressione (7) nell'equazione (6) e dividendola per $\mathcal{P}\Phi/\sin^2\theta$, si ottiene

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\mathcal{P}(\cos\theta)}{d\theta}\right] + l(l+1)\sin^2\theta\,\mathcal{P}(\cos\theta)}{\mathcal{P}(\cos\theta)}. \tag{8}$$

Il primo membro dell'uguaglianza (8) non dipende da θ, mentre il secondo membro è indipendente da φ. Quindi, entrambi i membri non dipendono né da θ, né da φ, cioè sono valori costanti. Denotando questa costante con ν, dall'uguaglianza (8) per le funzioni ignote Φ e $\mathcal{P}$ e per il parametro ν, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\mathcal{P}(\cos\theta)}{d\theta}\right] + \left[l(l+1) - \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right]\mathcal{P}(\cos\theta) = 0. \tag{10}$$

Affinché la funzione (7) sia univocamente definita sulla sfera S_1, è necessario che Φ sia una funzione di periodo 2π. Ma queste soluzioni dell'equazione (9) si hanno solo per $\nu = m^2$, $m = 0, 1, \ldots$, ed inoltre

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}. \tag{11}$$

Dunque, il problema della determinazione delle funzioni sferiche è stato ridotto alla risoluzione dell'equazione (10), per $\nu = m^2$, $m = 0, 1, \ldots$ Introducendo in quest'equazione una nuova variabile $\mu = \cos\theta$, per la funzione $\mathcal{P}(\mu)$ si ottiene la seguente equazione:

$$-[(1-\mu^2)\mathcal{P}']' + \frac{m^2}{1-\mu^2}\mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}. \tag{12}$$

Le soluzioni dell'equazione (12) nei punti ± 1 debbono assumere valori finiti $|\mathcal{P}(\pm 1)| < \infty$.

3. Polinomi di Legendre. Per $m = 0$, l'equazione (12) assume la forma

$$[(1-\mu^2)\mathcal{P}']' + l(l+1)\mathcal{P} = 0. \tag{13}$$

Verifichiamo se i polinomi

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2-1)^l, \quad l = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

detti *polinomi di Legendre*, soddisfano l'equazione (13). L'uguaglianza (14) è detta *formula di Rodrigues*.

[1] Più in dettaglio questo metodo è esposto nei §§ 26 e 32.

Infatti, ponendo $W_l = (\mu^2 - 1)^l$ e derivando l'identità

$$(\mu^2 - 1)\, W_l' - 2l\mu W_l = 0$$

$l + 1$ volte, si ottiene

$$(\mu^2 - 1)\, W_l^{(l+2)} + 2\mu W_l^{(l+1)} - l\,(l+1)\, W_l^{(l)} = 0.$$

Dunque, la funzione $W_l^{(l)}$ e quindi il polinomio $\mathcal{P}_l$, soddisfano l'equazione (13).

Scriviamo i primi quattro polinomi di Legendre

$$\mathcal{P}_0(\mu) = 1, \quad \mathcal{P}_1(\mu) = \mu,$$

$$\mathcal{P}_2(\mu) = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}, \quad \mathcal{P}_3(\mu) = \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu.$$

I grafici di queste funzioni sono riportati nella fig. 81.

Dalla formula (14) segue direttamente che

$$\mathcal{P}_l(1) = 1. \tag{15}$$

Il polinomio di Legendre $\mathcal{P}_l$ è l'unica soluzione linearmente indipendente dell'equazione (13) *nella classe* C^2 ($[-1, 1]$).

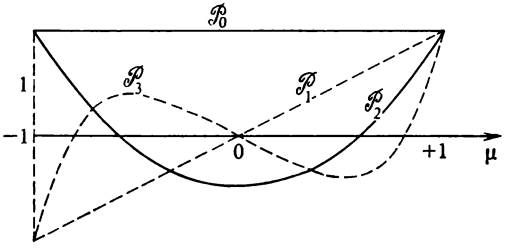


Fig. 81.

Infatti, per ogni soluzione $\mathcal{P} \in C^2([-1, 1])$ dell'equazione (13), in virtù della formula di Ostrogradskij-Liouville (si veda la (5) del § 22.1) per $p(\mu) = 1 - \mu^2$ è valida la relazione

$$\mathcal{P}_l'(\mu)\,\mathcal{P}(\mu) - \mathcal{P}_l(\mu)\,\mathcal{P}'(\mu) = \frac{a}{1-\mu^2}, \quad |\mu| < 1,$$

da cui segue che $a = 0$. Per questa ragione il determinante wronskiano per le soluzioni $\mathcal{P}_l$ e $\mathcal{P}$ si annulla identicamente e, quindi, le soluzioni $\mathcal{P}_l$ e $\mathcal{P}$ sono linearmente dipendenti.

I polinomi di Legendre formano un sistema ortogonale in $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

Infatti, dato che il polinomio di Legendre $\mathcal{P}_l(\mu)$ soddisfa l'equazione (12) per $m = 0$, allora, in virtù delle (11) e (7), $\mathcal{P}_l(\cos\theta) \in C^\infty(S_1)$ e soddisfa l'equazione (6). Di conseguenza, $\mathcal{P}_l$ è una funzione sferica di ordine l (si veda il § 25.2). Ma le funzioni sferiche di differenti ordini sono ortogonali in $\mathcal{L}_2(S_1)$ (si veda il § 25.1) e,

quindi, si ha

$$2\pi \int_{-1}^{1} \mathcal{P}_l(\mu)\,\mathcal{P}_{l'}(\mu)\,d\mu = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos\theta)\,\mathcal{P}_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0, \qquad l \neq l'.$$

Osservazione. Il polinomio di Legendre $\mathcal{P}_l$ è un'autofunzione dell'operatore $-[(1-\mu^2)\mathcal{P}']'$ corrispondente al semplice autovalore $\lambda = l(l+1)$. Come condizioni di frontiera si hanno le condizioni di finitezza della soluzione $\mathcal{P}(\mu)$ nei punti ± 1. Notiamo, che la funzione $1-\mu^2$ si annulla alle estremità dell'intervallo principale $(-1, 1)$ e, quindi, non soddisfa le condizioni del § 22.

4. Funzione generatrice. Siano $x = (r, \theta, \varphi)$ ed $y = (0, 0, 1)$. Sviluppiamo la funzione

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}} \tag{16}$$

in una serie rispetto alle potenze di r:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(\cos\theta)\,r^l. \tag{17}$$

La serie (17) è convergente per $|r| < 1$ e $\theta \in [0, \pi]$, e questa serie può essere derivata termine a termine un numero infinito di volte rispetto a r e θ, ed inoltre le serie risultanti saranno uniformemente convergenti in (r, θ) su $[-r_0, r_0] \times [0, \pi]$ per qualunque $r_0 < 1$. Applicando termine a termine all'uguaglianza (17) l'operatore di Laplace e tenendo conto del fatto che la funzione (16) è armonica nella sfera $|x| < 1$, per tutti i valori di $r \in (0, 1)$ si ottiene

$$0 = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta[a_l(\cos\theta)\,r^l] = \sum_{l=0}^{\infty} r^{l-2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{da_l}{d\theta}\right) + l(l+1)\,a_l\right].$$

Ne segue che ogni termine dell'ultima somma si annulla e, di conseguenza, le funzioni $a_l(\mu)$ soddisfano l'equazione (13). Per questa ragione $a_l(\mu) = C_l\mathcal{P}_l(\mu)$ (si veda il § 25.3) e lo sviluppo (17) assume la forma

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l\mathcal{P}_l(\cos\theta)\,r^l. \tag{18}$$

Per trovare le costanti C_l poniamo nella (18) $\theta = 0$ ed utilizziamo l'uguaglianza $\mathcal{P}_l(1) = 1$. Come risultato, si ottiene

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l,$$

da cui segue che $C_l = 1$.

Dunque, è valido lo sviluppo

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu)\, r^l, \quad |r| < 1. \tag{19}$$

La funzione $(1 - 2r\mu + r^2)^{-1/2}$ è detta *funzione generatrice per i polinomi di Legendre.*

Dalla formula (19) è facile ottenere relazioni di ricorrenza tra i polinomi di Legendre:

$$(l+1)\,\mathcal{P}_{l+1}(\mu) - (2l+1)\,\mu\mathcal{P}_l(\mu) + l\mathcal{P}_{l-1}(\mu) = 0. \tag{20}$$

$$(2l+1)\,\mathcal{P}_l(\mu) = \mathcal{P}'_{l+1}(\mu) - \mathcal{P}'_{l-1}(\mu). \tag{21}$$

Per farlo, bisogna derivare l'identità (19) rispetto a r e μ e moltiplicare poi per $1 - 2r\mu + r^2$, si ottengono così le identità

$$(\mu - r)\sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu)\, r^l = (1 - 2r\mu + r^2)\sum_{l=0}^{\infty} l\mathcal{P}_l(\mu)\, r^{l-1},$$

$$r\sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu)\, r^l = (1 - 2r\mu + r^2)\sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}'_l(\mu)\, r^l.$$

Confrontando i coefficienti delle potenze uguali di r, si ottengono le relazioni (20) e

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \mathcal{P}'_{l-1}(\mu) - 2\mu\mathcal{P}'_l(\mu) + \mathcal{P}'_{l+1}(\mu). \tag{22}$$

Derivando le uguaglianze (20), abbiamo

$$(l+1)\,\mathcal{P}'_{l+1}(\mu) - (2l+1)\,\mathcal{P}_l(\mu) - (2l+1)\,\mu\mathcal{P}'_l(\mu) + l\mathcal{P}'_{l-1}(\mu) = 0.$$

Eliminando, in questa relazione e nella relazione (22), il prodotto $\mu\mathcal{P}'_l(\mu)$, si ottengono le uguaglianze (21).

Dimostriamo la formula

$$\|\mathcal{P}_l\|^2 = \int_{-1}^{1} \mathcal{P}_l^2(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2l+1}. \tag{23}$$

Per ciò, esprimiamo uno dei fattori di $\mathcal{P}_l$ della funzione integranda in termini di $\mathcal{P}_{l-1}$ e $\mathcal{P}_{l-2}$ mediante la formula (20). Utilizzando l'ortogonalità dei polinomi $\mathcal{P}_l$ e $\mathcal{P}_{l-2}$, si ottiene

$$\|\mathcal{P}_l\|^2 = \int_{-1}^{1} \mathcal{P}_l\mathcal{P}_l\, d\mu = \int_{-1}^{1} \mathcal{P}_l\left(\frac{2l-1}{l}\,\mu\mathcal{P}_{l-1} - \frac{l-1}{l}\,\mathcal{P}_{l-2}\right) d\mu =$$

$$= \frac{2l-1}{l}\int_{-1}^{1} \mu\mathcal{P}_l\mathcal{P}_{l-1}\, d\mu.$$

Esprimendo il prodotto $\mu \mathcal{P}_l$ mediante la formula (20) ed utilizzando l'ortogonalità dei polinomi $\mathcal{P}_{l-1}$ e $\mathcal{P}_{l+1}$, si ottiene

$$\| \mathcal{P}_l \|^2 = \frac{2l-1}{l} \int_{-1}^{1} \mathcal{P}_{l-1} \left(\frac{l+1}{2l+1} \mathcal{P}_{l+1} + \frac{l}{2l+1} \mathcal{P}_{l-1} \right) d\mu =$$

$$= \frac{2l-1}{2l+1} \| \mathcal{P}_{l-1} \|^2,$$

da cui segue la formula (23):

$$\| \mathcal{P}_l \|^2 = \frac{2l-1}{2l+1} \frac{2l-3}{2l-1} \cdots \frac{1}{3} \| \mathcal{P}_0 \|^2 = \frac{2}{2l+1}.$$

Il sistema di polinomi di Legendre $\mathcal{P}_l$, $l = 0, 1, \ldots$, *è completo in* $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

Quest'enunciato segue dal teorema del § 1.9 e dal teorema di Weierstrass (si veda il § 1.3), conformemente al quale un insieme di polinomi e, di conseguenza, un insieme di combinazioni lineari di polinomi di Legendre è denso in $C([-1, 1])$ e, quindi, anche in $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

Dunque, ogni funzione $f \in \mathcal{L}_2(-1, 1)$ può essere sviluppata in serie di Fourier rispetto ai polinomi di Legendre,

$$f(\mu) = \sum_{l=0} \frac{2l+1}{2} (f, \mathcal{P}_l) \mathcal{P}_l(\mu),$$

che converge in $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ (si veda il § 1.9).

5. Funzioni di Legendre associate. Verifichiamo se le funzioni

$$\mathcal{P}_l^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \mathcal{P}_l^m(\mu), \quad l = 0, 1, \ldots; \quad m = 0, 1, \ldots, l, \tag{24}$$

dette *funzioni di Legendre associate*, soddisfano l'equazione (12).

Infatti, se si compie una sostituzione nell'equazione (12)

$$\mathcal{P}(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} z(\mu),$$

per la funzione z si ottiene l'equazione

$$(1 - \mu^2) z'' - 2\mu (m + 1) z' + (l^2 + l - m^2 - m) z = 0. \tag{25}$$

D'altra parte, derivando m volte l'equazione (13), possiamo vedere che la derivata $\mathcal{P}_l^{(m)}$ soddisfa l'equazione (25). Di conseguenza, le funzioni di Legendre associate $\mathcal{P}_l^m$ soddisfano l'equazione (12).

Moltiplicando l'equazione (25) per $(1 - \mu^2)^m$, riscriviamola nella forma

$$[(1-\mu^2)^{m+1} \mathcal{P}_l^{(m+1)}]' = -(l-m)(l+m+1)(1-\mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)}. \tag{26}$$

Per ogni $m \geqslant 0$ *il sistema di funzioni di Legendre associate* $\mathcal{P}_l^m$, $l = m, m + 1, \ldots$, *è ortogonale in* $\mathcal{L}_2(-1, 1)$, *ed inoltre*

$$\| \mathcal{P}_l^m \|^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \tag{27}$$

Quest'asserzione è valida, per $m = 0$, per i polinomi di Legendre $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l^0$ (si vedano i §§ 25.3 e 25.4). Da ciò, utilizzando la definizione della funzione $\mathcal{P}_l^m$ e la formula (26), nella quale m è sostituito con $m - 1$, si ottiene

$$(\mathcal{P}_l^m, \mathcal{P}_{l'}^m) = \int_{-1}^{1} \mathcal{P}_l^m \mathcal{P}_{l'}^m \, d\mu = \int_{-1}^{1} (1-\mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)} \mathcal{P}_{l'}^{(m)} \, d\mu =$$

$$= (1-\mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)} \mathcal{P}_{l'}^{(m-1)} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathcal{P}_{l'}^{(m-1)} [(1-\mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)}]' \, d\mu =$$

$$= (l-m-1)(l+m) \int_{-1}^{1} (1-\mu^2)^{m-1} \mathcal{P}_l^{(m-1)} \mathcal{P}_{l'}^{(m-1)} \, d\mu =$$

$$= (l+m)(l-m+1)(\mathcal{P}_l^{m-1}, \mathcal{P}_{l'}^{m-1}) =$$

$$= (l+m)(l+m-1)(l-m+1)(l-m+2)(\mathcal{P}_l^{m-2}, \mathcal{P}_{l'}^{m-2}) =$$

$$= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (\mathcal{P}_l, \mathcal{P}_{l'}) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l-1} \delta_{ll'},$$

come volevasi dimostrare.

Per ogni $m \geqslant 0$ il sistema di funzioni di Legendre associate $\mathcal{P}_l^m$, $l = m, m+1, \ldots,$ è completo in $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

Infatti, consideriamo una funzione arbitraria f appartenente alla classe $\mathcal{D}(-1, 1)$ densa in $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ (si veda il § 1.7). In questo caso si ha

$$\psi(\mu) = f(\mu)(1-\mu^2)^{-m/2} \in \mathcal{D}(-1, 1).$$

Secondo il teorema di Weierstrass (si veda il § 1.3), la funzione ψ può essere approssimata a piacere in $C([-1, 1])$ mediante polinomi e, di conseguenza, mediante combinazioni lineari delle derivate $\mathcal{P}_l^{(m)}$, $l = m, m+1, \ldots$ Ne segue che la funzione f può essere approssimata a piacere in $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ mediante combinazioni di funzioni del sistema $\mathcal{P}_l^m$, $l = m, m+1, \ldots$, il che, in virtù del teorema del § 1.9, dimostra la completezza di questa sistema.

6. Funzioni sferiche. In base alle (7), (11) e (24) è stato ottenuto il seguente insieme di soluzioni dell'equazione (6):

$$Y_l^m(\theta, \varphi) =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi, & m = 0, 1, \ldots, l; \\ \mathcal{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\sin|m|\varphi, & m = -1, -2, \ldots, -l, \; l = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{28}$$

o, in forma complessa:

$$\tilde{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \mathcal{P}_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \tag{28'}$$

Queste funzioni appartengono, evidentemente, alla classe $C^\infty(S_1)$.

Perciò $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sono *funzioni sferiche* (si veda il § 25.2).

La distribuzione di segni della *funzione sferica* $Y_3^2(\theta, \varphi) = 15 \sin^2\theta \cos\theta \cos 2\varphi$ su una sfera unitaria è rappresentata nella fig. 82.

Le funzioni sferiche Y_l^m, $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$, di ordine l sono linearmente indipendenti, e le loro combinazioni lineari

$$Y_l(s) = \sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} Y_l^m(s) \tag{29}$$

a coefficienti arbitrari $a_l^{(m)}$ sono anch'esse funzioni sferiche di ordine l.

Le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ *formano un sistema ortogonale e completo in* $\mathcal{L}_2(S_1)$, *ed inoltre*

$$\| Y_l^m \|^2 = 2\pi \frac{1+\delta_{0m}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}. \tag{30}$$

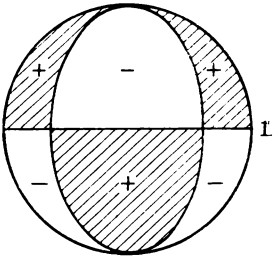


Fig. 82.

Infatti, il sistema trigonometrico $\{e^{im\varphi}, m = 0, 1, \ldots\}$ è ortogonale e completo in $\mathcal{L}_2(0, 2\pi)$ e per ogni $m = 0, 1, \ldots$ il sistema di funzioni di Legendre associate $\{\mathcal{P}_l^m(\mu), l = m, m+1, \ldots\}$, è ortogonale e completo in $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ (si veda il § 25.5). Per questa ragione, in virtù del lemma del § 1.9, il sistema di funzioni

$$\{\mathcal{P}_l^m(\mu)\, e^{im\varphi},\ l = 0, 1, \ldots, m = 0, 1, \ldots, l\}$$

è ortogonale e completo in $\mathcal{L}_2[(-1, 1) \times (0, 2\pi)]$, e, di conseguenza, il sistema di funzioni sferiche $\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$ è ortogonale e completo in $\mathcal{L}_2(S_1)$. La formula (30) segue dalla (27):

$$\| Y_l^m \|^2 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [Y_l^m(\theta, \varphi)]^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_{-1}^{1} [\mathcal{P}_l^{|m|}(\mu)]^2\, d\mu \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{Bmatrix} d\varphi = 2\pi \frac{1+\delta_{0m}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}.$$

La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $\mathcal{L}_2(S_1)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$f(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} Y_l^m(s) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s), \tag{31}$$

convergente in $\mathcal{L}_2(S_1)$. In conformità con la (30) i coefficienti $a_l^{(m)}$ della serie (31) sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0m})} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, Y_l^m(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{32}$$

Sia $Q_l(s)$ una funzione sferica qualsiasi di ordine l. In questo caso si ha $(Q_l, Y_{l'}) = 0$, $l \neq l'$ (si veda il § 25.1), e nello sviluppo (31) per la funzione Q_l resta un solo termine Y_l in modo che $Q_l = Y_l$. Dunque, abbiamo dimostrato che:

Le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ *esauriscono tutte le funzioni sferiche linearmente indipendenti; la formula* (29) *dà l'espressione generale per una funzione sferica di ordine* l.

Osservazione. Le funzioni sferiche Y_l^m, $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$, sono autofunzioni dell'operatore di Beltrami,

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}, \quad Y\in C^\infty(S_1),$$

che corrispondono all'autovalore $\lambda = l(l+1)$ di molteplicità $2l + 1$.

7. Formula di Laplace. Sia $Y_l(s)$ una funzione sferica di ordine l. Applicando la formula di Green (5) del § 24.1 per la sfera U_1 al polinomio armonico $r^l Y_l(s)$, si ottiene per $r < 1$

$$r^l Y_l(s) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left\{\frac{\partial\left[|s'|^l Y_l(s')\right]}{\partial n_{s'}}\frac{1}{|x-s'|}-\right.$$

$$\left.-|s'|^l Y_l(s')\frac{\partial}{\partial n_{s'}}\frac{1}{|x-s'|}\right\}ds'. \qquad (33)$$

Ma, in base alla (19), si ha

$$\frac{1}{|x-s'|}\Big|_{S_1} = \frac{1}{\sqrt{1-2r(s,s')+r^2}} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{P}_k((s,s'))\,r^k, \qquad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{s'}}\frac{1}{|x-s'|}\Big|_{S_1} = \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2r\rho(s,s')+r^2}}\Big|_{\rho=1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}_k((s,s'))\frac{r^k}{\rho^{k+1}}\Big|_{\rho=1} = -\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\mathcal{P}_k((s,s'))\,r^k, \qquad (35)$$

ed inoltre le serie (34) e (35) sono uniformemente convergenti rispetto a (s, s') per ogni $r < 1$ (si veda il § 24.4). Sostituendo le espressioni (34) e (35) nella formula (33) ed eseguendo l'integrazione termine a termine, si ottiene

$$r^l Y_l(s) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left[lY_l(s')\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}_k((s,s'))\,r^k+\right.$$

$$\left.+Y_l(s')\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\mathcal{P}_k((s,s'))\,r^k\right]ds' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}r^k\int_{S_1}(l+k+1)\,Y_l(s')\,\mathcal{P}_k((s,s'))\,ds', \quad r<1.$$

Da ciò, visto che r è arbitrario, risulta la seguente importante formula integrale:

$$\int_{S_1} Y_l(s')\,\mathcal{P}_k((s, s'))\,ds' = \frac{4\pi}{2l+1} Y_l(s)\,\delta_{lk}. \tag{36}$$

Applicando le formule di sviluppo (31)-(32) alla funzione $f(s') = \mathcal{P}_l(s, s')$ e tenendo conto della formula (36), si ottiene la *formula di somma per i polinomi di Legendre*:

$$\mathcal{P}_l((s, s')) = \sum_{m=-l}^{l} \frac{2}{1+\delta_{0m}} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} Y_l^m(s)\,Y_l^m(s'). \tag{37}$$

Sostituiamo s con s' nell'uguaglianza (31). Moltiplicando quest'uguaglianza per $\mathcal{P}_k((s, s'))$, integrandola termine a termine rispetto a $s' \in S_1$ ed utilizzando la formula (36), si ottiene la seguente formula:

$$Y_k(s) = \frac{2k+1}{4\pi} \int_{S_1} f(s')\,\mathcal{P}_k((s, s'))\,ds'. \tag{38}$$

La formula (38) dà subito tutti i coefficienti della funzione sferica Y_k che partecipa allo sviluppo (31) di una funzione arbitraria $f \in \mathcal{L}_2(S_1)$. Questa formula è detta *formula di Laplace*.

8. **Funzioni solide.** Costruiamo soluzioni dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in R^3 mediante il metodo di separazione delle variabili in coordinate sferiche (r, θ, φ). In queste coordinate l'equazione di Laplace ha la seguente forma:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{39}$$

dove $\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = u(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$.

In conformità con lo schema generale del metodo di Fourier troviamo la soluzione $\tilde{u}$ dell'equazione (39) sotto forma del prodotto

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}(r)\,Y(\theta, \varphi). \tag{40}$$

Sostituendo quest'espressione nella (39), per le funzioni $\mathcal{R}$ ed Y, si ottengono le seguenti equazioni:

$$(r^2 \mathcal{R}')' - \mu \mathcal{R} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \mu Y = 0, \tag{42}$$

dove μ è un parametro ignoto, ed inoltre $Y \in C^\infty(S_1)$.

Per $\mu = l(l+1)$, $l = 0, 1, \ldots$, l'equazione (42) ha soluzioni appartenenti alla classe $C^\infty(S_1)$, e queste soluzioni sono funzioni sferiche Y_l^m, $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$ (si veda il § 25.6). L'equazione

(41) per $\mu = l\,(l+1)$ ha due soluzioni linearmente indipendenti: r^l e r^{-l-1}.

Dunque, in virtù della (40), l'equazione di Laplace ha la seguente serie di soluzioni linearmente indipendenti:

$$r^l Y_l(\theta, \varphi), \quad r^{-l-1} Y_l(\theta, \varphi), \quad l = 0, 1, \ldots, \tag{43}$$

dove $r^l Y_l$ è un polinomio armonico di grado l e $r^{-l-1} Y_l$ è una funzione armonica in $R^3 \setminus \{0\}$. Le funzioni (43) sono dette *funzioni solide*.

9. Esercizi. a) Dimostrare che $\mathcal{P}_l(-\mu) = (-1)^l \mathcal{P}_l(\mu)$.

b) Utilizzando la formula (19), dimostrare la disuguaglianza $|\mathcal{P}_l(\mu)| \leqslant 1$, $\mu \in [-1, 1]$.

c) Utilizzando le relazioni di ricorrenza (20) e (21), dimostrare che le radici di $\mathcal{P}_l(\mu)$, $l \geqslant 1$, sono reali, semplici, appartengono a $(-1, 1)$ e che

d) le radici dei polinomi $\mathcal{P}_l(\mu)$ e $\mathcal{P}_{l+1}(\mu)$ si alternano.

e) Dimostrare l'identità

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi)^l \, d\varphi.$$

f) Utilizzando la formula (36), dimostrare il seguente *teorema di Funk-Kecke*: se $\mathcal{K}(\mu) \in \mathcal{L}_2(-1, 1)$ e $\int_{-1}^{1} \mathcal{K}(\mu)\, \mathcal{P}_k(\mu)\, d\mu \neq 0$, si ha che $\lambda_k = \dfrac{1}{2\pi \int_{-1}^{1} \mathcal{K}(\mu)\, \mathcal{P}_k(\mu)\, d\mu}$ e $Y_k^m(s)$, $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$ è l'autovalore e le corrispondenti autofunzioni dell'equazione integrale

$$\varphi(s) = \lambda \int_{S_1} \mathcal{K}[(s, s')]\, \varphi(s)\, ds'.$$

g) Utilizzando i risultati dell'esercizio e), nonché la formula c) del § 23.9, dimostrare che

$$\lim_{l \to \infty} \mathcal{P}_l\left(\cos\frac{x}{l}\right) = J_0(x).$$

§ 26. *Metodo di Fourier per il problema agli autovalori*

Per determinare gli autovalori e le autofunzioni degli operatori ellittici a più dimensioni che ammettono la separazione delle variabili, è utilizzato il *metodo di Fourier* (metodo di separazione delle variabili).

1. Schema generale del metodo di Fourier. Dividiamo le variabili indipendenti in due gruppi: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ed $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, e supponiamo che siano $G \subset R^n$ la regione di variazione di x e $D \subset R^m$ la regione di variazione di y. Denotiamo con S e Γ le frontiere di G e D, rispettivamente. Allora $(S \times \bar{D}) \cup (\bar{G} \times \Gamma)$ è la frontiera di $G \times D \subset R^{n+m}$.

Nella regione $G \times D$ consideriamo il seguente problema al contorno agli autovalori per l'equazione di tipo ellittico:

$$Lu + Mu = \lambda u, \tag{1}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S\times D} = 0, \quad \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\overline{G}\times\Gamma} = 0, \tag{2}$$

dove L e M sono operatori ellittici che sono indipendenti da y e x, rispettivamente; le funzioni α, β non dipendono da y e quelle γ, δ non dipendono da x.

Cerchiamo le autofunzioni del problema (1)-(2) nella forma di prodotto $X(x)\,Y(y)$,

$$u(x, y) = X(x)\,Y(y). \tag{3}$$

Sostituendo quest'espressione nell'equazione (1), si ottiene

$$Y(y)\,LX(x) + X(x)\,MY(y) = \lambda X(x)\,Y(y),$$

da cui segue che

$$\frac{LX(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{MY(y)}{Y(y)}. \tag{4}$$

Il primo membro dell'uguaglianza (4) è indipendente da y, mentre il secondo membro è indipendente da x. Di conseguenza, queste espressioni sono indipendenti da x e y, il che vuol dire che esse sono uguali alla costante. Denotando questa costante con μ e ponendo $\nu = \lambda - \mu$, dalla (4) vengono ottenute due equazioni:

$$LX = \mu X, \tag{5}$$

$$MY = \nu Y. \tag{6}$$

Quindi, l'equazione (1) si divide in due equazioni, (5) e (6), o, come si dice, le *variabili sono state separate*; in questo processo è apparso un nuovo parametro incognito μ.

Per ottenere le condizioni di frontiera per le funzioni $X(x)$ e $Y(y)$, sostituiamo il prodotto $X(x)\,Y(y)$ nelle condizioni di frontiera (2) e si ottiene

$$\alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial n}\Big|_S = 0, \tag{7}$$

$$\gamma Y + \delta \frac{\partial Y}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0. \tag{8}$$

Dunque, il problema al contorno agli autovalori (1)-(2) si divide in due problemi al contorno agli autovalori (5)-(7) e (6)-(8) con un numero minore di variabili indipendenti. Denotiamo con μ_k, $X_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, e ν_j, $Y_j(y)$, $j = 1, 2, \ldots$, tutti gli autovalori e tutte le autofunzioni degli operatori L e M, rispettivamente. In virtù della (3)

$$\lambda_{kj} = \mu_k + \nu_j, \; u_{kj}(x, y) = X_k(x)\,Y_j(y), \quad k, j = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

sono gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno iniziale (1)-(2).

Osservazione. Supponiamo che i sistemi ortonormali di autofunzioni $\{x_k\}$ $\{Y_j\}$ siano completi in $\mathscr{L}_2(G)$ e $\mathscr{L}_2(D)$, rispettivamente (si veda il § 21.4). Allora, secondo il lemma del § 1.9, il sistema di autofunzioni $\{X_k Y_j\}$ è ortonormale e completo in $\mathscr{L}_2(G \times D)$. In questo caso le formule (9) danno tutti gli autovalori e tutte le autofunzioni del problema al contorno (1)-(2).

2. Esempi.

a) Cosideriamo il seguente problema al contorno agli autovalori per il rettangolo $\Pi = (0, l) \times (0, m)$ con frontiera L (fig. 83):

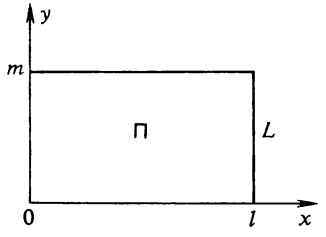


Fig. 83.

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u, \quad u|_L = 0. \quad (10)$$

In conformità con lo schema generale del metodo di Fourier questo problema si scinde in due problemi al contorno unidimensionali:

$$-X'' = \mu X, \; X(0) = X(l) = 0; \quad (11)$$

$$-Y'' = \nu Y, \; Y(0) = Y(m) = 0. \quad (12)$$

Gli autovalori e le autofunzioni di questi problemi al contorno sono stati calcolati nel § 22.4:

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad (13)$$

$$\nu_j = \left(\frac{j\pi}{m}\right)^2, \quad Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sin\frac{j\pi y}{m}, \quad j = 1, 2, \ldots \quad (14)$$

In conformità con le formule (9), dalle (13) e (14) si ottengono i seguenti autovalori e le autofunzioni del problema al contorno (10):

$$\lambda_{kj} = \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}\right), \quad X_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{j\pi y}{m},$$
$$k, j = 1, 2, \ldots \quad (15)$$

Visto che i sistemi ortonormali delle autofunzioni $\{X_k\}$ e $\{Y_j\}$ costruite sono completi (si veda il § 22.3), in virtù dell'osservazione del § 26.1, il problema (10) non ha altri autovalori e altre autofunzioni. Notiamo che gli autovalori λ_{kj} possono ripetersi, cioè $\lambda_{kj} = \lambda_{k_0 j_0}$ per certe combinazioni dei numeri (k, j). Il numero di queste ripetizioni, uguale in numeri interi al numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} = \frac{k_0^2}{l^2} + \frac{j_0^2}{m^2},$$

dà la molteplicità dell'autovalore $\lambda_{k_0 j_0}$. Per esempio, per $l = m = 1$ la molteplicità di $\lambda_{47} = \lambda_{74} = \lambda_{18} = \lambda_{81}$ è uguale a 4 ($4^2 + 7^2 = 7^2 + 4^2 = 1^2 + 8^2 = 8^2 + 1^2$).

b) Consideriamo il seguente problema al contorno agli autovalori per un disco U_R (fig. 84):

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{S_R} = 0. \tag{16}$$

È meglio risolvere questo problema in coordinate polari $x = r \times \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. In queste coordinate il problema (16) per la funzione $\tilde{u}(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r, \sin\varphi)$ assume la forma (si veda il § 3.2)

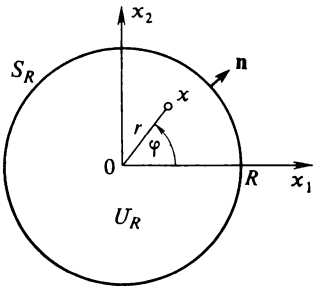


Fig. 84.

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \tilde{u},$$

$$\tilde{u}(R, \varphi) = 0. \tag{17}$$

Alla condizione di frontiera per $r = R$ è anche necessario aggiungere la condizione di frontiera per $r = 0$. Questa condizione consiste nel fatto che la funzione $\tilde{u}$ dev'essere limitata in un intorno del punto $r = 0$. Inoltre, la funzione $\tilde{u}$ dev'essere, evidentemente, di periodo 2π in φ.

Applicando al problema (17) il metodo di Fourier, per la funzione $\tilde{u}(r, \varphi) = \mathcal{R}(r)\,\Phi(\varphi)$ si ottengono due problemi al contorno unidimensionale:

$$-\Phi'' = \mu\Phi, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi); \tag{18}$$

$$r(r\mathcal{R}')' + (\lambda r^2 - \mu)\mathcal{R} = 0, \quad |\mathcal{R}(0)| < \infty. \quad \mathcal{R}(R) = 0. \tag{19}$$

Gli autovalori e le autofunzioni del problema (18) possono essere facilmente calcolati (gli autovalori sono funzioni trigonometriche)

$$\mu_k = k^2, \quad \Phi_k(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\varphi}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{20}$$

Inoltre, l'equazione (19) è l'equazione di Bessel (si veda il § 23). La soluzione $\mathcal{R}(r)$ limitata allo zero di quest'equazione per $\mu = k^2$ è espressa mediante la funzione di Bessel $J_k(\sqrt{\lambda}r)$. Per ottenere gli autovalori λ è necessario utilizzare la seconda condizione di frontiera (19), $J_k(\sqrt{\lambda}R) = 0$, cioè $\sqrt{\lambda}R = \mu_j^{(k)}$, dove $\mu_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots$, sono le radici positive della funzione di Bessel $J_k(\mu)$. Ne segue che

$$\lambda_{kj} = \frac{[\mu_j^{(k)}]^2}{R^2}, \quad \mathcal{R}_{kj}(r) = c_{kj} J_k\left(\mu_j^{(k)}\frac{r}{R}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

sono gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno per $\mu = k^2$. Scegliendo i fattori di normalizzazione c_{kj} tali che

$$\frac{1}{c_{kj}} = \sqrt{\int_0^R J_k^2\left(\mu_j^{(k)}\frac{r}{R}\right) r\,dr} = \frac{R}{\sqrt{2}}\,|J_k'(\mu_j^{(k)})|, \tag{22}$$

otteniamo un sistema ortonormale e completo $\{\mathcal{R}_{kj}\}$ in $\mathcal{L}_2[(0, R); r]$ (si veda il § 23.7).

Dalle (20), (21) e (22) concludiamo che

$$\lambda_{kj}=\frac{[\mu_j^{(k)}]^2}{R^2}, \quad X_{kj}(x)=\frac{J_k\left(\mu_j^{(k)}\frac{r}{R}\right)e^{ik\varphi}}{\sqrt{\pi}\,R\,|J_k'(\mu_j^{(k)})|}, \quad \begin{matrix} k=0,\ 1,\ \ldots, \\ j=1,\ 2,\ \ldots, \end{matrix} \tag{23}$$

sono gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno (17) e, quindi, anche del problema (16)[1].

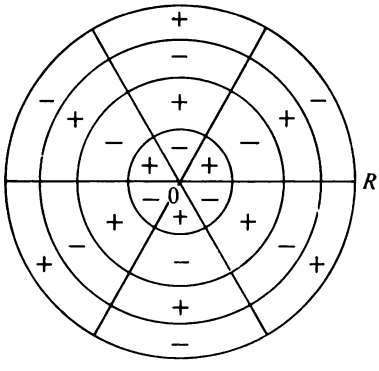


Fig. 85.

Gli zeri dell'autofunzione $\operatorname{Im} X_{34}(x) = c_{34}J_3(\mu_4^{(3)}r/R)\sin 3\varphi$ sono riportati nella fig. 85.

Conformemente al lemma del § 1.9, il sistema di autofunzioni $\{X_{kj}\}$ è ortonormale e completo in $\mathcal{L}_2(U_R)$, e, quindi, il problema (16) non ha altri autovalori ed altre autofunzioni.

c) Consideriamo il seguente problema al contorno agli autofunzioni per una sfera tridimensionale U_R:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{S_R} = 0. \tag{24}$$

È conveniente risolvere questo problema in coordinate sferiche (r, θ, φ), $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. In queste coordinate il problema (24) per la funzione $\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = u(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ assume la forma (si veda il § 3.2)

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}=\lambda u,$$

$$|\tilde{u}(0, \theta, \varphi)| < \infty, \quad \tilde{u}(R, \theta, \varphi) = 0, \tag{25}$$

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \tilde{u}(r, \theta, \varphi + 2\pi). \tag{26}$$

In conformità con lo schema generale del metodo di Fourier cerchiamo le autofunzioni del problema (25)-(26) nella forma del pro-

---

[1] A rigor di termini, per ora è stato solo stabilito che le funzioni X_{kj} soddisfano l'equazione (16) per $\lambda = \lambda_{kj}$ in $U_R \setminus \{0\}$. Ma dall'uguaglianza

$$J_k(r)\,e^{ik\varphi}\left(\frac{x_1+ix_2}{2}\right)^k \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(x_1^2+x_2^2)^p}{4^p\Gamma(p+k+1)\Gamma(p+1)}$$

(si veda il § 23.1) segue che $X_{kj} \in C^\infty(U_R)$ (cfr. il § 30.2). Per questa ragione l'equazione (16) sarà soddisfatta anche nel punto $x = 0$.

dotto $\mathcal{R}(r)\, Y(\theta, \varphi)$. Separando le variabili, per le funzioni Y e $\mathcal{R}$ si ottengono i seguenti problemi al contorno

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\mu Y=0,$$

$$Y\in C^{\infty}(S_1); \tag{27}$$

$$(r^2\mathcal{R}')'+(\lambda r^2-\mu)\,\mathcal{R}=0, \quad |\mathcal{R}(0)|<\infty, \quad \mathcal{R}(R)=0. \tag{28}$$

Per $\mu = l(l+1)$, $l = 0, 1, \ldots$ il problema (27) ammette soluzioni e queste soluzioni sono le funzioni sferiche Y_l^m, $m = 0, \pm 1 \ldots, \pm l$ (si veda il § 25.6). Per $\mu = l(l+1)$ l'equazione (28) per la funzione $\mathcal{R}_1 = \sqrt{r}\mathcal{R}$ si trasforma nell'equazione di Bessel (si veda il § 23)

$$r^2\mathcal{R}_1''+r\mathcal{R}_1'+\left[\lambda r^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathcal{R}_1=0.$$

Per questa ragione la soluzione dell'equazione (28), limitata per $r = 0$, è la funzione

$$\mathcal{R}(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r). \tag{29}$$

Per soddisfare la condizione di frontiera $\mathcal{R}(R) = 0$, è necessario porre nella (29) $\sqrt{\lambda}R = \mu_j^{(l+1/2)}$ dove $\mu_j^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}$ sono le radici positive della funzione di Bessel $J_{(l+1/2)}(\mu)$. Dunque,

$$\lambda_{ij}=\frac{\left[\mu_j^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}\right]^2}{R^2}, \quad X_{ljm}(x)=\frac{c_{ljm}}{\sqrt{r}}J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}\frac{r}{R}\right)Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$l=0,\ 1,\ \ldots,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm l, \tag{30}$$

sono gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno (24). Scegliendo i fattori di normalizzazione c_{ljm} tali che (si veda le formule (35) del § 23.7, e (30) del § 25.6

$$\frac{1}{c_{ljm}}=\sqrt{\int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}J^2_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}\frac{r}{R}\right)[Y_l^m(\theta,\varphi)]^2\,r\,dr\,d\theta\,d\varphi}=$$

$$=R\left|J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_j^{l+\frac{1}{2}}\right)\right|\sqrt{\pi\frac{1+\delta_{0m}(1+|m|)!}{2l+1\,(l-|m|)!}}, \tag{31}$$

e tenendo conto del fatto che le funzioni di Bessel sono ortogonali e complete in $\mathcal{L}_2[(0, R); r]$ (si veda il § 23.7), e che lo sono anche le funzioni sferiche in $\mathcal{L}_2(S_1)$ (si veda il § 25.6), concludiamo, in virtú del lemma del § 1.9, che il sistema di autofunzioni (30) è ortonormale

e completo in $\mathscr{L}_2(U_R)$ e, quindi, il problema (24) non ha altri autovalori ed altre autofunzioni.

In modo analogo possiamo anche considerare il problema al contorno

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u|_{S_R} = 0, \quad \alpha \geqslant 0.$$

§ 27. *Potenziale newtoniano*

Questo paragrafo è dedicato ad uno studio più dettagliato delle proprietà del potenziale newtoniano nello spazio tridimensionale (si veda il § 7.10). Questo potenziale è definito come la convoluzione di una funzione generalizzata ρ (densità) con la funzione $|x|^{-1}$:

$$V = \frac{1}{|x|} * \rho = -4\pi \mathscr{E}_3 * \rho. \tag{1}$$

Il potenziale V soddisfa l'equazione di Poisson

$$\Delta V = -4\pi\rho. \tag{2}$$

Le basi della teoria classica del potenziale sono state poste dal matematico russo A. M. Ljapunov [1] alla fine del XIX secolo.

1. Potenziale di volume. Se ρ è una funzione (assolutamente) integrabile su G e $\rho(x) = 0$, $x \in G_1 = R^3 \setminus \bar{G}$, il potenziale newtoniano V detto *potenziale di volume*, è espresso con l'integrale,

$$V(x) = \int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy \tag{3}$$

e rappresenta una funzione localmente integrabile in R^n (si veda il § 7.10, esempio c)).

Se $\rho \in C(G)$ e G è una regione limitata, il potenziale di volume V appartiene alla classe $C^1(R^3)$, è armonico in G_1 e

$$V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty.$$

Infatti, visto che G è una regione limitata e $\rho \in C(\bar{G})$, conformemente al teorema del § 1.6, l'integrale (3) appartiene a $C^1(R^3)$, e, secondo la formula (7) del § 1.6, si ha

$$V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty.$$

Per $x \notin \bar{G}$ il potenziale $V(x)$ ammette una derivazione continua sotto il segno d'integrale nella (3) un numero infinito di volte, di modo che $V \in C^\infty(G_1)$. Da ciò e dall'equazione (2) segue che $\Delta V = 0$, $x \in G_1$, cioè il potenziale V è una funzione armonica nella regione G_1, (conformemente al lemma del § 11.1).

Se $\rho \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$, si ha $V \in C^2(G)$.

Per dimostrarlo, consideriamo una sottoregione $G' \Subset G$ con frontiera S' regolare a tratti e con una normale esterna n' (fig. 86). Il potenziale V si scompone qui nella somma di due potenziali di volume V_1 e V_2, $V = V_1 + V_2$, dove

$$V_1(x) = \int_{G'} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy, \quad V_2(x) = \int_{G \setminus G'} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy.$$

Da quanto abbiamo dimostrato, $V_1 \in C^1(R^3)$, $V_2 \in C^\infty(G')$. Derivando il potenziale V_1 come una convoluzione, si ottiene (si veda il § 7.5, esempio c)

$$\operatorname{grad} V_1(x) = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{|x|} * \rho_1\right) = \frac{1}{|x|} * \operatorname{grad} \rho_1, \quad \rho_1 = \rho\theta_{G_1}. \tag{4}$$

Visto che $\rho_1 \in C^1(\bar{G}')$, secondo la formula (22) del § 6.5, abbiamo

$$\operatorname{grad} \rho_1 = \{\operatorname{grad} \rho_1\} - \rho n' \delta_{S'}.$$

Sostituendo l'espressione ottenuta nella (4) ed utilizzando la (3)

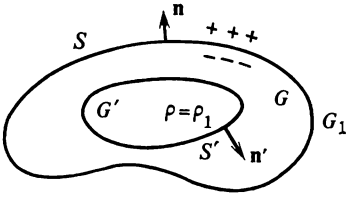


Fig. 86.

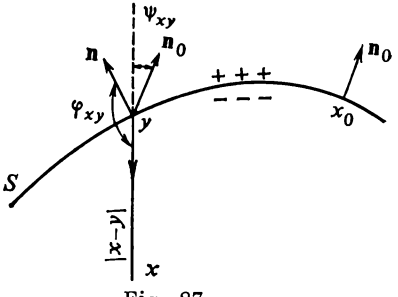


Fig. 87.

per il potenziale di volume e la (40) del § 7.10, per il potenziale di semplice strato, si ottiene

$$\operatorname{grad} V_1(x) = \frac{1}{|x|} * \{\operatorname{grad} \rho_1\} - \frac{1}{|x|} * \rho n' \delta_{S'} =$$

$$= \int_{G'} \frac{\operatorname{grad} \rho(y)}{|x-y|}\, dy - \int_{S'} \frac{\rho(y)\, n'}{|x-y|}\, dS_y. \tag{5}$$

Il primo termine del secondo membro della (5), essendo un potenziale di volume con densità $\operatorname{grad} \rho \in C(\bar{G}')$, appartiene alla classe $C^1(R^3)$, e il secondo alla classe $C^\infty(G')$. Di conseguenza, $\operatorname{grad} V_1 \in C^1(G')$, cioè $V_1 \in C^2(G')$. Ma allora si ha anche $V = V_1 + V_2 \in C^2(G')$ e, data l'arbitrarietà di $G' \Subset G$, $V \in C^2(G)$, come volevasi dimostrare.

2. Potenziali di semplice strato e di doppio strato. Siano S una superficie regolare a tratti a due facce [1] limitata; sia n la sua normale

[1] La faccia della superficie S adiacente a n è considerata positiva e la faccia opposta è negativa (figg. 86 e 87).

esterna e μ e ν funzioni continue su S. I potenziali newtoniani

$$V^{(0)} = \frac{1}{|x|} * \mu\delta_S \quad \text{e} \quad V^{(1)} = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S),$$

detti *potenziali di semplice strato* e *di doppio strato*, rispettivamente, sono espressi con gli integrali:

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|}\, dS_y, \tag{6}$$

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dS_y \tag{7}$$

e sono funzioni localmente integrabili in R^3 (si veda l'esempio d) del § 7.10). Questi potenziali soddisfano l'equazione di Poisson:

$$\Delta V^{(0)} = -4\pi\mu\delta_S, \quad \Delta V^{(1)} = 4\pi \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S). \tag{8}$$

Fissiamo il punto x_0 su S e sia n_0 la normale esterna a S. Derivando la formula (6) per $x \bar{\in} S$ lungo n_0 ed utilizzando l'uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{i=1}^{3} \cos(n_0 x_i) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^3} = \frac{\cos\psi_{xy}}{|x-y|^2}, \tag{9}$$

dove ψ_{xy} è l'angolo tra il vettore $y - x$ e la normale n_0 (fig. 87), si ottiene un'espressione per la derivata normale del potenziale di semplice strato:

$$\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial n_0} = \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{|x-y|}\, dS_y = \int_S \mu(y) \frac{\cos\psi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y, \quad x \bar{\in} S. \tag{10}$$

In modo analogo, in virtù dell'uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{i=1}^{3} \cos(n x_i) \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} = \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}, \tag{11}$$

dove φ_{xy} è l'angolo tra il vettore $x - y$ e la normale n (fig. 87) la formula (7) per il potenziale di doppio strato $V^{(1)}$ assume la forma

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y. \tag{12}$$

I potenziali $V^{(0)}$ e $V^{(1)}$ *sono funzioni armoniche fuori della superficie* S, $V^{(0)}$ *appartiene a* $C(R^3)$ e

$$V^{(0)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad V^{(1)}x = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \to \infty.$$

Queste proprietà dei potenziali $V^{(0)}$ e $V^{(1)}$ possono essere derivate dalle rappresentazioni (6) e (12) e dalle equazioni (8), come per il potenziale di volume (si veda il § 27.1).

Dimostriamo ora che il *potenziale di doppio strato* $V^{(1)}(x)$ *a densità* $\nu = 1$ *è uguale a*

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G \\ 0, & x \in G_1 = R^3 \setminus \overline{G}, \end{cases} \tag{13}$$

se S *è la frontiera di* G.

Sia $x \in G$. In questo caso esiste una sfera $U(x, r_0) \Subset G$. La frontiera della regione $G \setminus \overline{U}(x; r_0)$ consiste delle superfici S e $S(x; r_0)$

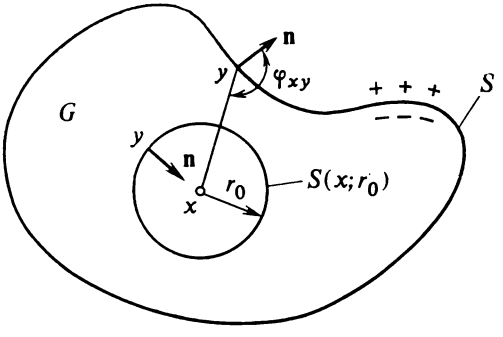


Fig. 88.

(fig. 88). Visto che la funzione $|x - y|^{-1}$ è armonica per $x \neq y$, applicando alla regione $G \setminus \overline{U}(x; r_0)$ la formula (11) del § 24.3, si ottiene

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dS_y + \int_{S(x;\, r_0)} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dS_y = 0. \tag{14}$$

Prendendo in considerazione la (11) e tenendo conto del fatto che $\cos \varphi_{xy} = 1$ sulla sfera $|x - y| = r_0$, possiamo derivare dalla (14) la prima delle equazioni (13):

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y = -\int_{|x-y|=r_0} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y = -\frac{1}{r_0^2} \int_{|x-y|=r_0} dS_y = -4\pi.$$

Sia ora $x \in G_1$. Dato che la funzione $|x - y|^{-1}$ è armonica in $\overline{G}$, applicando la formula (11) del § 24.3, abbiamo

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dS_y = 0, \tag{15}$$

il che, in virtù della (11), dimostra la seconda delle formule (13).

Osservazione. Le formule (13) possono essere generalizzate per il caso di una superficie arbitraria S (Gauss): se $x \overline{\in} S$, il potenziale $V^1(x)$ con densità $\nu \not\equiv 1$ è uguale all'angolo solido sotto il quale la superficie S si vede dal punto x (prendendo in considerazione i segni delle facce della superficie).

3. Significato fisico dei potenziali newtoniani. Il potenziale $V = \frac{1}{|x|} * \rho$ con densità (arbitraria) ρ soddisfa l'equazione di Poisson $\Delta V = -4\pi\rho$. Per questa ragione V è il potenziale newtoniano o coulombiano creato dalle masse o dalle cariche distribuite nello spazio con densità ρ. In particolare, una distribuzione continua di masse o di cariche crea un potenziale di volume; se, invece, le masse o le cariche sono concentrate su una superficie, esse creano un potenziale

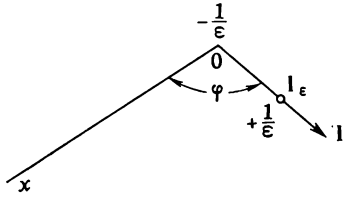


Fig. 89.

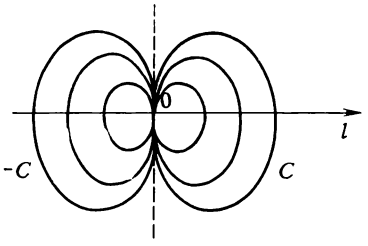


Fig. 90.

(newtoniano o coulombiano) di semplice strato; se su una superficie sono concentrati dipoli, essi producono un potenziale coulombiano che è il potenziale di doppio strato.

A titolo d'esempio calcoliamo il potenziale (coulombiano) $V^{(1)}(x;\ \boldsymbol{l})$ creato da un dipolo con momento $+1$ nel punto 0 ed orientato nella direzione $\boldsymbol{l}$, $|\ \boldsymbol{l}\ | = 1$. Questo potenziale è creato mediante la distribuzione (si veda l'esempio a) del § 6.4)

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left| \frac{1}{\varepsilon}\, \delta(x - \boldsymbol{l}\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\, \delta(x) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}}\, \delta(x) \right.$$

(fig. 89), e perciò

$$V^{(1)}(x;\ \boldsymbol{l}) = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}}\, \delta = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}} \left(\frac{1}{|x|} * \delta \right) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}} \frac{1}{|x|},$$

cioè

$$V^{(1)}(x;\ \boldsymbol{l}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}} \frac{1}{|x|} = \frac{\cos\varphi}{|x|^2}, \tag{16}$$

dove φ è l'angolo tra i vettori x e $\boldsymbol{l}$. Nella fig. 90 sono rappresentate le superfici equipotenziali $(\cos\varphi)/|x|^2 = \pm c$ per il potenziale $V^{(1)}(x;\ \boldsymbol{l})$.

Dalle formule (12) e (16) segue che il potenziale di doppio strato è la «somma» dei potenziali elementari

$$\nu(y)\, V^{(1)}(x - y;\ \boldsymbol{n}) = \nu(y)\, \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x - y|^2},$$

creati da dipoli distribuiti sulla superficie S con densità di momento $\nu(y)$ e diretti lungo la normale $\boldsymbol{n}$.

4. Superfici di Ljapunov. Le altre proprietà dei potenziali di semplice strato e di doppio strato vengono stabilite supponendo che

S sia una superficie di Ljapunov. Una superficie limitata chiusa S è detta *superficie di Ljapunov* se, in ogni punto $x \in S$, esiste una normale $\boldsymbol{n}_x$ continua su S, secondo Hölder, cioè esistono numeri $C > 0$, ed $\alpha > 0$, $\alpha \leqslant 1$, tali che

$$| \boldsymbol{n}_x - \boldsymbol{n}_y | \leqslant C | x - y |^{\alpha}, \; x, y \in S. \tag{17}$$

Da questa definizione segue che le superfici di Ljapunov sono contenute nella classe di superficie C^1; d'altra parte, ogni superficie chiusa limitata di classe C^2 è una superficie di Ljapunov (per $\alpha = 1$).

Per una superficie di Ljapunov S esiste un numero $r_0 > 0$, $4Cr_0^{\alpha} < 1$ tale che, per un qualunque punto $x \in S$, gli intorni $u_x = S \cap U(x, r_0)$ sono intersecati da una retta parallela alla normale $\boldsymbol{n}_x$ in un singolo punto, oppure una simile intersezione non esiste.

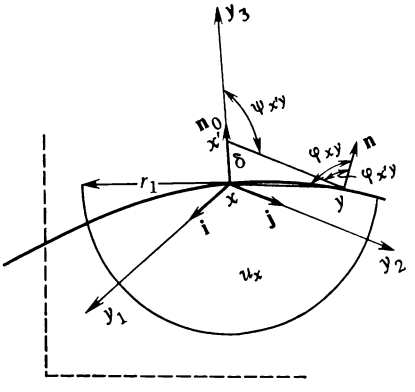


Fig. 91.

Infatti, in caso contrario, dalla condizione di regolarità della superficie S segue che su u_x ci sarebbero due punti y_1 ed y_2 per i quali l'angolo tra le normali $\boldsymbol{n}_{y_1}$ e $\boldsymbol{n}_{y_2}$ sarebbe ottuso, $(\boldsymbol{n}_{y_1}, \boldsymbol{n}_{y_2}) \leqslant 0$, il che contraddirebbe la disuguaglianza (17):

$$\sqrt{2} \leqslant |\boldsymbol{n}_{y_1} - \boldsymbol{n}_{y_2}| < C |y_1 - y_2|^{\alpha} \leqslant C 2^{\alpha} r_0^{\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Scegliamo, in u_x un sistema locale di coordinate rettangolari (y_1, y_2, y_3) con l'origine nel punto x ed orientiamo l'asse y_3 lungo la normale, $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{n}_x$, e gli assi y_1 ed y_2 lungo i versori $\boldsymbol{i}$, e $\boldsymbol{j}$, rispettivamente (fig. 91). In virtù di quanto è stato detto, in queste coordinate la superficie u_x può essere assegnata mediante la seguente equazione:

$$y_3 = f(y_1, y_2), \; f \in C^1(\overline{\sigma}), \; f(0) = 0, \tag{18}$$

dove σ è la proiezione di u_x sul piano (y_1, y_2), ed inoltre, in virtù della (17), si ha

$$| \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0 | < C | y |^{\alpha}, \quad y \in u_x, \; x \in S \; (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_y). \tag{19}$$

Dalla (19) per tutti gli $y \in u_x$ seguono le relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} |(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i})| = |(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{i}) + (\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{i})| \leqslant |\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0| \leqslant C |y|^{\alpha}, \\ |(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j})| = |(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{j}) + (\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{j})| \leqslant |\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0| \leqslant C |y|^{\alpha}, \\ (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_0) = (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}_0) + (\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}_0) \geqslant 1 - |\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0| \geqslant \\ \qquad \geqslant 1 - C |y|^{\alpha} > \frac{3}{4}. \end{array} \right. \tag{20}$$

Tenendo conto del fatto che sulla superficie u_x sono valide le relazioni

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{i})}{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}_0)},\quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = -\frac{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{j})}{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}_0)},$$

dalla (20) deduciamo le seguenti disuguaglianze:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_1}\right| = \left|\frac{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{i})}{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}_0)}\right| \leqslant \frac{4}{3} C\,|y|^{\alpha},\quad \left|\frac{\partial f}{\partial y_2}\right| \leqslant \frac{4}{3} C\,|y|^{\alpha},\quad y \in u_x. \tag{21}$$

Introducendo la notazione $\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, deduciamo dalla (21)

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| \leqslant |\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\sqrt{2}}{3} C\,|y|^{\alpha} \leqslant 2Cr_0^2 < \frac{1}{2},\quad (y_1,\ y_2) \in \bar{\sigma}. \tag{22}$$

Da ciò, utilizzando la disuguaglianza

$$|f| = \left|\int_0^{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho'}\, d\rho'\right| \leqslant \int_0^{\rho} \left|\frac{\partial f}{\partial \rho'}\right| d\rho',$$

si ha che $|f| \leqslant \rho/2$. Inoltre, tenendo conto della (18) ed utilizzando di nuovo la (22), si ottiene

$$|f| \leqslant 2C \int_0^{\rho} |y|^{\alpha}\, d\rho' = 2C \int_0^{\rho} (\rho'^2 + f^2)^{\frac{\alpha}{2}}\, d\rho' \leqslant$$

$$\leqslant 2C \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\rho} \rho'^{\alpha}\, d\rho' \leqslant 2C\rho^{1+\alpha}.$$

Dunque, abbiamo stabilito le seguenti disuguaglianze:

$$|y_3| \leqslant \frac{\rho}{2},\quad |y_3| \leqslant 2C\rho^{1+\alpha} \leqslant 2C\,|y|^{1+\alpha},\quad y \in u_x. \tag{23}$$

Lemma 1. *Se S è una superficie di Ljapunov, si ha*

$$|\cos \varphi_{xy}| \leqslant 3C\,|x - y|^{\alpha},\ x, y \in S, \tag{24}$$

$$|\cos \varphi_{x'y} + \cos \psi_{x'y}| \leqslant 3C\,|x' - y|^{\alpha},\ x, y \in S,\ x' \in \boldsymbol{n}_x, \tag{25}$$

dove C è la costante della disuguaglianza (17).

Dimostrazione. In base a quanto è stato detto, è sufficiente stabilire le disuguaglianze (24) e (25) per tutti gli y che appartengono ad un intorno (arbitrario) $u_x = S \cap U(x; r_0)$. La relazione (24) segue dalle (19) e (23):

$$|\cos \varphi_{xy}| = \left|\left(\boldsymbol{n},\ \frac{y}{|y|}\right)\right| = \left|\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0,\ \frac{y}{|y|}\right) + \left(\boldsymbol{n}_0,\ \frac{y}{|y|}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0| + \frac{|y_3|}{|y|} \leqslant 3C\,|y|^{\alpha}.$$

Dimostriamo ora la relazione (25) su u_x. Utilizzando la definizione degli angoli $\varphi_{x'y}$ e $\psi_{x'y}$ (si vedano le formule (9) e (11)) e la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij (si veda il § 1.7), per tutti gli $y \in u_x$ e $x \in R^3$ si ottiene

$$|\cos\varphi_{x'y} + \cos\psi_{x'y}| = \left|\sum_{i=1}^{3} \frac{y_i - x'_i}{|x'-y|}\,[\cos(\boldsymbol{n}_0 y_i) - \cos(\boldsymbol{n} y_i)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{i=1}^{3} [\cos(\boldsymbol{n}_0 y_i) - \cos(\boldsymbol{n} y_i)]^2\right|^{\frac{1}{2}} = \{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i})^2 + (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j})^2 + [1 - (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_0)]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

e, di conseguenza, in virtù della (20), si ha

$$|\cos\varphi_{x'y} + \cos\psi_{x'y}| \leqslant \sqrt{3}\,C\,|y|^{\alpha}.$$

Da ciò, utilizzando la disuguaglianza (23) e notando che $\rho \leqslant |x' - y|$, $x' \in \boldsymbol{n}_0$, per tutti gli $y \in u_x$ e $x' \in \boldsymbol{n}_0$, si ottiene la (25):

$$|\cos\varphi_{x'y} + \cos\psi_{x'y}| \leqslant \sqrt{3}\,C\,(\rho^2 + y_3^2)^{\alpha/2} \leqslant 3C\rho^{\alpha} \leqslant 3C\,|x'-y|^{\alpha}.$$

Il lemma è dimostrato.

Lemma 2. *Se S è una superficie di Ljapunov, esiste una costante K tale che*

$$\int_S \frac{|\cos\varphi_{x'y}|}{|x'-y|^2}\,dS_y \leqslant K, \quad x' \in R^3. \tag{26}$$

Dimostrazione [1]. Se la distanza tra il punto x' e la superficie S non è minore di $r_0/2$, in modo che $|x' - y| \geqslant r_0/2$, $y \in S$, l'integrale (26) è uniformemente limitato dal numero $K_1 = \frac{4}{r_0^2}\int_S dS$.

Sia la distanza tra il punto x' e la superficie S minore di $r_0/2$, in modo che esista un punto $x \in S$ tale che $|x - x'| = \delta < r_0/2$. È facile convincersi che il punto x' si trova sulla normale $\boldsymbol{n}_0$ o $-\boldsymbol{n}_0$ a S nel punto x. Per fissare le idee, poniamo che $x' \in \boldsymbol{n}_0$, in modo che, in coordinate locali, $x' = (0, 0, \delta)$ (si veda la fig. 91). Dividiamo l'integrale (26) in due:

$$\int_S \frac{|\cos\varphi_{x'y}|}{|x'-y|^2}\,dS_y = \int_{S\setminus u_x} \frac{|\cos\varphi_{x'y}|}{|x'-y|^2}\,dS_y + \int_{u_x} \frac{|\cos\varphi_{x'y}|}{|x'-y|^2}\,dS_y. \tag{27}$$

In virtù della relazione

$$|x'-y| \geqslant |y-x| - |x-x'| > r_0 - \frac{r_0}{2} = \frac{r_0}{2}, \quad y \in S\setminus u_x,$$

il primo integrale del secondo membro della (27) è uniformemente limitato dal numero K_1.

[1] L'idea della dimostrazione è stata suggerita nel libro di Michlin [1], cap. 18.

Stimiamo ora il secondo integrale del secondo membro della (27). Notando che (fig. 91)

$$|\cos\psi_{x'y}| = \frac{|\delta - y_3|}{|x'-y|} \leqslant \frac{\delta + |y_3|}{|x'-y|}, \quad \rho \leqslant |x'-y|,$$

ed utilizzando le (23) e (25), si ottiene la disuguaglianza

$$|\cos\varphi_{x'y}| \leqslant |\cos\varphi_{x'y} + \cos\psi_{x'y}| + |\cos\psi_{x'y}| \leqslant$$

$$\leqslant 3C\,|x'-y|^{\alpha} + \frac{2C\rho^{\alpha+1}+\delta}{|x'-y|} \leqslant 5C\,|x'-y|^{\alpha} + \frac{\delta}{|x'-y|}, \quad y \in u_x.$$

Quindi,

$$\int_{u_x} \frac{|\cos\varphi_{x'y}|}{|x'-y|^2}\,dS_y \leqslant 5C \int_{u_x} \frac{dS_y}{|x'-y|^{2-\alpha}} + \delta \int_{u_x} \frac{dS_y}{|x'-y|^3}. \tag{28}$$

Il primo integrale del secondo membro della (28) è uniformemente limitato (si veda il § 1.6). Per stimare il secondo integrale del secondo membro della (28) passiamo alle coordinate locali (si veda la fig. 91):

$$\delta \int_{u_x} \frac{dS_y}{|x'-y|^3} = \delta \int_{\sigma} \frac{dy_1\,dy_2}{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}_0)\,[\rho^2+(\delta-y_3)^2]^{3/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{3}\,\delta \int_{\sigma} \frac{dy_1\,dy_2}{[\rho^2+(\delta-y_3)^2]^{3/2}}; \tag{29}$$

abbiamo utilizzato la terza disuguaglianza della (20). In questo caso, in virtù della (23), si ha $|y_3| \leqslant \rho/2$, e, quindi,

$$\rho^2+(\delta-y_3)^2 = \rho^2+\delta^2+y_3^2-2\delta y_3 \geqslant \rho^2+\delta^2-2\delta\,|y_3| \geqslant$$

$$\geqslant \rho^2+\delta^2-\delta\rho \geqslant \frac{1}{2}(\rho^2+\delta^2), \quad y \in u_x.$$

Considerando la disuguaglianza ottenuta, prolunghiamo la disuguaglianza (29):

$$\delta \int_{u_x} \frac{dS_y}{|x'-y|^3} \leqslant 4\delta \int_{\sigma} \frac{dy_1\,dy_2}{(\rho^2+\delta^2)^{3/2}} \leqslant 4\delta \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{(\rho^2+\delta^2)^{3/2}} = 8\pi.$$

Il lemma è dimostrato.

5. Proprietà dei potenziali di semplice strato e di doppio strato su una superficie S. Supponendo che la frontiera S di una regione G sia una superficie di Ljapunov, stabiliamo alcune proprietà dei potenziali $V^{(0)}$ e $V^{(1)}$ su S. Hanno luogo le seguenti uguaglianze:

$$\int_S \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G, \\ -2\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in G_1. \end{cases} \tag{30}$$

Per dimostrare le disuguaglianze (30), in virtù della (13), non resta altro che considerare il caso per $x \in S$. Eliminando da S gli

intorni $u_x = S \cap U(x; r_0)$ del punto x, si ottiene

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y = \int_{S \setminus u_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y + \int_{u_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y. \qquad (31)$$

Visto che $x \in G \setminus U(x; r_0)$ (fig. 92), applicando la formula (11) del § 24.3, alla regione $G \setminus \bar{U}(x; r_0)$ ed alla funzione $|x-y|^{-1}$ e procedendo come nel § 27.2, si ottiene

$$\int_{S \setminus u_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y = -\frac{1}{r_0^2} \int_{G \cap S(x;\, r_0)} dS.$$

Per questa ragione, se u_x è contratto nel punto x ($r_0 \to 0$), il primo integrale del secondo membro della (31) tende a -2π (fig. 92).

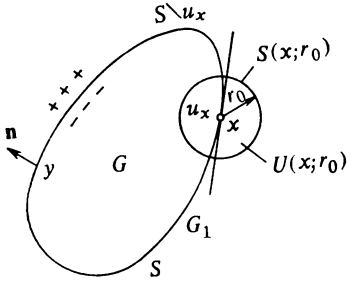


Fig. 92.

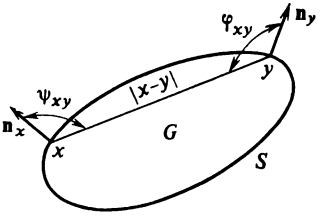


Fig. 93.

Invece, il secondo integrale del secondo membro della (31), in virtù della (24), è assolutamente convergente e perciò tende a zero per $u_x \to x$ (si veda il § 1.6). Per questa ragione, passando, nella (31), al limite per $u_x \to x$, si ottiene la formula (30) per $x \in S$.

Il potenziale $V^{(1)}(x)$ di doppio strato è una funzione continua su S.

Infatti, in virtù della disuguaglianza (24), che è valida su una superficie di Ljapunov, il potenziale $V^{(1)}(x)$ definito mediante la formula (12) è un operatore integrale con nucleo polare:

$$\frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}, \quad x \in S, \quad y \in S,$$

e, quindi, trasferisce ogni funzione $\nu \in C(S)$ nella funzione $V^{(1)} \in C(S)$ (si veda il § 1.6; cfr. il lemma 1 del § 17.4).

Dimostriamo ora che l'*integrale*

$$\int_S \mu(y)\, \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2}\, dS_y, \qquad (32)$$

dove ψ_{xy} è l'angolo formato dal vettore $y - x$ e dalla normale $\boldsymbol{n}_x$, è una funzione continua di x su S.

Infatti, notando che

$$\psi_{xy} = \varphi_{yx}, \quad x, y \in S \qquad (33)$$

(fig. 93), dalla (24) deduciamo la disuguaglianza

$$|\cos\psi_{xy}| \leqslant 3C\,|x-y|^{\alpha}, \quad x, y \in S, \tag{34}$$

dalla quale, come per il potenziale $V^{(1)}$, segue la continuità dell'integrale (32) su S.

Conformemente alla formula (10) denotiamo l'integrale (32) con $\partial V^{(0)}(x)/\partial \boldsymbol{n}$, e cioè:

$$\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = \int_S \mu(y)\,\frac{\cos\psi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y = \int_S \mu(y)\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\,\frac{1}{|x-y|}\,dS_y, \quad x \in S. \tag{35}$$

La funzione $\partial V^{(0)}(x)/\partial \boldsymbol{n}$ è detta *valore diretto della derivata normale del potenziale di semplice strato su una superficie* S; per quanto abbiamo già dimostrato, questa funzione è continua su S.

Notiamo ancora che *il potenziale di strato semplice* $V^{(0)}(x)$ *è una funzione continua su* S poiché $V^{(0)} \in C(R^3)$ (si veda il § 27.2).

6. Discontinuità del potenziale di doppio strato.

Teorema. *Se* S *è una superficie di Ljapunov e* $\nu \in C(S)$, *il potenziale di doppio strato* $V^{(1)}$ *appartiene a* $C(\bar{G})$ e $C(\bar{G}_1)$ *ed i suoi valori limite* $V_+^{(1)}$ *e* $V_-^{(1)}$ *su* S, *all'esterno ed all'interno di* S, *sono espressi mediante le seguenti formule*:

$$V_+^{(1)}(x) = 2\pi\nu(x) + V^{(1)}(x) = 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y)\,\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y, \tag{36}$$

$$V_-^{(1)}(x) = -2\pi\nu(x) + V^{(1)}(x) = -2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y)\,\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y. \tag{36'}$$

Dimostrazione. Introduciamo la funzione

$$W(x', x) = \int_S [\nu(y) - \nu(x)]\,\frac{\cos\varphi_{x'y}}{|x'-y|^2}\,dS_y, \quad x' \in R^3, \ x \in S.$$

La funzione $W(x', x)$ per $x' = x \in S$, in virtù della (30), è uguale a

$$W(x, x) = \int_S \nu(y)\,\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y + 2\pi\nu(x) = 2\pi\nu(x) + V^{(1)}(x). \tag{37}$$

La funzione $W(x, x)$ è continua su S, in virtù del fatto che sia la densità ν, sia il potenziale $V^{(1)}$ sono continui su S (si veda il § 27.5).

Dimostriamo che

$$W(x', x) \overset{x \in S}{\rightrightarrows} W(x, x), \quad x' \to x \in S. \tag{38}$$

Sia $\varepsilon > 0$. Essendo la funzione ν uniformemente continua su S, esiste un numero $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che, per tutti gli $x \in S$, è valida

la disuguaglianza

$$|\nu(y)-\nu(x)|<\frac{\varepsilon}{4K}, \quad y\in u_x=S\cap U(x;\ \delta), \tag{39}$$

dove K è un numero che figura nella (26).

Stimiamo la differenza

$$|W(x',\ x)-W(x,\ x)|\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\int\limits_{u_x}+\int\limits_{S\setminus u_x}\Big)\,|\nu(y)-\nu(x)|\,\Big|\frac{\cos\varphi_{x'y}}{|x'-y|^2}-\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\Big|\,dS_y. \tag{40}$$

In virtù delle disuguaglianze (39) e (26), il primo integrale del secondo membro della (40) non è superiore a $\varepsilon/2$:

$$\int\limits_{u_x}|\nu(y)-\nu(x)|\,\Big|\frac{\cos\varphi_{x'y}}{|x'-y|^2}-\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\Big|\,dS_y<$$

$$<\frac{\varepsilon}{4K}\int\limits_S\Big(\frac{|\cos\varphi_{x'y}|}{|x'-y|^2}+\frac{|\cos\varphi_{xy}|}{|x-y|^2}\Big)\,dS_y\leqslant\frac{\varepsilon}{4K}\,2K=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Inoltre, la funzione integranda della (40), come funzione delle variabili $(x,\ x',\ y)$, è uniformemente continua per $|x-x'|\leqslant\delta/2$, $x\in S$, $y\in S\setminus u_x$ e si annulla per $x'=x$. Quindi, esiste un $\delta'\leqslant\delta/2$ tale che, per tutti gli $x'\in U(x;\delta')$, il secondo integrale del secondo membro della (40) sia inferiore a $\varepsilon/2$. Di conseguenza,

$$|W(x',\ x)-W(x,\ x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \quad x'\in U(x;\ \delta'), \quad x\in S,$$

il che dimostra la relazione limite (37).

Ponendo $x'\in G_1$ ed utilizzando la formula (30), rappresentiamo il potenziale $V^{(1)}(x')$ nella forma

$$V^{(1)}(x')=\int\limits_S[\nu(y)-\nu(x)]\,\frac{\cos\varphi_{x'y}}{|x'-y|^2}\,dS_y+W(x',\ x). \tag{41}$$

Passando in quest'uguaglianza al limite per $x'\to x\in S$, $x'\in G_1$, considerando la relazione limite (38), si ottiene

$$V^{(1)}(x')\overset{x\in S}{\rightrightarrows}W(x,\ x)=V_+^{(1)}(x), \quad x\in S,$$

da cui segue che $V^{(1)}\in C(\overline{G_1})$ e, in virtù della (37), è valida l'uguaglianza (36).

L'altro caso può essere dimostrato in un modo simile. Il teorema è dimostrato.

Dalle formule (36) e (36′) segue la relazione

$$4\pi\nu(x)=V_+^{(1)}(x)-V_-^{(1)}(x), \quad x\in S. \tag{42}$$

Osservazione. Le formule (36) e (36′) sono analoghe a quelle di Sochotskij (15) e (15′) del § 5.8).

7. Discontinuità della derivata normale del potenziale di semplice strato.

Teorema. *Se S è una superficie di Ljapunov e $\mu \in C(S)$, il potenziale di semplice strato $V^{(0)}$ ha derivate normali regolari $(\partial V^{(0)}/\partial \boldsymbol{n})_+$ e $(\partial V^{(0)}/\partial \boldsymbol{n})_-$ su S all'esterno ed all'interno di S, ed inoltre*

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_+(x) = -2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \boldsymbol{n}} =$$

$$= -2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y)\,\frac{\cos\psi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y, \qquad (43)$$

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_-(x) = 2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \boldsymbol{n}} =$$

$$= 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y)\,\frac{\cos\psi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y. \qquad (43')$$

Dimostrazione. Sia $V^{(1)}$ il potenziale di doppio strato su S con densità μ. Introduciamo la funzione

$$W_1(x', x) = \frac{\partial V^{(0)}(x')}{\partial \boldsymbol{n}_x} + V^{(1)}(x'), \quad x' \overline{\in} S, \quad x \in S,$$

e dimostriamo che per $x' \to x \in S$, $x' \in \boldsymbol{n}_x$, si ha

$$W_1(x', x) \overset{x\in S}{\to} W_1(x, x) = \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \boldsymbol{n}} + V^{(1)}(x). \qquad (44)$$

Da quanto abbiamo già dimostrato (si veda il § 27.5), la funzione $W_1(x, x)$ è continua su S.

Utilizzando le formule (10) e (12), rappresentiamo la funzione W_1 nella forma di un integrale:

$$W_1(x', x) = \int_S \mu(y)\,\frac{\cos\psi_{x'y} + \cos\varphi_{x'y}}{|x'-y|^2}\,dS_y.$$

Assegnamo $\varepsilon > 0$. Stimiamo la differenza

$$|W_1(x', x) - W_1(x, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{u_x} + \int_{S\setminus u_x}\right) |\mu(y)| \left|\frac{\cos\psi_{x'y} + \cos\varphi_{x'y}}{|x'-y|^2} - \frac{\cos\psi_{xy} + \cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\right| dS_y,$$

$$u_x = S \cap U(x;\ \delta). \qquad (45)$$

In virtù delle (24), (25) e (34), il primo integrale del secondo membro della (45) non è superiore (in senso assoluto) all'integrale convergente

$$\int_{u_x} |\mu(y)| \left(\frac{3C}{|x'-y|^{2-\alpha}} + \frac{6C}{|x-y|^{2-\alpha}}\right) dS_y$$

e, quindi, può essere fatto inferiore a $\varepsilon/2$ per un $\delta = \delta_\varepsilon$ sufficientemente piccolo. Inoltre, la funzione integranda della (45), come una

funzione di variabili (x, x', y), è uniformemente continua per $|x - x'| \leqslant \delta/3$, $x \in S$, $y \in S \setminus u_x$ e si annulla per $x' = x$. Quindi, esiste un numero $\delta' \leqslant \delta/3$ tale che, per tutti gli $x \in U(x; y)$, il secondo integrale del secondo membro della (45) sarà inferiore a $\varepsilon/2$. Di conseguenza,

$$|W_1(x', x) - W_1(x, x)| < \varepsilon, \quad x' \in U(x; \delta'), \quad x' \in \boldsymbol{n}_x, \quad x \in S,$$

il che dimostra la relazione limite (44).

Secondo il teorema del § 27.6, si ha $V^{(1)} \in C(\overline{G})$ e

$$V_+^{(1)}(x) = 2\pi\mu(x) + V^{(1)}(x).$$

Per questa ragione la relazione limite (44) per $x' \to x \in S$, $x' \in \boldsymbol{n}_x$ assume la forma

$$\frac{\partial V^{(0)}(x')}{\partial \boldsymbol{n}_x} \xrightarrow{x \in S} -V_+^{(1)}(x) + W_1(x, x) = -2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \boldsymbol{n}_x},$$

da cui concludiamo che la derivata normale regolare $(\partial V^{(0)}/\partial \boldsymbol{n})_+$ su S all'esterno esiste (si veda il § 24.2) e, tenendo conto della formula (35), è espressa dalle uguaglianze (43).

L'altro caso può essere considerato in modo analogo. Il teorema è dimostrato.

Dalle formule (43) e (43′) segue la relazione

$$4\pi\mu(x) = \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_-(x) - \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_+(x), \quad x \in S. \tag{46}$$

Osservazione. Si può dimostrare che se la densità μ è continua secondo Hölder su S (si veda il § 1.3), il potenziale $V^{(0)}$ appartiene alle classi $C^1(\overline{G})$ e $C^1(\overline{G_1})$ (si veda, per esempio, Sobolev [1], cap. XV).

8. **Esercizi.** a) Dimostrare che il potenziale di semplice strato, per una superficie sferica S_R con densità $\mu = 1$, è uguale a

$$V^{(0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{4\pi R^2}{|x|}, & |x| \geqslant R; \\ 4\pi R, & |x| \leqslant R. \end{cases}$$

b) Utilizzando la a) dimostrare che il potenziale di volume per una sfera U_R di densità $\mu = 1$ è uguale a

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{4\pi R^3}{3|x|}, & |x| \geqslant R; \\ 2\pi R^2 - \dfrac{2\pi}{3}|x|^2, & |x| \leqslant R. \end{cases}$$

c) Dimostrare che il potenziale di volume di una sfera U_R con densità $f(|x|)$ è uguale a

$$V(x) = \frac{4\pi}{|x|}\int_0^R f(\rho)\,\rho^2\,d\rho, \quad |x| \geqslant R.$$

d) Utilizzando la c) dimostrare che se $\int_0^R f(\rho)\,\rho^2 d\rho = 0$, si ha

$$V(x) = -\frac{8\pi^2}{3}\int_0^R f(\rho)\,\rho^4\,d\rho.$$

e) Dimostrare che, se una superficie di Ljapunov S limita una regione convessa, la costante K della disuguaglianza (26) può essere presa uguale a 4π.

§ 28. *Problemi al contorno per le equazioni di Laplace e di Poisson nello spazio*

1. Impostazione dei principali problemi al contorno. Studieremo quattro problemi al contorno di prima e di seconda specie per l'equazione di Laplace tridimensionale (si veda il § 4.4). Assumiamo una regione G tale che $G_1 = R^3 \setminus \overline{G}$ è anche una regione.

Il problema di Dirichlet interno: trovare una funzione $u \in C(\overline{G})$ armonica in G che assume su S valori (continui) assegnati u_0^-.

Il *problema di Dirichlet esterno:* trovare una funzione u armonica in G_1 che assume su S valori (continui) assegnati u_0^+ e che si annulla all'infinito.

Il *problema di Neumann interno*: trovare una funzione u armonica in G che ha su S una derivata normale regolare (continua) assegnata u_0^-.

Il *problema di Neumann esterno*: trovare una funzione armonica $u \in C(\overline{G}_1)$ in G_1 che ha su S una derivata normale regolare (continua) assegnata (una normale interna) e si annulla all'infinito.

Problemi al contorno simili sono anche posti per l'equazione di Poisson

$$\Delta u = -f, \tag{1}$$

dove si richiede che $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ per i problemi interni ed $u \in C^2(G_1) \cap C(\overline{G}_1)$, $u(\infty) = 0$ per i problemi esterni.

La sostituzione

$$u = v + V, \quad V(x) = \frac{1}{4\pi}\int_G \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy \tag{2}$$

riduce i problemi al contorno interni per l'equazione di Poisson ai corrispondenti problemi al contorno interni per l'equazione di Laplace se $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$.

Infatti, in questo caso, il potenziale di volume $V \in C^2(G) \cap \cap C^1(\overline{G})$ soddisfa anche l'equazione di Poisson (1) (si veda il § 27.1). Ma allora, in virtù della (2), la funzione v deve soddisfare l'equazione di Laplace e la corrispondente condizione di frontiera.

Per i problemi al contorno esterni procediamo in modo analogo (a condizione che il potenziale di volume con densità f esista e si annulli all'infinito).

Notiamo che la trasformazione di Kelvin (si veda il § 24.10) permette di ridurre i problemi al contorno esterni per l'equazione di Laplace a quelli interni, e viceversa.

Notiamo, infine, che per i problemi di Neumann (interni ed esterni) è necessario supporre che S appartenga a C^1; inoltre, il fatto che la soluzione $u(x)$ abbia una derivata normale regolare su S implica la sua continuità su $\overline{G}$ o su $\overline{G_1}$, rispettivamente (si veda il § 24.2).

2. Teoremi di unicità della soluzione dei problemi al contorno. Dimostriamo i teoremi di unicità della soluzione dei problemi al contorno formulati nel § 28.1.

Teorema 1. *La soluzione dell'equazione di Poisson è unica nella classe delle funzioni generalizzate che si annullano all'infinito.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che l'equazione di Laplace ha solo una soluzione nulla nella classe delle funzioni generalizzate che si annullano per $|x| \to \infty$. Ma ciò segue dall'analogo del teorema di Liouville (si veda il § 24.9).

Teorema 2. *La soluzione del problema di Dirichlet interno (o esterno) è unica e dipende con continuità dal valore di frontiera u_0^- o u_0^+, rispettivamente, nel seguente senso: se $|u_0^{\pm} - \tilde{u}_0^{\pm}| \leqslant \varepsilon$ su S, le corrispondenti soluzioni u ed $\tilde{u}$ soddisfano la relazione*

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leqslant \varepsilon, \quad x \in \overline{G} \quad (x \in \overline{G}_1). \tag{3}$$

Dimostrazione. Applicando le disuguaglianze (17) e (18) del § 24.5 alla funzione armonica $u - \tilde{u}$,

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leqslant \max_{x \in S} |u_0^{\mp}(x) - \tilde{u}_0^{\mp}(x)|, \quad x \in \overline{G}\,(x \in \overline{G}_1),$$

si ottengono tutti gli enunciati del teorema.

Diremo che una superficie di Ljapunov S è *sufficientemente regolare* se, per questa superficie, è valida la formula di Green (7) del § 21.2 per le funzioni u della classe $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ che hanno in S una derivata normale regolare e tali che $\Delta u \in \mathscr{L}_2(G)$, e per le funzioni della classe $C^1(G) \cap C(\overline{G})$.

In virtù di quanto è stato detto nei §§ 24.2 e 27.4, rispettivamente, le superfici chiuse limitate della classe C^2 sono sufficientemente regolari.

Teorema 3. *Se S è una superficie sufficientemente regolare, la soluzione del problema di Neumann interno è definita a meno di una costante additiva arbitraria. La condizione necessaria per la risolvi-*

bilità di questo problema è l'uguaglianza

$$\int_S u^-(x)\,dS + \int_G f(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Dimostrazione. Se u ed $\tilde{u}$ sono due soluzioni del problema di Neumann interno, la loro differenza $\eta \in C(\bar{G})$ è una funzione armonica in G ed ha una derivata normale regolare su S. Applicando la formula di Green (7) del § 21.2, per $u = v = \eta$, si ottiene

$$\int_G |\operatorname{grad}\eta|^2\,dx = \int_S \eta \frac{\partial\eta}{\partial n}\,dS = 0,$$

da cui segue che $\operatorname{grad}\eta = 0$, $x \in G$, in modo che $\eta = u - \tilde{u} =$ = costante.

La necessità della condizione (4) di risolvibilità del problema di Neumann interno deriva dalla formula (8) del § 21.2 per $v \equiv 1$, secondo la quale

$$\int_S u_1^-\,dS = \int_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int_G \Delta u\,dx = -\int_G f\,dx,$$

se u è la soluzione di questo problema. Il teorema è dimostrato.

Il significato fisico della condizione (4) consiste nel fatto che un flusso di calore stazionario (di un liquido incompressibile, della intensità dei campi elettrico e magnetico, si veda il § 2) attraverso una superficie chiusa S è uguale a valore totale di tutte le sorgenti (cariche) che si trovano all'interno di S (legge di conservazione).

Teorema 4. *Se S è una superficie sufficientemente regolare, la soluzione del problema di Neumann esterno è unica.*

Dimostrazione. Siano u ed $\tilde{u}$ due soluzioni del problema di Neumann esterno. In questo caso la loro differenza $\eta \in C(\bar{G}_1)$ è una funzione armonica in G_1, ha una derivata normale regolare nulla su S e $\eta(\infty) = 0$. Secondo il teorema del § 24.10, la funzione η soddisfa le disuguaglianze

$$|\eta(x)| < \frac{c}{|x|}, \quad |\operatorname{grad}\eta(x)| < \frac{c_1}{|x|^2}, \quad |x| \to \infty. \tag{5}$$

Applicando la formula di Green (7) del § 21.2, per $u = v = \eta$ alla regione Q_R (fig. 77), si ottiene

$$\int_{Q_R} |\operatorname{grad}\eta|^2\,dx = \int_S \eta \frac{\partial\eta}{\partial n}\,dS + \int_{S_R} \eta \frac{\partial\eta}{\partial n}\,dS = \int_{S_R} \eta \frac{\partial\eta}{\partial n}\,dS. \tag{6}$$

Ma dalle (5) deriva che, per $R \to \infty$,

$$\left|\int_{S_R} \eta \frac{\partial\eta}{\partial n}\,dS\right| \leqslant \int_{S_R} |\eta|\,|\operatorname{grad}\eta|\,dS < \frac{cc_1}{R^3}\int_{S_R} dS = 4\pi\frac{cc_1}{R}.$$

Per questa ragione, facendo tendere, nella uguaglianza (6), R a ∞, si ottiene

$$\int_{G_1} |\operatorname{grad} \eta|^2 \, dx = 0,$$

da cui segue grad $\eta = 0$, cioè $\eta(x) =$ costante, $x \in G_1$. Poiché $\eta(\infty) = 0$, si ha $\eta = u - \tilde{u} \equiv 0$, $x \in G_1$. Il teorema è dimostrato.

3. Riduzione dei problemi al contorno alle equazioni integrali. Scriviamo la formula di Green (5) del § 24.1, per $n = 3$:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y, \quad x \in G. \tag{7}$$

La formula (7) è valida per le funzioni $u \in C(\overline{G})$ armoniche in G ed aventi una derivata normale regolare su S se S è una superficie sufficientemente regolare (si veda il § 28,2).

Dai teoremi d'unicità per i problemi di Dirichlet e di Neumann (si veda il § 28.2) segue che, in generale, non esiste una funzione armonica u con valori arbitrari di u, e $\partial u/\partial n$ su S. Per questa ragione è impossibile utilizzare direttamente la formula di Green (7) per risolvere i problemi al contorno posti in modo simile a quello utilizzato per la soluzione del problema di Cauchy (si vedano i §§ 13.3 e 16.4, rispettivamente). Questa è la differenza essenziale tra il problema al contorno per le equazioni ellittiche ed il problema di Cauchy.

Utilizzando la teoria del potenziale newtoniano, riduciamo i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione di Laplace alle equazioni integrali di Fredholm con nucleo polare. Inoltre, utilizzando la teoria delle equazioni integrali, dimostriamo la risolvibilità di questi problemi al contorno.

Sia S una superficie sufficientemente regolare. Cerchiamo la soluzione dei problemi di Dirichlet (interno ed esterno) sotto forma del potenziale di doppio strato

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} \, dS_y,$$

dove ν è una densità continua incognita su S. La funzione $V^{(1)}$ è armonica in G e G_1, appartiene alle classi $C(\overline{G})$, $C(\overline{G_1})$ e $C(S)$, ed inoltre $V^{(1)}(\infty) = 0$ (si vedano i §§ 27.2, 27.5 e 27.6, rispettivamente). Perciò, affinché il potenziale $V^{(1)}$ dia una soluzione del problema di Dirichlet interno o esterno, è necessario e sufficiente che siano rispettivamente verificate le uguaglianze

$$V_{\mp}^{(1)}(x) = u_0^{\mp}(x), \quad x \in S, \tag{8}$$

dove $V_{\mp}^{(1)}$ sono i valori limite di $V^{(1)}$ all'interno ed all'esterno di S. Secondo il teorema della discontinuità del potenziale di doppio

strato (si veda il § 27.6) le uguaglianze (8) assumono la forma

$$\mp 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y)\,\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y = u_0^{\mp}(x), \quad x \in S. \tag{9}$$

Le uguaglianze (9) rappresentano le equazioni di Fredholm integrali rispetto alla densità incognita ν.

Introducendo un parametro reale λ ed il nucleo

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\cos\varphi_{xy}}{2\pi|x-y|^2}, \tag{10}$$

riscriviamo le equazioni integrali (9) in un'unica forma

$$\nu(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}(x, y)\,\nu(y)\,dS_y + f(x), \quad x \in S. \tag{11}$$

Perciò, per il problema di Dirichlet interno abbiamo $\lambda = 1$ e $f = -u_0^-/2\pi$, mentre per quello esterno si ha $\lambda = -1$ e $f = u_0^+/2\pi$.

In modo analogo, cerchiamo la soluzione dei problemi di Neumann (interna ed esterna) sotto forma del potenziale di semplice strato:

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|}\,dS_y,$$

dove μ è una densità continua incognita in S. La funzione $V^{(0)}$ è armonica in G e G_1, continua in R^3, ha derivate normali regolari $(\partial V^{(0)}/\partial n)_{\mp}$ su S all'interno ed all'esterno di S, ed inoltre $V^{(0)}(\infty) = 0$ (si vedano i § 27.2 e 27.7, rispettivamente). Quindi, affinché il potenziale $V^{(0)}$ dia una soluzione al problema di Dirichlet (interno o esterno), è necessario e sufficiente che siano rispettivamente verificate le uguaglianze

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_{\mp}(x) = u_1^{\mp}(x), \quad x \in S. \tag{12}$$

In base al teorema della discontinuità della derivata normale del potenziale di semplice strato (si veda il § 27.7), le uguaglianze (12) diventano le equazioni di Fredholm:

$$\pm 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y)\,\frac{\cos\psi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y = u_1^{\mp}(x), \quad x \in S, \tag{13}$$

rispetto alla densità incognita μ.

Dal fatto che $\psi_{xy} = \varphi_{yx}$, $x, y \in S$ (si veda il § 27.5) e dalla (10) segue che il nucleo delle equazioni integrali (13) è uguale a $\mathcal{K}(y, x) = \mathcal{K}^*(x, y)$, in modo che le equazioni (9) e (13) sono aggiunte tra loro. Introducendo il parametro λ, riscriviamo le equazioni integrali (13) in un'unica forma:

$$\mu(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}^*(x, y)\,\mu(y)\,dS_y + g(x), \quad x \in S. \tag{11*}$$

Qui, per il problema di Neumann interno, si ha $\lambda = -1$ e $g = u_1^-/2\pi$, mentre per quello esterno $\lambda = 1$ e $g = -u_1^+/2\pi$.

Per una superficie di Ljapunov S la funzione $\cos \varphi_{xy}$ è continua su $S \times S$ e, in virtù del lemma 1 del § 27.4, soddisfa la disuguaglianza

$$|\cos \varphi_{xy}| \leqslant 3C\,|x-y|^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Per questa ragione, in base alla (10), il nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ è continuo per $x \in S$, $y \in S$, $x \neq y$ e soddisfa la relazione

$$|\mathscr{K}(x, y)| \leqslant \frac{3C}{2\pi\,|x-y|^{2-\alpha}}$$

e, quindi, è il nucleo polare (si veda il § 17.4). Dunque, per l'equazione integrale (11) e per quella aggiunta (11*) sono applicabili tutte le proposizioni della teoria di Fredholm (si veda il § 18.5).

4. Studio delle equazioni integrali. Dimostriamo all'inizio che $\lambda = 1$ non è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}^*(x, y)$. Supponiamo, al contrario, che $\lambda = 1$ sia un autovalore di questo nucleo e che μ^* sia la corrispondente autofunzione

$$\mu^*(x) = \int_S \mathscr{K}^*(x, y)\,\mu^*(y)\,dS_y = \frac{1}{2\pi}\int_S \mu^*(y)\,\frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y,$$

$$x \in S. \qquad (14)$$

L'autofunzione μ^* appartiene a $C(S)$ (si veda il § 18.5). Costruiamo il potenziale di semplice strato $V^{(0)}$ con densità μ^*. La funzione $V^{(0)}$ è armonica fuori di S, è continua in R^3 e $V^{(0)}(\infty) = 0$ (si veda il § 27.2). Inoltre, in base alla formula (43) del § 27.7 ed all'equazione (14), la sua derivata normale regolare su S è nulla al di fuori. Ne segue, secondo il teorema 4 del § 28.2, sull'unicità della soluzione del problema di Neumann esterno, che $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in \overline{G}_1$, e, in particolare, $V^{(0)}|_S = 0$. Ma allora, secondo il teorema 2 del § 28.2, concernente l'unicità di soluzione del problema di Dirichlet interno, $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in \overline{G}$. Dunque, $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in R^3$. Da ciò, utilizzando la formula (46) del § 27.7, concludiamo che $\mu^*(x) \equiv 0$, $x \in S$.

Quindi $\lambda = 1$ non è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}^*(x, y)$. Conformemente al secondo teorema di Fredholm, $\lambda = 1$ non è quindi un autovalore del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$. Ma in questo caso, secondo il terzo ed il primo teorema di Fredholm, le equazioni integrali (11) e (11*) per $\lambda = 1$ sono univocamente risolvibili per qualunque f e g continue. Di conseguenza, è valido il seguente

Teorema 1. *Il problema interno di Dirichlet ed il problema esterno di Neumann sono risolvibili per qualunque u_0^- ed u_1^+ assegnate, e le loro soluzioni sono rappresentate dai potenziali di semplice strato e di doppio strato, rispettivamente.*

Ora dalla formula (30) del § 27.5

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y = -\int\limits_S \mathscr{K}(x,\ y)\,dS_y = 1, \quad x \in S,$$

segue che $\lambda = -1$ è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$ e $\nu \equiv 1$ è la sua corrispondente autofunzione. Dimostriamo che questo è un semplice autovalore. Per farlo, in base al secondo teorema di Fredholm, è sufficiente dimostrare che $\lambda = -1$ è un semplice autovalore del nucleo $\mathscr{K}^*(x, y)$. Supponiamo che μ_0 sia la corrispondente autofunzione,

$$\mu_0(x) = -\int\limits_S \mathscr{K}^*(x,\ y)\,\mu_0(y)\,dS_y = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\cos\psi_{xy}}{|x-y|^2}\,\mu_0(y)\,dS_y. \quad (15)$$

L'autofunzione μ_0 appartiene a $C(S)$ (si veda il § 18.5).

Costruiamo il potenziale di semplice strato con densità μ_0:

$$V^{(0)}(x) = \int\limits_S \frac{\mu_0(y)}{|x-y|}\,dS_y. \quad (16)$$

La funzione $V^{(0)}$ è armonica fuori di S, continua in R^3 e $V^{(0)}(\infty) = 0$ (si veda il § 27.2). Inoltre, in base alla formula (43′) del 27.7, ed all'equazione (15), la sua derivata normale regolare su S è nulla all'interno. Da ciò, secondo il teorema 3 del § 28.2, sull'unicità di soluzione del problema interno di Neumann, concludiamo che $V^{(0)}(x) \equiv C$ = costante, $x \in \overline{G}$.

Dimostriamo che $C \neq 0$. Supponiamo, al contrario, che $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in \overline{G}$, e, in particolare, $V^{(0)}|_S = 0$. Ma allora, secondo il teorema 2 del § 28.2, concernente l'unicità di soluzione del problema di Dirichlet esterno, $V^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \in \overline{G}_1$. Dunque, $V^{(0)}(x) \equiv 0$. $x \in R^3$. Utilizzando la formula (46) del § 27.7, concludiamo che $\mu_0(x) \equiv 0$, $x \in S$, il che è impossibile.

Sia $\widetilde{\mu}_0$ un'altra autofunzione del nucleo $\mathscr{K}^*(x, y)$ corrispondente all'autovalore $\lambda = -1$. Da quanto è stato dimostrato, il potenziale di semplice strato $\widetilde{V}^{(0)}$ con densità $\widetilde{\mu}_0$ è uguale ad una costante $\widetilde{C} \neq 0$ su $\overline{G}$. Ma in questo caso il potenziale di semplice strato $(\widetilde{C}/C)\,V^{(0)} - \widetilde{V}^{(0)}$ con densità $(\widetilde{C}/C)\,\mu_0 - \widetilde{\mu}_0$ è uguale a zero su $\overline{G}$, e ne segue che questa densità è identicamente nulla su S, e cioè

$$\widetilde{\mu}_0(x) = \frac{\widetilde{C}}{C}\,\mu_0(x), \quad x \in S.$$

Quindi, $\lambda = -1$ è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}^*(x, y)$ e, quindi, del nucleo $\mathscr{K}(x, y)$.

Normalizziamo l'autofunzione μ_0 in modo che

$$V^{(0)}(x) = \int\limits_S \frac{\mu_0(y)}{|x-y|}\,dS_y \equiv 1, \quad x \in \overline{G}. \quad (17)$$

Il potenziale di semplice strato $V^{(0)}$ con densità μ_0 è detto *potenziale di Robin.*

Qual è il significato fisico del potenziale di Robin? È il potenziale creato dalle cariche su una superficie conduttrice S, mentre la sua densità

$$\mu_0(x) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_+(x)$$

è la densità di cariche stabilite su questa superficie. Inoltre, la carica totale

$$\int_S \mu_0(x)\,dS = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_+ dS$$

è detta *capacità* del conduttore S.

Ritorniamo alle equazioni (11) e (11*) per $\lambda = -1$. Conformemente al terzo teorema di Fredholm, l'equazione integrale (11*), per $\lambda = -1$, è risolvibile solo e soltanto se il termine noto g è ortogonale a 1. Quindi, è valido il seguente teorema:

Teorema 2. *Il problema di Neumann interno è risolvibile per qualunque funzione continua u_1^- che soddisfa la condizione di ortogonalità*

$$\int_S u_1^-(x)\,dS = 0, \tag{18}$$

e la sua soluzione è rappresentata dal potenziale di semplice strato.

Inoltre, affinché l'equazione (11) sia risolvibile per $\lambda = -1$, è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a μ_0. Dunque, *il problema di Dirichlet esterno ha una soluzione che è rappresentabile dal potenziale di doppio strato, per qualunque funzione continua u_0^+ ortogonale alla densità μ_0 del potenziale di Robin*

$$\int_S u_0^+(x)\,\mu_0(x)\,dS = 0. \tag{19}$$

La condizione di risolvibilità (19) è sorta perché la soluzione del problema di Dirichlet esterno è stata cercata nella forma del potenziale di doppio strato e, di conseguenza, si richiedeva la diminuzione di $O(|x|)^{-2})$ per $|x| \to \infty$. Ma nell'impostazione di questo problema si richiede che la soluzione si annulli all'infinito. Per prendere in considerazione anche queste soluzioni ed allo stesso tempo eliminare la condizione (19) procediamo come segue.

Poniamo $0 \in G$. Cerchiamo la soluzione del problema di Dirichlet sotto forma di somma del potenziale di doppio strato $V^{(1)}$ con densità incognita ν su S, e del potenziale newtoniano $\alpha/|x|$ prodotto da una carica, nel punto $x = 0$, di una grandezza incognita α:

$$u(x) = V^{(1)}(x) + \frac{\alpha}{|x|} = \int_S \nu(y)\,\frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2}\,dS_y + \frac{\alpha}{|x|}. \tag{20}$$

La corrispondente equazione integrale (11) assume la forma

$$\nu(x) = -\int_S \mathcal{K}(x, y)\,\nu(y)\,dS_y + \frac{u_0^+(x)}{2\pi} - \frac{\alpha}{2\pi|x|}. \tag{21}$$

Da quanto abbiamo dimostrato, per la risolvibilità dell'equazione integrale (21), è necessario e sufficiente che

$$\frac{1}{2\pi}\int_S \left[u_0^+(x) - \frac{\alpha}{|x|}\right]\mu_0(x)\,dS = 0. \tag{22}$$

Dato che $0 \in G$, in virtù della (17) si ha

$$\int_S \frac{\mu_0(y)}{|y|}\,dS = V^{(0)}(0) = 1,$$

e perciò la condizione di risolvibilità (22) assume la forma

$$\alpha = \int_S u_0^+(x)\,\mu_0(x)\,dS. \tag{23}$$

Quindi, è valido il seguente

Teorema 3. *Il problema di Dirichlet esterno è risolvibile per qualunque funzione continua u_0^+ e la sua soluzione è data dalla somma del potenziale di doppio strato e del potenziale*

$$\frac{1}{|x|}\int_S u_0^+(x)\,\mu_0(x)\,dS.$$

Osservazione. Supponiamo che siano verificate le condizioni di risolvibilità (18) e (23). In questo caso le soluzioni generali delle equazioni integrali (21) e (11*), per $\lambda = -1$, contengono una costante arbitraria C_1 e C, rispettivamente, cioè: $\nu(x) + C_1$, $\mu(x) + C\mu_0(x)$. Da ciò, in virtù delle formule (30) (§ 27.5) e (17), otteniamo di nuovo che la soluzione del problema di Dirichlet esterno è unica (e, quindi, non contiene la costante C), mentre la soluzione del problema di Neumann interno è definita a meno di una costante additiva C_1.

5. Soluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann per una sfera. Costruiamo le soluzioni dei problemi di Dirichlet e di Neumann (interno ed esterno) per la sfera U_R.

Sia f una funzione continua assegnata sulla sfera S_R. Allora $f(Rs)$ è sviluppata in serie di Fourier in termini delle funzioni sferiche

$$f(Rs) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s), \quad s \in S_1, \tag{24}$$

dove, in virtù della (38) del § 25.7 si ha

$$Y_l(s) = \frac{2l+1}{4\pi} \int_{S_1} f(Rs')\, \mathcal{P}_l((s,\ s'))\, ds'.$$

La serie (24) converge in $\mathcal{L}^2(S_R)$ (si veda il § 25.6). Supponiamo che questa serie converga anche in $C(S_R)$. Allora

$$u(r,\ \theta,\ \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l(\theta,\ \varphi), \quad r < R, \tag{25}$$

è la soluzione del problema di Dirichlet interno con $u_0^- = f$; *si ha in questo caso*

$$u(r,\ \theta,\ \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R}{l} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l(\theta,\ \varphi) + C, \quad r < R, \tag{26}$$

che è la soluzione del problema di Neumann interno con $u_1^- = f$ *a condizione che*

$$Y_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} f(Rs')\, ds' = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} f(x)\, dS = 0; \tag{27}$$

$$u(r,\ \theta,\ \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_l(\theta,\ \varphi), \quad r > R, \tag{28}$$

sia la soluzione del problema di Dirichlet con $u_0^+ = f$; *l'espressione*

$$u(r,\ \theta,\ \varphi) = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{R}{l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_l(\theta,\ \varphi), \quad r > R, \tag{29}$$

è la soluzione del problema di Neumann esterno con $u_1^+ = f$.

Infatti, la serie (25) consiste di polinomi armonici (si veda il § 25.8) e per ipotesi converge in $C(S_R)$. Per tale ragione questa serie converge in $C(\bar{U}_R)$ (si veda il § 24.5) e definisce una funzione u armonica in U_R (si veda il § 24.8), continua su $\bar{U}_R$, la quale, in virtù della (24), assume i valori di f su S_R. Ciò significa che la serie (25) fornisce la soluzione del problema di Dirichlet per la sfera U_R con $u_0^- = f$.

In base al criterio di Abel[1], la serie

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} Y_l(s)$$

converge insieme alla serie (24) in $C(S_R)$. Continuando i ragionamenti precedenti, concludiamo che la serie (26) converge in $C(\bar{U}_R)$

[1] Si veda Fichtengolts [1], vol. II.

e definisce la funzione u che è armonica in U_R e continua su $\bar{U}_R$. Inoltre, questa serie può essere derivata termine a termine rispetto a r, e cioè

$$\frac{\partial u(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{l-1} Y_l(\theta, \varphi), \tag{30}$$

poiché la serie (30), in virtù del criterio di Abel, converge in $C(\bar{U}_R)$. Infine, la somma della serie (30) su S_R, conformemente alla (24), coincide con f se la funzione f soddisfa la condizione (27) di risolvibilità del problema di Neumann interno (si veda il § 28.4). Ciò significa appunto che la serie (26) fornisce la soluzione del problema di Neumann interno per la sfera U_R con $u_1^- = f$, se è verificata la condizione di risolvibilità (27).

In modo analogo si può dimostrare che le serie (28) e (29) definiscono le soluzioni dei corrispondenti problemi al contorno esterni.

§ 29. *Funzione di Green del problema di Dirichlet*

1. Definizioni e proprietà della funzione di Green. Una funzione $\mathcal{G}(x, y)$, $x \in \bar{G}$, $y \in G$, in cui G è una regione (limitata), è detta *funzione di Green del problema di Dirichlet* (*interno*) per G, se essa soddisfa le seguenti condizioni:

1) Per ogni $y \in G$ possiamo scrivere

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x-y|} + g(x, y), \tag{1}$$

dove la funzione $g(x, y)$ è armonica in G e continua su $\bar{G}$ rispetto a x.

2) Per ogni $y \in G$ la condizione di frontiera è

$$\mathcal{G}(x, y)|_{x \in S} = 0. \tag{2}$$

Dalle condizioni 1) e 2) segue che la funzione $\mathcal{G}(x, y)$ è armonica rispetto a x nella regione $G \setminus \{y\}$, continua in $\bar{G} \setminus \{y\}$, si annulla su S e tende a $+\infty$ per $x \to y$. In virtù del principio del massimo (si veda il § 24.4) segue che $\mathcal{G}(x, y) > 0$, $x \in G$, $y \in G$. Inoltre, la funzione armonica $g(x, y)$ soddisfa la condizione di frontiera

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi |x-y|}, \quad x \in S, \quad y \in G, \tag{3}$$

da cui segue che $g(x, y) < 0$, $x \in S$, $y \in G$. Ma allora, in virtù del principio del massimo, questa disuguaglianza è valida anche in G, cioè $g(x, y) < 0$, $x \in \bar{G}$, $y \in G$. Dunque, in virtù della (1), la funzione di Green soddisfa le disuguaglianze

$$0 < \mathcal{G}(x, y) < \frac{1}{4\pi |x-y|}, \quad x \in G, \quad y \in G, \quad x \neq y. \tag{4}$$

Dato che la soluzione del problema di Dirichlet è unica (si veda il § 28.2), ne segue che la funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ è unica (se esiste).

Significato fisico della funzione di Green. Per definizione, la funzione di Green soddisfa l'equazione di Poisson in senso generalizzato per ogni $y \in G$, cioè

$$\Delta_x \mathcal{G}(x, y) = -\delta(x - y), \quad x \in G,$$

e si annulla sulla frontiera S. Quindi, la funzione $\mathcal{G}(x, y)$ può essere interpretata come un potenziale coulombiano (si veda il § 27.3) generato all'interno di una superficie conduttrice S, messa a terra, con una carica $+\frac{1}{4\pi}$ che si trova nel punto $y \in G$ (fig. 94).

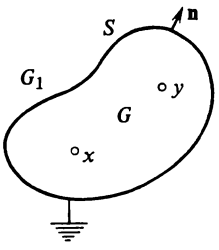


Fig. 94.

La funzione $g(x, y)$ è continua nell'insieme delle variabili (x, y) in $\overline{G} \times G$.

Siano $x_0 \in \overline{G}$, $y_0 \in G$ ed $(x, y) \to (x_0, y_0)$, $x \in \overline{G}$, $y \in G$. Utilizzando il fatto che la funzione $g(x, y)$ è continua in x, il principio del massimo e l'uguaglianza (3), si ottiene

$$|g(x_0, y_0) - g(x, y)| \leqslant |g(x_0, y_0) - g(x, y_0)| + |g(x, y_0) - g(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant |g(x_0, y_0) - g(x, y_0)| + \max_{x' \in S} \frac{1}{4\pi} \left| \frac{1}{|x' - y_0|} - \frac{1}{|x' - y|} \right| \to 0,$$

il che dimostra la continuità della funzione g nel punto (x_0, y_0).

Teorema. *Se S è una superficie sufficientemente regolare, la funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ esiste, ha una derivata normale regolare $\frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial n}$ su S, per tutte le $y \in G$, ed è simmetrica:*

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x), \quad x \in G, \quad y \in G. \tag{5}$$

Dimostrazione. È sufficiente stabilire che esiste una funzione simmetrica $g(x, y)$, che possiede, per ogni $y \in G$, le seguenti proprietà rispetto a x: questa funzione è armonica in G, continua su $\overline{G}$, soddisfa la condizione di frontiera (3) ed ha una derivata normale regolare su S.

Fissiamo $y \in G$. La funzione $-(1/4\pi)\,|x - y|^{-1}$, $x \in G_1$, è, evidentemente, la soluzione del problema di Neumann esterno con la condizione di frontiera

$$u_1^+(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|x - y|}, \quad x \in S. \tag{6}$$

D'altra parte, in base al teorema 1 del § 28.4, questa soluzione può essere rappresentata nella forma del potenziale di semplice strato

$$V^{(0)}(x, y) = \int_S \frac{\mu(y', y)}{|x - y'|}\, dS_{y'}$$

con densità $\mu(y', y)$ continua in $y' \in S$. Perciò, in virtù del fatto che la soluzione del problema di Neumann esterno è unica (si veda il § 28.2, teorema 4), si ha

$$V^{(0)}(x, y) = -\frac{1}{4\pi |x-y|}, \quad x \in G_1. \tag{7}$$

Il potenziale $V^{(0)}$ è armonico in G e continuo in R^3 (si veda il § 27.2) e, in virtù della (7), soddisfa la condizione di frontiera (3). Perciò

$$g(x, y) = V^{(0)}(x, y) = \int_S \frac{\mu(y', y)}{|x-y'|} dS_{y'}, \quad x \in G. \tag{8}$$

Secondo il teorema del § 27.7, ne segue che la funzione $g(x, y)$ ha una derivata normale regolare (dall'interno) su S e questa derivata, in virtù delle formule (46) del § 27.7 e della (6), è uguale a

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial n_x} = 4\pi\mu(x, y) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|x-y|}, \quad x \in S. \tag{9}$$

Non resta altro che dimostrare la simmetria di $g(x, y)$. Applicando la formula di Green (13) del § 28.3 alla funzione $g(x, y)$ ed utilizzando le condizioni di frontiera (3) e (9) e la formula (8), per tutte le $x \in G$ ed $y \in G$ si ottiene

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{|x-y'|} \frac{\partial g(y', y)}{\partial n_{y'}} - g(y', y) \frac{\partial}{\partial n_{y'}} \frac{1}{|x-y'|} \right] dS_{y'} =$$

$$= -\int_S g(y', x) \frac{\partial g(y', y)}{\partial n_{y'}} dS_{y'} +$$

$$+ \int_S g(y', y) \left[\frac{\partial g(y', x)}{\partial n_{y'}} - 4\pi\mu(y', x) \right] dS_{y'} =$$

$$= \int_S \left[g(y', y) \frac{\partial g(y', x)}{\partial n_{y'}} - g(y', x) \frac{\partial g(y', y)}{\partial n_{y'}} \right] dS_{y'} -$$

$$- 4\pi \int_S g(y', y) \mu(y', x) dS_{y'} = \int_G [g(y', y) \Delta g(y', x) -$$

$$- g(y', x) \Delta g(y', y)] dy' + \int_S \frac{\mu(y', x)}{|y-y'|} dS_{y'} = g(y, x).$$

Il teorema è dimostrato.

Dalla simmetria di $g(x, y)$ derivano le seguenti proprietà supplementari: *la funzione è continua in (x, y) in $G \times \overline{G}$ ed armonica rispetto a y in G per ogni $x \in G$, essa assume il valore $-(1/4\pi) |x - y|^{-1}$ per $y \in S$ ed ha una derivata normale regolare $\partial g(x, y)/\partial n_y$ su S.*

2. Esempi di costruzione della funzione di Green (metodo delle riflessioni). Per costruire una funzione di Green su una regione con

un gruppo di simmetria sufficientemente ampio è molto efficace il *metodo delle riflessioni*. Riportiamo alcuni esempi per illustrarlo.

a) Una sfera U_R. Sia $y \in U_R$, $y \neq 0$ e

$$y^* = y \frac{R^2}{|y|^2}, \quad |y|\,|y^*| = R^2, \tag{10}$$

sia il punto simmetrico rispetto alla sfera S_R nella trasformazione d'inversione (si veda il § 24.10).

Cerchiamo la funzione di Green nella forma

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{\alpha}{4\pi |x-y^*|}, \tag{11}$$

dove $-(\alpha/4\pi)$ è una carica incognita nel punto simmetrico y^*. La funzione

$$g(x, y) = -\frac{\alpha}{4\pi |x-y^*|}$$

è armonica in U_R ed appartiene alla classe $C^\infty(\overline{U}_R)$. Scegliamo la grandezza α in modo che la funzione $\mathcal{G}(x, y)$ si annulli sulla frontiera S_R. Per farlo notiamo che, per $|x| = R$, i triangoli Oxy^* e Oxy sono simili: essi hanno un angolo in comune ed i lati adiacenti, in virtù della (10), sono proporzionali (fig. 95). Perciò per $|x| = R$ è valida la relazione

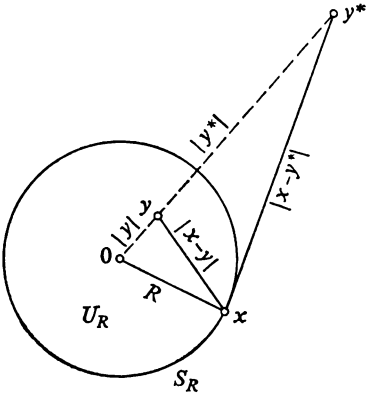


Fig. 95.

$$\frac{R}{|y|} = \frac{|x-y^*|}{|x-y|},$$

e, di conseguenza, in virtù della (11), si deve porre $\alpha = R/|y|$. Dunque,

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{R}{4\pi |y|\,|x-y^*|} = \frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{R|y|}{4\pi |x|\,|y|^2 - yR^2|} \tag{12}$$

è la funzione di Green per U_R. La formula (12) è valida anche per $y = 0$:

$$\mathcal{G}(x, 0) = \frac{1}{4\pi |x|} - \frac{1}{4\pi R}.$$

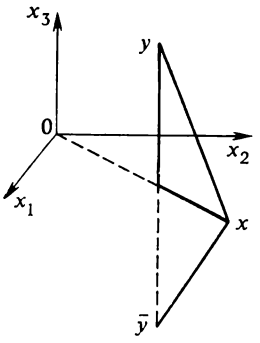
b) Il semispazio $x_3 > 0$[1]. Supponiamo che un punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ appartenga a questo semispazio ($y_3 > 0$). Il punto

[1] Questa regione è infinita (si veda anche l'esempio d)). La funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ per queste regioni, oltre alle condizioni 1) e 2), deve anche soddisfare la condizione $\mathcal{G}(x, y) \to 0$ per $|x| \to \infty$, $y \in G$.

$\bar{y} = (y_1, y_2, -y_3)$ è detto simmetrico del punto y rispetto al piano $x_3 = 0$, (fig. 96). È facile vedere che la funzione di Green per il semispazio $x_3 > 0$ è definito con la formula

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{1}{4\pi |x-\bar{y}|}. \tag{13}$$

c) La s e m i s f e r a $|x| < R$, $x_3 > 0$. Supponiamo che un punto y appartenga a questa semisfera; y^* è il punto simmetrico



Fsg. 96.

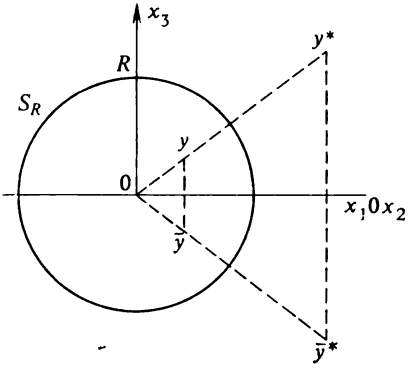


Fig. 97.

di y rispetto alla sfera S_R; $\bar{y}$ ed $\bar{y}^*$ sono i punti simmetrici di y ed y^* rispetto al piano $x_3 = 0$ (fig. 97). La funzione di Green è espressa dalla formula

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{R}{4\pi |y| \, |x-y^*|} - \frac{1}{4\pi |x-\bar{y}|} + \frac{R}{4\pi |y| \, |x-y^*|}. \tag{14}$$

d) L' a n g o l o d i e d r o $x_2 > 0$, $x_3 > 0$. Supponiamo che un punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ appartenga a questo angolo diedro, e siano

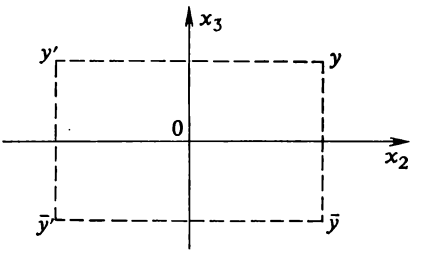


Fig. 98.

$y_2 > 0$ ed $y_3 > 0$; $\bar{y}$ ed y' sono i punti simmetrici di y rispetto ai piani $x_3 = 0$ ed $x_2 = 0$, rispettivamente; y' è il punto simmetrico di $\bar{y}$ rispetto al piano $x_3 = 0$ (fig. 98). La funzione di Green ha la

forma

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi \mid x-y \mid} - \frac{1}{4\pi \mid x-\bar{y} \mid} - \\ - \frac{1}{4\pi \mid x-y' \mid} + \frac{1}{4\pi \mid x-\bar{y}' \mid}. \quad (15)$$

In modo simile viene costruita la funzione di Green per un angolo diedro di soluzione π/n, dove n è un intero e $n \geqslant 3$.

3. Soluzione di un problema al contorno mediante la funzione di Green. Supponiamo in questo paragrafo che S sia una superficie sufficientemente regolare (si veda il § 28.2). Consideriamo il problema di Dirichlet interno per l'equazione di Poisson

$$\Delta u = -f(x), \quad u|_S = u_0(x), \quad u \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), \quad (16)$$

dove $f \in \mathcal{L}_2(G) \cap C(G)$ ed $u_0 \in C(S)$. Come è stato stabilito nel § 28.2, la soluzione di questo problema è unica.

Teorema. *Se la soluzione $u(x)$ del problema* (16) *ha una derivata normale regolare su S, essa è rappresentata con la formula*

$$u(x) = -\int_S \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial n_y} u_0(y)\, dS_y + \int_G \mathcal{G}(x, y) f(y)\, dy, \quad x \in G. \quad (17)$$

Dimostrazione. Per ipotesi, la soluzione $u \in C^2(G) \cap C(G)$, ha una derivata normale regolare su S e $\Delta u = -f, f \in \mathcal{L}_2(G) \cap C(G)$. Applicando alla funzione $u(x)$ la formula di Green (1) del § 24.1, per $n = 3$, e tenendo conto della (16), si ottiene

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \frac{1}{\mid x-y \mid} - u_0(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{\mid x-y \mid} \right] dS_y + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{f(y)}{\mid x-y \mid} dy, \quad x \in G. \quad (18)$$

Inoltre, per ogni $x \in G$ la funzione $g(x, y)$ è armonica rispetto a y in G e continua rispetto a y su $\bar{G}$ ed ha una derivata normale regolare $\partial g(x, y)/\partial n_y$ su S (si veda il § 29.2). Applicando alle funzioni $u(y)$ e $g(x, y)$ la formula di Green (8) del § 21.2, deduciamo l'uguaglianza

$$0 = \int_S \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} g(x, y) - u_0(y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial n_y} \right] dS_y + \\ + \int_G f(y)\, g(x, y)\, dy, \quad x \in G.$$

Addizionando quest'uguaglianza alla (18) ed utilizzando le (1) e (3), si ottiene la formula (17). Il teorema è dimostrato.

4. Formula di Poisson. Calcoliamo ora la derivata normale regolare della funzione di Green per una sfera U_R sulla sfera S_R. Utiliz-

zando l'espressione (12) per questa funzione, si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial n_y}\Big|_{S_R} = \frac{\partial}{\partial |y|}\left[\frac{1}{4\pi |x-y|} - \frac{R|y|}{4\pi |x|y|^2 - yR^2|}\right]\Big|_{|y|=R} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{1}{\sqrt{|x|^2+\rho^2-2|x|\rho\cos\gamma}} - \right.$$

$$\left. - \frac{R}{\sqrt{R^4+|x|^2\rho^2-2R^2|x|\rho\cos\gamma}}\right]\Big|_{\rho=R} =$$

$$= \frac{|x|^2-R^2}{4\pi R(R^2+|x|^2-2R|x|\cos\gamma)^{3/2}} = \frac{|x|^2-R^2}{4\pi R|x-y|^3}\Big|_{y\in S_R}.$$

La formula (17) per la sfera U_R per $f=0$ assume la forma

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R} \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}\, u_0(y)\, dS_y, \qquad |x| < R. \tag{19}$$

Questo è appunto la *formula (integrale) di Poisson* che è simile alla formula di Cauchy per le funzioni analitiche.

Dimostriamo che *la formula di Poisson* (19) *dà la soluzione del problema di Dirichlet interno per la sfera* U_R,

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S_R} = u_0 \tag{20}$$

per ogni funzione u_0 *continua su* S_R.

Infatti, la soluzione $u(x)$ di questo problema esiste per ogni funzione continua u_0 ed è unica (si veda il § 28). In ogni sfera più piccola U_ρ, $\rho < R$, la funzione $u(x)$ è la soluzione del problema di Dirichlet con un valore di frontiera $u|_{S_\rho}$ ed appartiene alla classe $C^\infty(\overline{U}_\rho)$. Quindi, secondo il teorema del § 29.3, questa soluzione è rappresentata dall'integrale di Poisson (19), e cioè

$$u(x) = \frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_{|y|=\rho} \frac{\rho^2-|x|^2}{|x-y|^3}\, u(y)\, dS_y, \quad |x| < \rho.$$

Passando, in questa formula, al limite per $\rho \to R$ ed utilizzando il fatto che $u(x)$ è continua su $\overline{U}_R$ e la condizione di frontiera (20), si ottiene la rappresentazione (19), come dovevasi dimostrare.

5. Riduzione di un problema al contorno ad un'equazione integrale. Consideriamo in una regione G il seguente problema al contorno per l'equazione di Poisson:

$$\Delta u = -f(x), \quad u|_S = 0, \quad u \in C^2(G) \cap C(\overline{G}), \tag{21}$$

dove $f \in \mathcal{L}_2(G) \cap C(G)$.

Dimostriamo preliminarmente il seguente

Lemma. *Se* $f \in C(\overline{G})$, *la funzione*

$$\widetilde{V}(x) = \int_G g(x, y) f(y)\, dy \tag{22}$$

è armonica in G.

Dimostrazione. Visto che la funzione $g(x, y)$ è continua in (x, y) in $G \times \overline{G}$ ed armonica in x in G (si veda il § 29.1), la funzione $\widetilde{V}$ appartiene a $C(G)$ e per qualunque $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ sono valide le uguaglianze

$$\int \widetilde{V}|(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx = \int \left[\int g(x, y) f(y)\, dy \right] \Delta\varphi(x)\, dx =$$

$$= \int f(y) \left[\int g(x, y)\, \Delta\varphi(x)\, dx \right] dy = 0,$$

poiché g soddisfa l'equazione di Laplace (si veda il § 29.1). Per questa ragione la funzione $\widetilde{V}(x)$ è generalizzata armonica e, quindi, è armonica nella regione G (si veda il § 24.7). Il lemma è dimostrato.

Teorema. *Se* $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$, *la soluzione (unica) del problema* (21) *è espressa con la formula*

$$u(x) = \int_G \mathscr{G}(x, y) f(y)\, dy \tag{23}$$

ed ha una derivata normale regolare su S.

Dimostrazione. Dimostriamo che la formula (23) è la soluzione del problema (21). Utilizzando la (1), riscriviamo la (23) come somma di due termini:

$$u(x) = V(x) + \widetilde{V}(x), \tag{24}$$

dove V è il potenziale di volume di densità $f/4\pi$ e la funzione $\widetilde{V}$ è definita mediante l'uguaglianza (22).

Per ipotesi, $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$, e quindi il potenziale di volume $V \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ soddisfa l'equazione di Poisson (21) (si veda il § 27.1). Conformemente al lemma, la funzione $\widetilde{V}(x)$ è armonica nella regione G. Dunque, in virtù della (24), la funzione $u \in C^2(G)$ soddisfa anche in G l'equazione di Poisson (21).

Dimostriamo che $u \in C(\overline{G})$ e si annulla su S. Per ciò, è sufficiente dimostrare che

$$|u(x')| \overset{x \in S}{\rightrightarrows} 0, \quad x' \to x, \quad x' \in G. \tag{25}$$

Sia $\varepsilon > 0$. In virtù delle stime (4), esiste una sottoregione $G' \Subset G$ tale (fig. 99), che (si veda il § 1.6)

$$\left| \int_{G \setminus G'} \mathscr{G}(x', y) f(y)\, dy \right| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int_{G \setminus G'} \frac{|f(y)|}{|x' - y|}\, dy < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x' \in \overline{G}. \tag{26}$$

Ma la funzione $g(x', y)$ è uniformemente continua rispetto a (x', y) su $\overline{G} \times \overline{G'}$ (si veda il § 29.1), e, quindi, in virtù della (1), la funzione di Green $\mathcal{G}(x', y)$ è uniformemente continua rispetto a (x', y) su $(G \setminus G'') \times G'$, dove G'' è una sottoregione qualsiasi tale che $G' \Subset G'' \Subset G$ (fig. 99). Perciò, tenendo conto del fatto che la funzione $\mathcal{G}(x', y)$ si annulla per $x' \in S$, $y \in \overline{G'}$, concludiamo che esiste una sottoregione $G'' \Subset G$, sufficientemente vicino a G, tale che

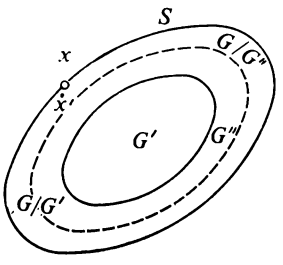


Fig. 99.

$$\left| \int_{G'} \mathcal{G}(x', y) f(y)\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad x' \in G \setminus G'',$$

da ciò e dalla disuguaglianza (26) segue la disuguaglianza

$$|u(x')| = \left| \int_{G} \mathcal{G}(x', y) f(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{G'} \mathcal{G}(x', y) f(y)\, dy \right| +$$

$$+ \left| \int_{G \setminus G'} \mathcal{G}(x', y) f(y)\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

valida per tutte le $x' \in G \setminus G''$. Ciò dimostra la relazione limite (25).

Dimostriamo che la funzione $u(x)$ ha una derivata normale regolare su S. Visto che $V \in C^1(R^3)$ (si veda il § 27.1), in virtù della (24), per farlo è sufficiente dimostrare che la funzione $\widetilde{V}(x)$ ha una derivata normale regolare su S. Da quanto abbiamo dimostrato prima, $\widetilde{V} \in C(\overline{G})$ è armonica in G e soddisfa la condizione di frontiera $\widetilde{V}|_S = -V|_S$. Costruiamo il potenziale di semplice strato $V^{(0)}$, con densità continua, che risolve il problema di Neumann esterno con $u_1^+ = -\partial V/\partial n|_S$ (si veda il § 28.4). Il potenziale di volume $-V(x)$ è anch'esso una soluzione di questo problema (si veda il § 27.1). Perciò, visto che il problema di Neumann esterno ha un'unica soluzione (si veda il § 28.2), concludiamo che $V^{(0)}(x) = -V(x)$, $x \in G_1$. In particolare, $V^{(0)}|_S = -V|_S$. In base al teorema di unicità della soluzione del problema di Dirichlet interno (si veda il § 28.2), ne segue che $\widetilde{V}(x) = V^{(0)}(x)$, $x \in G$. Visto che il potenziale di semplice strato $V^{(0)}$ ha una derivata normale regolare (dall'interno) su S (si veda il § 27.7), di conseguenza, anche la funzione V possiede la stessa proprietà. Il teorema è dimostrato.

Stabiliamo ora che il *problema al contorno*

$$-\Delta u = \lambda u + f(x), \quad u|_S = 0, \quad u \in C^2(G) \cap C(\overline{G}) \tag{27}$$

è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \int_{G} \mathcal{G}(x, y)\, [\lambda u(y) + f(y)]\, dy, \quad u \in C(\overline{G}), \tag{28}$$

se $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$.

Infatti, supponiamo che la funzione $u \in C(\overline{G})$ sia la soluzione dell'equazione integrale (28), cioè, in virtù della (1), si abbia

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{\lambda u(y) + f(y)}{|x-y|}\, dy + \int_G g(x, y)\, [\lambda u(y) + f(y)]\, dy. \quad (28')$$

Il primo termine a destra nella (28′) è un potenziale di volume e perciò appartiene alla classe $C^1(R^3)$ (si veda il § 27.1), mentre il secondo termine è una funzione armonica in G (si veda il lemma). Perciò $u \in C^1(G)$ e, di conseguenza, $\lambda u + f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$. Conformemente al teorema del § 29.5, la funzione $u(x)$ è la soluzione del problema al contorno (27).

Inversamente, se la funzione $u_1(x)$ è la soluzione del problema al contorno (27), questa funzione è l'unica soluzione del problema al contorno (21) con sostituzione di f con $\lambda u_1 + f$. Dato che $\lambda u_1 + f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$, per il teorema, questa soluzione è espressa con l'integrale (23) con la sostituzione di f con $\lambda u_1 + f$, cioè la funzione u_1 soddisfa l'equazione integrale (28). Con ciò abbiamo dimostrato l'equivalenza dei problemi (27) e (28).

6. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni. Consideriamo il problema al contorno agli autovalori omogeneo (problema di Dirichlet interno)

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u|_S = 0, \quad u \in C^2(G) \cap C(\overline{G}). \quad (29)$$

Nel § 29.5, abbiamo dimostrato che il problema (29) era equivalente a quello agli autovalori per l'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_G \mathcal{G}(x, y)\, u(y)\, dy, \quad u \in C(\overline{G}), \quad (30)$$

con nucleo simmetrico (e, quindi hermitiano) $\mathcal{G}(x, y)$ (si veda il § 29.1).

Dimostriamo che il nucleo $\mathcal{G}(x, y)$ è debolmente polare (si veda il § 17.4). Per ciò, prolunghiamo su $\overline{G} \times \overline{G}$ la funzione $g(x, y)$ che è definita e continua su $(\overline{G} \times G) \cup (G \times \overline{G})$ (si veda il § 29.1), ponendo, conformemente alla (3), che

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi |x-y|}, \quad x \in S, \quad y \in S.$$

In questo prolungamento la funzione $g(x, y)$ è continua su $\overline{G} \times \overline{G}$, esclusi i punti in cui $x = y$, $y \in S$. Ma allora, in virtù della (1), la funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ è continua per $x \in \overline{G}$, $y \in \overline{G}$, $x \neq y$ e, quindi, in virtù della (4), il nucleo $\mathcal{G}(x, y)$ è debolmente polare ($\alpha = 1$, $n = 3$).

Perciò per l'equazione (30) sono valide tutte le proposizioni della teoria delle equazioni integrali con nucleo simmetrico debolmente

polare, dimostrate nei §§ 19 e 20. Ma gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno (29) coincidono con gli autovalori e con le corrispondenti autofunzioni del nucleo $\mathcal{G}(x, y)$. Ciò permette di dimostrare completamente il teorema 1 del § 21.4 per il problema al contorno (29), nonché di stabilire alcune altre proprietà di questo problema.

Teorema. *L'insieme degli autovalori* $\{\lambda_k\}$ *del problema al contorno* (29) *non ha punti limite finiti, ed inoltre* $\lambda_k > 0$; *ogni autovalore* λ_k *è di molteplicità finita. Il più piccolo autovalore* λ_1 *è semplice, mentre la corrispondente autofunzione* $X_1(x) > 0$, $x \in G$. *Le autofunzioni* $\{X_k\}$ *si possono scegliere reali ed ortonormali;* $X_k \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$; *queste autofunzioni hanno una derivata normale regolare su* S. *Ogni funzione* f *che appartiene a* $\mathcal{M}_\Delta$[1] *può essere sviluppata in serie di Fourier regolarmente convergente nell'insieme delle autofunzioni* $\{X_k\}$.

Dimostrazione. L'assenza di punti limite finiti nell'insieme $\{\lambda_k\}$ e la molteplicità finita di ogni autovalore λ_k seguono dai teoremi di Fredholm (si veda il § 18.5). Dal fatto che il nucleo $\mathcal{G}(x, y)$ è reale ed hermitiano segue che le autofunzioni $\{X_k\}$ si possono scegliere reali ed ortonormali (si vedano i §§ 19.4 e 20.7, rispettivamente).

L'autofunzione $X_k \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ è appunto la soluzione del problema al contorno (29) e dell'equazione integrale (30) per $\lambda = \lambda_k$. Quindi, per il teorema del § 29.5 $X_k(x)$ ha una derivata normale regolare su S. Di qui e dalla formula di Green (7) del § 21.2, per $u = v = X_k$ segue che

$$\lambda_k = \lambda_k (X_k, X_k) = -(\Delta X_k, X_k) = \int_G |\operatorname{grad} X_k|^2 \, dx > 0.$$

Il fatto che λ_1 è semplice ed $X_1(x)$ è positivo in G, segue dal teorema di Jentsch (si veda il § 20.7), poiché, in virtù della (4), il nucleo $\mathcal{G}(x, y)$ è positivo.

Supponiamo che f appartenga a $\mathcal{M}_\Delta$. Allora la funzione $f(x)$ è soluzione (unica) del problema al contorno

$$\Delta f = -h, \quad f|_S = 0,$$

dove $h = -\Delta f \in C(G) \cap \mathcal{L}_2(G)$. Conformemente al teorema del § 29.3, la funzione $f(x)$ è originalmente rappresentabile in termini del nucleo $\mathcal{G}(x, y)$ e, di conseguenza, in base al teorema di Hilbert-Schmidt (si veda il § 20.6), questa funzione può essere sviluppata in serie di Fourier regolarmente convergente nel sistema di autofunzioni $\{X_k\}$. Il teorema è dimostrato.

Quindi, per il problema al contorno (29) sono validi il teorema 1 del § 21.4, ed i suoi corollari. In particolare, il *sistema di autofunzioni* $\{X_k\}$ *di questo problema è completo in* $\mathcal{L}_2(G)$.

---

[1] Cioè, $f \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, $\Delta f \in \mathcal{L}_2(G)$ e $f|_S = 0$ (si veda il § 21.1).

Osservazione. Utilizzando l'osservazione del § 27.7, si può dimostrare che le autofunzioni $X_k \in C^1(\bar{G})$; inoltre, $X_k \in C^\infty(G)$ (si veda il § 30.2).

7. Esercizi. a) Utilizzando la formula di Poisson (19), dimostrare la *disuguaglianza di Harnack*

$$\frac{R(R-|x|)}{(R+|x|)^2}u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R(R+|x|)}{(R-|x|)}u(0), \quad |x|<R,$$

che è valida per ogni funzione $u(x) \geqslant 0$ armonica nella sfera U_R e continua su $\bar{U}_R$.

b) Utilizzando la disuguaglianza di Harnack, dimostrare il seguente teorema: ogni successione crescente di funzioni armoniche in una regione G converge (uniformemente su ogni compatto $K \subset G$) ad una funzione armonica in G, oppure $a+\infty$.

c) Dimostrare l'uguaglianza

$$\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}\cdot dS_y - \begin{cases} 1, & |x|<R, \\ -\dfrac{R}{|x|}, & |x|>R, \end{cases}$$

d) Utilizzando c), dimostrare che l'integrale di Poisson

$$\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{|x|^2-R^2}{|x-y|^3}u_0(y)\,dS_y, \quad |x|>R,$$

dà la soluzione del problema di Dirichlet esterno per la sfera U_R.

e) Dimostrare che l'integrale di Poisson n-dimensionale

$$\frac{1}{\sigma_n R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}u_0(y)\,dS_y$$

è la soluzione del problema di Dirichlet interno per la sfera $U_R \subset R^n$.

f) Dimostrare che le soluzioni dei problemi di Dirichlet e di Neumann per il sottospazio $x_3 > 0$ sono rispettivamente rappresentati dalle seguenti formule:

$$\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{y_3=0}\frac{u_0(y)}{|x-y|^3}\,dS_y, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{y_3=0}\frac{u_1(y)}{|x-y|}\,dS_y,$$

se $u_0(y) = o(|y|^{1-\varepsilon})$, $u_1(y) = o(y^{-1-\varepsilon})$, $|y| \to \infty$ per ogni ε positivo; qui $y = (y_1, y_2)$.

g) Sia G una regione limitata convessa in R^3. Dimostrare che il problema al contorno per l'equazione di trasporto stazionaria (si veda il § 2.4)

$$(s, \operatorname{grad}\psi)+\alpha\psi = \lambda h(x)\varphi(x)+f(x),$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\psi(x, s')\,ds', \quad \psi(x, s)=0, \quad x\in S, \quad (s, n_x)<0,$$

è equivalente all'equazione integrale di Peierls (si veda l'esercizio g) del § 18.5)

$$\varphi(x)=\int\limits_G \mathcal{K}(|x-y|)[\lambda h(y)\varphi(y)+f(y)]\,dy, \quad \mathcal{K}(\xi)=\frac{e^{-\alpha\xi}}{4\pi\xi^2}.$$

Qui h e f appartengono a $C(\bar{G})$, e $h(x)$ e α sono positivi.

h) Utilizzando g) ed il teorema di Jentsch (si veda il § 20.7), dimostrare che tutti gli autovalori $\{\lambda_k\}$ dell'equazione di Peierls omogenea sono positivi, λ_1 è semplice, l'autofunzione φ_1 corrispondente a λ_1 è positiva, ed il sistema di autofunzioni $\{\varphi_k\}$ è completo in $\mathcal{L}_2(G; h)$.

i) Dimostrare il seguente principio del massimo: se una funzione $u(x)$ della classe $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ soddisfa la disuguaglianza differenziale

$$Lu \equiv -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q(x)\, u \leqslant 0, \quad p > 0, \quad q \geqslant 0,$$

in una regione limitata G, allora $u \leqslant 0$ su $\overline{G}$, oppure $u(x)$ assume il suo massimo (positivo) su $\overline{G}$ sulla frontiera S.

j) Utilizzando i), dimostrare che se una funzione $u \in C^2(G) \cup C(\overline{G})$ è la soluzione del problema al contorno

$$-\Delta u + q(x)\, u = F(x), \quad u \mid_S = v(x), \tag{31}$$

è valida la disuguaglianza

$$\| u \|_{C(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{q_0} \| F \|_{C(\overline{G})} + \| v \|_{C(S)}, \quad q_0 = \min_{x \in \overline{G}} q(x).$$

k) Utilizzando j), dimostrare che la soluzione del problema (31) è unica nella calsse $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ e dipende con continuità da F e v nella norma in C (a condizione che $q_0 > 0$).

l) Dimostrare che la soluzione del problema al contorno

$$Lu = f, \quad \alpha u + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = v$$

è l'unica nella classe $C^2(G) \cap C^1(G)$ se $q \not\equiv 0$ o $\alpha \not\equiv 0$.

m) Sia L un operatore definito positivo, cioè $(Lu, u) > 0$, $u \in \mathcal{M}_L$, $u \neq 0$. Dimostrare che una funzione u_0 che appartiene a $\mathcal{M}_L$ è la soluzione dell'equazione $Lu = f$, $f \in \mathcal{L}_2(G)$, se e solo se essa dà in $\mathcal{M}_L$ un minimo al funzionale

$$(Lu, u) - 2\, Re\, (f, u);$$

la soluzione u_0 è unica in $\mathcal{M}_L$.

§ 30. *Equazione di Helmholtz*

L'equazione

$$\Delta u + k^2 u = -f(x) \tag{1}$$

è detta *equazione di Helmholtz* (si veda il § 2.3). Per $k = 0$ quest'equazione diventa equazione di Poisson. La teoria dell'equazione di Helmholtz è vicina a quella dell'equazione di Poisson, ma ci sono certe particolarità legate alla non unicità della sua soluzione (per $k^2 > 0$).

Consideriamo l'equazione (1) in uno spazio tridimensionale, cioè $n = 3$. Le corrispondenti soluzioni fondamentali sono espresse con le seguenti formule (si veda il § 11.9):

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi |x|}, \quad \overline{\mathcal{E}}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi |x|}.$$

In seguito poniamo $k > 0$.

1. Condizioni di Sommerfeld per la radiazione. Come è stato mostrato nel § 28.2, la soluzione dell'equazione di Poisson in tutto lo spazio è unica nella classe delle funzioni (generalizzate) che si an-

nullano all'infinito. Per l'equazione di Helmholtz quest'asserzione non è più valida, poiché la corrispondente equazione omogenea

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{2}$$

ha in R^3 una soluzione non nulla

$$\operatorname{Im} \mathscr{E}(x) = -\frac{\sin k \mid x \mid}{4\pi \mid x \mid},$$

che si annulla all'infinito.

Per separare la classe dell'unicità delle soluzioni per l'equazione di Helmholtz nelle regioni illimitate che rappresentano l'esterno delle regioni limitate, bisogna esigere restrizioni supplementari alla condotta delle soluzioni all'infinito. Queste restrizioni sono le *condizioni di radiazione di Sommerfeld* (si veda il § 2.3):

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \mid x \mid} - iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty \tag{3}$$

oppure

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \mid x \mid} + iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty. \tag{$\overline{3}$}$$

In seguito (si veda il § 30.5) determineremo il significato fisico delle condizioni di radiazione: le condizioni (3) corrispondono ad onde disperse (che vanno all'infinito), mentre le ($\overline{3}$) corrispondono ad onde incidenti (che arrivano dall'infinito). È facile verificare che le soluzioni fondamentali $\mathscr{E}(x)$ ed $\overline{\mathscr{E}}(x)$ soddisfano rispettivamente le condizioni di radiazione (3) e ($\overline{3}$). Notiamo che, per le funzioni armoniche ($k = 0$), le condizioni di radiazione derivano da una sola esigenza: $u(\infty) = 0$ (si veda il § 24.10). D'altra parte, si può dimostrare[1] che per $k > 0$ ogni soluzione dell'equazione di Helmholtz omogenea che soddisfa la seconda condizione di radiazione della (3) o ($\overline{3}$), soddisfa anche la prima condizione

$$u(x) = O(|x|^{-1}).$$

2. Equazione di Helmholtz omogenea. Le soluzioni dell'equazione di Helmholtz omogenea (2) possiedono proprietà analoghe a quelle delle funzioni armoniche. Citiamo alcune di queste proprietà.

a) *Se la funzione* $u \in C(G)$ *soddisfa in* G *l'equazione* (2) *in senso generalizzato, allora* u *appartiene a* $C^\infty(G)$.

Quest'asserzione può essere dimostrata come per le funzioni armoniche (si veda il § 24.7).

b) Sia S la frontiera di G sufficientemente regolare (nel senso del § 28.2). *Se la funzione* $u \in C(\overline{G})$ *soddisfa l'equazione* (2) *in* G *ed*

[1] Si veda Vekua [2].

ha una derivata normale regolare su S, sono valide le seguenti formule:

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left[\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u(y)}{\partial n}-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\right]dS_y, \qquad (4)$$

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left[\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u(y)}{\partial n}-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\right]dS_y. \qquad (\bar{4})$$

La dimostrazione di queste formule è analoga a quella della formula di Green (5) del § 24.1 per le funzioni armoniche.

c) *Se la funzione generalizzata u che appartiene a $\mathscr{S}'$ soddisfa in tutto lo spazio l'equazione di Helmholtz omogenea, allora u appartiene a θ_M.*

Infatti, applicando all'equazione (2) la trasformazione di Fourier, si ottiene $(-|\xi|^2+k^2)F[u]=0$; ne segue che $F[u]=0$ per $|\xi|\neq k$, cioè $F[u]$ è una funzione generalizzata finita. Ma allora, in base al teorema del § 9.4, si ha

$$u\in F^{-1}[F[u]]\in\theta_M.$$

d) Diremo che la funzione generalizzata $u(x)$ *soddisfa le condizioni di radiazione* (3) *o* ($\bar{3}$) se questa funzione appartiene alla classe C^1 fuori di una certa sfera e soddisfa le condizioni (3) o ($\bar{3}$).

Se la funzione generalizzata u soddisfa in tutto lo spazio R^3 l'equazione di Helmholtz omogenea e le condizioni di radiazione ($\bar{3}$) *o* (3), *si ha* $u(x)=0$, $x\in R^3$.

Infatti, supponiamo che la soluzione u dell'equazione (2) soddisfi le condizioni (3). In questo caso $u\in\mathscr{S}'$ e, in virtù della proprietà c), $u\in C^\infty(R^3)$. Applicando la formula (4) alla sfera U_R di raggio arbitrario R, per $|x|<R$ si ottiene

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_R}\left[\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u(y)}{\partial|y|}-u(y)\frac{\partial}{\partial|y|}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\right]dS_y=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_R}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\left[\frac{\partial u(y)}{\partial|y|}-iku(y)+\right.$$

$$\left.+iku(y)\left(1-\frac{R-|x|\cos\gamma}{|x-y|}\right)+u(y)\frac{R-|x|\cos\gamma}{|x-y|^2}\right]dS_y.$$

Considerando le condizioni (3), e cioè

$$|u(y)|<\frac{C}{R},\quad\left|\frac{\partial u(y)}{\partial|y|}-iku(y)\right|<\frac{\eta(R)}{R},\quad |y|=R,$$

dove $\eta(R)\to 0$ per $R\to\infty$, e le disuguaglianze

$$R-|x|\leqslant|y-x|\leqslant R+|x|,\quad |x|<R,\quad |y|=R,$$

stimiamo l'ultimo integrale per grandi R:

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} \frac{1}{R - |x|} \left[\frac{\eta(R)}{R} + \frac{kC}{R(R-|x|)} (\|x-y|-R| + |x|) + \right.$$

$$\left. + \frac{C(R+|x|)}{R(R-|x|)^2} \right] dS_y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R}{R-|x|} \left[\eta(R) + \frac{2kC|x|}{R-|x|} + C \frac{R+|x|}{(R-|x|)^2} \right], \quad |x| < R.$$

Facendo tendere R a ∞ nel secondo membro della disuguaglianza ottenuta, concludiamo che $u(x) \equiv 0$, come dovevasi dimostrare.

In modo analogo si può considerare il caso delle condizioni $(\overline{3})$.

Osservazione. È valida un'asserzione[1] più generale: se la frontiera S di una regione G è una superficie sufficientemente regolare, la funzione $u \in C(\bar{G}_1)$ soddisfa l'equazione di Helmholtz omogenea nella regione $G_1 = R^3 \setminus \bar{G}$, ha una derivata normale regolare su S, soddisfa le condizioni di radiazione (3) o $(\overline{3})$ e le condizioni di frontiera $u|_S = 0$ o $\partial u/\partial n|_S = 0$, si ha $u(x) = 0$, $x \in G_1$.

3. Potenziali. Sia ρ una funzione generalizzata. Le convoluzioni

$$V = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} * \rho = -4\pi \mathscr{E} * \rho, \quad \bar{V} = \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} * \rho = -4\pi \bar{\mathscr{E}} * \rho$$

sono l'analogo dei potenziali newtoniani (si veda il § 27).

Se ρ è finita, questi potenziali appartengono a $\mathscr{S}'$ (si veda il § 8.6) e soddisfano l'equazione di Helmholtz (si veda il § 11.3)

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi\rho.$$

Dunque, le soluzioni dell'equazione di Helmholtz (1) esistono in $\mathscr{S}'$ per una qualunque funzione generalizzata finita f e sono rappresentate dai potenziali

$$u = -\mathscr{E} * f, \quad \bar{u} = -\bar{\mathscr{E}} * f. \tag{5}$$

Qui la soluzione è unica nella classe delle funzioni generalizzate che soddisfano le condizioni di radiazione (3) *o* $(\overline{3})$ (si veda il § 30.2, esempio d)).

Se $\rho \in C(\bar{G})$ e $\rho(x) = 0$, $x \in G_1 = R^3 \setminus \bar{G}$, i potenziali V e $\bar{V}$ sono espressi mediante i seguenti integrali:

$$V(x) = \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \rho(y)\, dy, \quad \bar{V}(x) = \int_G \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \rho(y)\, dy.$$

Questi potenziali appartengono alla classe $C^1(R^3) \cap C^\infty(G_1)$ *e soddisfano in* G_1 *l'equazione omogenea* (2) *e le condizioni* (3) *e* $(\overline{3})$, *rispettivamente.*

[1] Si veda Vekua [2], Smirnov [2], cap. IV, § 2.

Quest'enunciato è dimostrato come per il potenziale newtoniano di volume (si veda il § 27.1). Dev'essere verificata solo la seconda condizione di radiazione. Poniamo che $G \subset U_R$, $|x| > R$, e, di conseguenza,

$$|x| - R < |x| - |y| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y| \leqslant |x| + R \tag{6}$$

per tutti gli $y \in G$. Allora (cfr. il § 30.2, esempio d)) si ha

$$\frac{\partial V(x)}{\partial |x|} - ikV(x) =$$

$$= \int_G \rho(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|^2} \left[\frac{|x| - |y| \cos\gamma}{|x-y|} + \right.$$

$$\left. + ik(|x| - |y| \cos\gamma - |x-y|) \right] dy,$$

e perciò, in virtù delle disuguaglianze (6),

$$\left| \frac{\partial V(x)}{\partial |x|} - ikV(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_G \frac{|\rho(y)|}{|x-y|^2} \left(\frac{|x| + |y|}{|x-y|} + k|y| + k||x| - |x-y|| \right) dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(|x| - R)^2} \left(\frac{|x| + R}{|x| - R} + 2kR \right) \int_G |\rho(y)| \, dy = o(|x|^{-1}).$$

In modo analogo va considerato il potenziale $\overline{V}$.

Se $\rho = \mu\delta_S$ o $\rho = -\partial(\nu\delta_S)/\partial n$, dove μ e $\nu \in C(S)$, i corrispondenti potenziali V e $\overline{V}$ rappresentano l'analogo dei potenziali di superficie di semplice strato e di doppio strato e sono espressi mediante i seguenti integrali:

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \mu(y) \, dS_y,$$

$$\overline{V}^{(0)}(x) = \int_S \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \mu(y) \, dS_y,$$

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \, dS_y,$$

$$\overline{V}^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \, dS_y.$$

Le proprietà dei potenziali $V^{(0)}$, $\overline{V}^{(0)}$, $V^{(1)}$ e $\overline{V}^{(1)}$ sono simili a quelle dei corrispondenti potenziali newtoniani (si veda il § 27). *All'esterno della superficie S questi potenziali sono infinitamente derivabili, soddisfano l'equazione omogenea* (2) *e le condizioni di radiazione* (3) *o* ($\overline{3}$), *rispettivamente, ed inoltre* $V^{(0)}$ *e* $\overline{V}^{(0)}$ *appartengono a*

$C(R^3)$. *Se S è una superficie di Ljapunov, i potenziali $V^{(0)}$ e $\overline{V}^{(0)}$ hanno una derivata normale regolare su S dall'esterno e dall'interno di S e queste derivate sono rispettivamente uguali a*

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial n}\right)_{\pm}(x) = \mp 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y)\,\frac{\partial}{\partial n_x}\,\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\,dS_y, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial \overline{V}^{(0)}}{\partial n}\right)_{\pm}(x) = \mp 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y)\,\frac{\partial}{\partial n_x}\,\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\,dS_y; \tag{$\overline{7}$}$$

i potenziali di doppio strato $V^{(1)}$ e $\overline{V}^{(1)}$ appartengono alla classe $C(\overline{G}) \cap \cap C(\overline{G}_1) \cap C(S)$ ed i loro valori limite su S, all'esterno ed all'interno di S, sono rispettivamente uguali a

$$V^{(1)}_{\pm}(x) = \pm 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\,\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\,dS_y, \tag{8}$$

$$\overline{V}^{(1)}_{\pm}(x) = \pm 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\,\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\,dS_y. \tag{$\overline{8}$}$$

4. Principio d'assorbimento limite. Addizioniamo al primo membro dell'equazione di Helmholtz un termine $i\varepsilon u$:

$$\Delta u_\varepsilon + (k^2 + i\varepsilon)\,u_\varepsilon = -f(x). \tag{9}$$

Per $\varepsilon \neq 0$, per ogni funzione generalizzata finita f, l'equazione (9) ha un'unica soluzione nella classe $\mathscr{S}'$ e questa soluzione è espressa mediante la convoluzione

$$u_\varepsilon = \frac{1}{4\pi|x|}\,e^{i\sqrt{k^2+i\varepsilon}\,|x|} * f. \tag{10}$$

Infatti, la convoluzione (10) esiste in $\mathscr{S}'$ (si veda il § 8.6) e soddisfa l'equazione (9), poiché la funzione

$$-\frac{1}{4\pi|x|}\,e^{i\sqrt{k^2+i\varepsilon}\,|x|}$$

è la corrispondente soluzione fondamentale (si veda il § 11.9). L'unicità della soluzione dell'equazione (9) nella classe $\mathscr{S}'$ segue dall'unicità della soluzione dell'equazione omogenea

$$\Delta u + (k^2 + i\varepsilon)\,u = 0,$$

cioè dell'equazione

$$(-|\xi|^2 + k^2 + i\varepsilon)\,F[u] = 0.$$

Siano $f \in C(\overline{G})$, $f(x) = 0$, $x \in G_1$. In questo caso la soluzione (10) dell'equazione (9) può essere scritta nella forma integrale

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\int_G \frac{e^{i\sqrt{k^2+i\varepsilon}\,|x-y|}}{|x-y|}\,f(y)\,dy. \tag{11}$$

Passando, nella formula (11), al limite per $\varepsilon \to +0$ e $\varepsilon \to -0$ e ponendo $\sqrt{k^2 \pm i0} = \pm k$, si ottengono, in virtù della (5) le soluzioni u o $\bar{u}$ dell'equazione (1) che soddisfano, rispettivamente, le condizioni (3) o ($\overline{3}$):

$$\lim_{\varepsilon \to +0} u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} f(y)\, dy = u(x),$$

$$\lim_{\varepsilon \to -\varepsilon} u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} f(y)\, dy = \bar{u}(x).$$

Quindi, vale il seguente enunciato, detto *principio d'assorbimento limite*: *la soluzione dell'equazione* (1) *che soddisfa le condizioni* (3) *o* ($\overline{3}$) *è il limite* (*uniforme rispetto a* x) *dell'unica soluzione dell'equazione* (9) *per* $\varepsilon \to \pm 0$, *rispettivamente*.

Il principio d'assorbimento limite permette di isolare l'unica soluzione dell'equazione di Helmholtz senza preoccuparsi del suo comportamento all'infinito; con ciò, la soluzione ottenuta verificherà automaticamente le condizioni di radiazione (3) o ($\overline{3}$).

5. Principio d'ampiezza limite. Questo principio consiste nel fatto che *le soluzioni* u *o* $\bar{u}$ *dell'equazione* (1) *che soddisfano le condizioni* (3) *o* ($\overline{3}$) *sono rispettivamente i limiti*

$$u(x) = \lim_{t \to +\infty} e^{ikt} v_+(x, t), \tag{12}$$

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \to +\infty} e^{-ikt} v_-(x, t) = \lim_{t \to -\infty} e^{ikt} v_-(x, -t), \tag{$\overline{12}$}$$

dove $v_\pm(x, t)$ *è la soluzione del problema di Cauchy* (*generalizzato*) *per l'equazione d'onda con secondo membro* $\theta(t)\, e^{\mp ikt} f(x)$ *e con dati iniziali nulli, e cioè*

$$\Box v_\pm = \theta(t)\, e^{\mp ikt} f(x), \quad v_\pm(x, t) = 0, \quad t < 0. \tag{13}$$

Infatti, supponiamo che la funzione f appartenga a $C(\bar{G})$ e $f(x) = 0$ per $x \in G_1$. Allora, l'unica soluzione (generalizzata) v_+ del problema di Cauchy (13) è espressa mediante il potenziale d'onda (si veda il § 13)

$$v_+(x, t) = \frac{e^{-ikt}}{4\pi} \int_{U(x;\, t)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} f(y)\, dy. \tag{14}$$

Supponiamo che sia $G \subset U_R$. Allora $|x - y| \leqslant |x| + R$ e, di conseguenza, $|x - y| \leqslant t$ per tutti gli $y \in G$ se $t \geqslant |x| + R$ (fig. 100). Per questa ragione la formula (14) nella regione $t \geqslant |x| + R$ assume la forma

$$v_+(x, t) = \frac{e^{-ikt}}{4\pi} \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} f(y)\, dy,$$

cioè, in virtù della (5),

$$v_+(x,\ t) = e^{-ikt}u(x),$$

da cui segue la relazione limite (12) per $u(x)$. In modo analogo viene considerato il caso della soluzione $\bar{u}(x)$.

Dunque, la soluzione dell'equazione di Helmholtz (1) che soddisfa le condizioni di radiazione (3) o ($\overline{3}$) può essere considerata come ampiezza di un'oscillazione stabilitasi ottenuta, con un passaggio al limite, dalle oscillazioni transitorie dovute ad una perturbazione esterna periodica con frequenza k ed ampiezza $f(x)$. In questo caso l'ampiezza limite $u(x)$ corrisponde ad un'onda dispersa, mentre l'ampiezza $\bar{u}(x)$ corrisponde ad un'onda incidente.

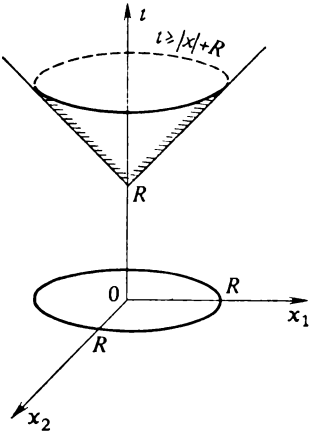


Fig. 100.

6. Problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz. Supponiamo che la frontiera S di una regione G sia una superficie sufficientemente regolare (nel senso del § 28.2), e sia $G_1 = R^3 \setminus \overline{G}$ una regione. I problemi di Dirichlet e di Neumann (interni ed esterni) per l'equazione di Helmholtz vengono posti come per l'equazione di Poisson (si veda il § 28.1). Perciò, per i problemi esterni, è necessario che all'infinito la soluzione soddisfi le condizioni di radiazione (3) o ($\overline{3}$).

Se $\lambda = k^2$ non è un autovalore del problema di Dirichlet o di Neumann per l'equazione di Laplace, la soluzione del corrispondente problema al contorno interno per l'equazione di Helmholtz è unica.

Notiamo che l'insieme dei valori eccezionali di k per i quali è violata l'unicità della soluzione dei problemi al contorno interni, è numerabile (si vedano i §§ 21.4 e 29.6, rispettivamente).

Le soluzioni dei problemi al contorno formulati per l'equazione di Helmholtz omogenea possono essere costruite per mezzo del metodo della teoria del potenziale come è stato fatto nel § 28 per l'equazione di Laplace.

La soluzione del problema di Dirichlet (interno ed esterno, che soddisfa la condizione (3)) va cercata nella forma di un potenziale di doppio strato $V^{(1)}$ con densità incognita $\nu \in C(S)$. In virtù della (8), la funzione ν deve soddisfare l'equazione integrale

$$\nu(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}(x,\ y)\,\nu(y)\,dS_y + f(x), \quad x \in S, \tag{15}$$

dove

$$\mathscr{K}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = (1 - ik|x-y|) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} e^{ik|x-y|}.$$

Inoltre, $\lambda = 1$ e $f = -u_0^-/2\pi$ corrispondono al problema di Dirichlet interno e $\lambda = -1$ e $f = u_0^+/2\pi$ a quello esterno.

La soluzione del problema di Neumann (interno ed esterno, che soddisfa la condizione (3)) va cercata nella forma di un potenziale di strato semplice $V^{(0)}$ con densità incognita $\mu \in C(S)$. In virtù della (7) la funzione μ deve soddisfare l'equazione integrale aggiunta all'equazione (15),

$$\mu(x) = \lambda \int_S \mathscr{K}^*(x, y)\, \mu(y)\, dS_y + g(x), \quad x \in S, \qquad (15^*)$$

dove $\lambda = -1$ e $g = u_1^-/2\pi$ corrispondono al problema di Neumann interno e $\lambda = 1$ e $g = -u_1^+/2\pi$ a quello esterno.

Applicando i teoremi di Fredholm alle equazioni integrali (15) e (15*) ed utilizzando il teorema di unicità (si veda il § 30, osservazione), come per l'equazione di Laplace (si veda il § 28.4), si ottiene il seguente

Teorema. *Se $\lambda = k^2$ non è un autovalore dei problemi di Dirichlet e di Neumann interni per l'equazione di Laplace, i problemi al contorno (interni ed esterni) per l'equazione di Helmholtz omogenea sono univocamente risolvibili nella forma dei potenziali corrispondenti per valori di frontiera continui qualsiasi*[1].

Osservazione. I problemi di dispersione (di diffusione) possono essere ridotti a problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz (si veda il § 2.3). Per le diverse applicazioni si vedano Tichonov e Samarskij [1], cap. VII.

7. Problemi al contorno esterni per una sfera. Consideriamo il problema al contorno esterno per una sfera di raggio R:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad u|_{S_R} = u_0(\theta, \varphi),$$

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty,$$

Come è stato mostrato nel § 30.6, questo problema ha soluzione unica. Costruiamola. Per ciò, sviluppiamo le funzioni $u(r, \theta, \varphi)$ ed $u_0(\theta, \varphi)$ in serie in funzioni sferiche (si veda il § 25.6):

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \mathscr{R}_{lm}(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$u_0(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi).$$

[1] La risolvibilità dei problemi al contorno esterni ha luogo per tutti i valori del parametro k^2 (si veda Vekua [2]).

I coefficienti incogniti dello sviluppo $\mathcal{R}_{lm}$ debbono soddisfare l'equazione (si veda il § 26.2, esempio c))

$$\mathcal{R}''_{lm}+\frac{2}{r}\mathcal{R}'_{lm}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\mathcal{R}_{lm}=0, \tag{16}$$

la condizione di frontiera

$$\mathcal{R}_{lm}(R)=a_{lm} \tag{17}$$

e le condizioni di radiazione

$$\mathcal{R}_{lm}(r)=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \mathcal{R}'_{lm}(r)-ik\mathcal{R}_{lm}(r)=o\left(\frac{1}{r}\right),\quad r\to\infty. \tag{18}$$

La soluzione generale dell'equazione (16) ha la forma

$$\frac{c_1}{\sqrt{r}}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(kr)+\frac{c_2}{\sqrt{r}}H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(kr), \tag{19}$$

dove $H^{(j)}_\nu$ è la funzione di Hankel (si veda il § 23.8). Tenendo conto delle formule asintotiche (38) del § 23.8, per queste funzioni, vediamo che le condizioni (18) verificano soltanto la funzione $(1/\sqrt{r})\,H^{(1)}_{l+1/2}(kr)$, in modo che $c_2=0$. Per soddisfare la condizione (17), è sufficiente porre $c_1=\sqrt{R}a_{lm}/H^{(1)}_{l+1/2}(kR)$. Sostituendo i valori ottenuti di c_1 e c_2 nella (19), si ottiene la soluzione cercata u nella forma

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(kR)}\,Y_l^m(\theta,\varphi).$$

In modo simile viene anche considerato il problema al contorno di II specie.

8. **Esercizi.** a) Sia ρ una funzione generalizzata finita. Dimostrare che i potenziali V e $\overline{V}$, con densità ρ, soddisfano, rispettivamente, le condizioni (3) e $(\overline{3})$.

b) Supponiamo che la funzione $u(x)$ di classe $C(\overline{U_R})$ soddisfi l'equazione di Helmholtz omogenea in una sfera U_R. Dimostrare l'analogo del teorema della media:

$$u(0)=\frac{kR}{4\pi\sin kR}\int_{S_1}u(Rs)\,ds\qquad (kR<\pi).$$

c) Supponiamo che k^2 appartenga al piano z di variabile complessa con il taglio $\operatorname{Im} z=0$, $Re\ z\geqslant 0$. Dimostrare che la soluzione dell'equazione di Helmholtz è unica nella classe $\mathcal{S}'$.

d) Dimostrare che, nel caso n-dimensionale, le condizioni di radiazione di Sommerfeld

$$u(x)=O(|x|^{\frac{1-n}{2}}),\quad \frac{\partial u(x)}{\partial|x|}\mp iku(x)=o(|x|^{\frac{1-n}{2}}),\quad |x|\to\infty,$$

garantiscono l'unicità della soluzione dell'equazione di Helmholtz.

e) Costruire la teoria del potenziale per l'equazione di Helmholtz per $k^2<0$.

f) Dimostrare che, se $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ soddisfa l'equazione omogenea di Helmholtz in una regione G, allora f appartiene a $C^\infty(G)$ e k^2 è un qualunque numero (complesso).

g) Dimostrare che, se la funzione $u(x)$ è armonica in $\bar{G}_1$ ed $u(\infty) = 0$, questa funzione soddisfa le condizioni di radiazione (per $k = 0$).

h) Estendere la validità delle formule (4) e $\overline{(4)}$ alle funzioni $u \in C(\bar{G}_1)$, che soddisfano in G_1 l'equazione (2), hanno una derivata normale regolare su S e soddisfano le condizioni di radiazione (3) e $\overline{(3)}$, rispettivamente.

§ 31. *Problemi al contorno per l'equazione di Laplace in un piano*

Per un punto (x, y) del piano R^2 è conveniente utilizzare le notazioni complesse $z = x + iy$ o $\bar{z} = x - iy$. Supponiamo che G sia una regione limitata in R^2 con una frontiera S regolare a tratti.

La maggior parte dei risultati ottenuti nei §§ 27, 28 e 29 per i problemi al contorno a tre variabili possono essere estese anche ai problemi al contorno bidimensionali con la sostituzione della soluzione fondamentale $\mathscr{E}_3(x) = -(1/4\pi \mid x \mid)$ sulla soluzione fondamentale $\mathscr{E}_2(z) = (1/2\pi) \ln \mid z \mid$. Ma, nelle impostazioni e nelle soluzioni di questi problemi, ci sono alcune differenze dovute alla particolarità di comportamento della soluzione fondamentale $\mathscr{E}_2$ all'infinito.

1. Impostazione ed unicità delle soluzioni dei problemi al contorno principali. I problemi al contorno principali per l'equazione di Laplace in un piano vengono formulati allo stesso modo dei corrispondenti problemi nello spazio (si veda il § 28.1), escluso il fatto che per i problemi esterni la soluzione dev'essere limitata per $\mid z \mid \to \infty$ (e non dev'essere annullata). Supponiamo che $G_1 = R^2 \setminus \overline{G}$ sia una regione.

Dai risultati dei §§ 24.5 e 24.10 segue che, *se la funzione* $u(z)$ *è armonica in* G_1, *continua e limitata su* G_1, *si ha*

$$\lim u(z) = \alpha, \qquad |z| \to \infty, \tag{1}$$

$$\operatorname{grad} u(z) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad |z| \to \infty, \tag{2}$$

$$|u(z)| \leqslant \max_{z \in S} |u(z)|, \qquad z \in \bar{G}_1. \tag{3}$$

Una curva di Ljapunov ed una curva sufficientemente regolare sono definite allo stesso modo, come nel caso di uno spazio (si vedano i §§ 27.4 e 28.2); la disuguaglianza (26) del § 27.4 assume in questo caso la forma

$$\int_S \frac{|\cos \varphi_{z'\zeta}|}{|z' - \zeta|}\, dS_\zeta \leqslant K, \quad z' \in R^2.$$

Sono validi i seguenti teoremi d'unicità per i problemi al contorno dell'equazione di Laplace.

La soluzione del problema di Dirichlet interno o esterno è unica e dipende continuamente dai dati al limite u_0^- o u_0^+, *rispettivamente.*

Se S *è una curva sufficientemente regolare, la soluzione del problema di Neumann interno o esterno è definita a meno di una costante additiva arbitraria, ed inoltre*

$$\int_S u_1^-(z)\,dS = 0 \quad \textit{oppure} \quad \int_S u_1^+(z)\,dS = 0 \tag{4}$$

è la condizione necessaria per la risolvibilità di un corrispondente problema.

La dimostrazione di questi enunciati è simile a quella dei teoremi 2, 3, e 4 del § 28.2. Una certa differenza è dovuta all'apparizione della condizione necessaria di risolvibilità (7) del problema di Neumann esterno. Dimostriamolo. Supponiamo che $u(z)$ sia la soluzione del problema di Neumann esterno con funzione di frontiera u_1^+ su S. Dato che u è armonica in G_1 ed ha su S una derivata normale regolare uguale ad $-u_1^+$, allora, applicando la formula (8) del § 21.2, per $v = 1$, alla regione Q_R (si veda la fig. 77), si ottiene

$$-\int_S u_1^+(z)\,dS + \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS = 0.$$

Passando in quest'uguaglianza al limite per $R \to \infty$ ed utilizzando la (2), si ottiene la condizione (4).

2. Potenziale logaritmico. Il potenziale logaritmico è definito come la convoluzione di una funzione generalizzata ρ con la funzione $-\ln|z|$ (si veda il § 7.10):

$$V = -\ln|z| * \rho = -2\pi \mathscr{E}_2 * \rho. \tag{5}$$

Il potenziale logaritmico V soddisfa l'equazione di Poisson

$$\Delta V = -2\pi\rho. \tag{6}$$

I casi particolari del potenziale logaritmico sono: il *potenziale di area*

$$V(z) = \int_G \rho(\zeta) \ln \frac{1}{|z-\zeta|}\,d\xi\,d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{7}$$

il *potenziale di semplice strato*

$$V^{(0)}(z) = \ln\frac{1}{|z|} * \mu\delta_S = \int_S \mu(\zeta) \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,dS_\zeta, \tag{8}$$

ed il *potenziale di doppio strato*

$$V^{(1)}(z) = -\ln\frac{1}{|z|} * \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu\delta_S) = \int_S \nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,dS_\zeta = \int_S \nu(\zeta)\frac{\cos\varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}\,dS. \tag{9}$$

Questi potenziali hanno le seguenti proprietà:

Se $\rho \in C(\overline{G})$, *il potenziale di area* $V \in C^1(R^2)$ *è armonico in* G_1 *e per* $|z| \to \infty$ *si ha*

$$V(z) = \int_G \rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta \ln \frac{1}{|z|} + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \tag{10}$$

Se, inoltre, $\rho \in C^1(G)$, *si ha* $V \in C^2(G)$.

Se $\mu \in C(S)$, *il potenziale di semplice strato* $V^{(0)} \in C(R^2)$ *è armonico fuori di* S *e per* $|z| \to \infty$ *si ha*

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu(\zeta)\, dS \ln \frac{1}{|z|} + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \tag{11}$$

Se S *è una curva di Ljapunov, il potenziale* $V^{(0)}(z)$ *ha derivate normali regolari* $(\partial V^{(0)}/\partial \boldsymbol{n})_+$ *e* $(\partial V^{(0)}/\partial \boldsymbol{n})_-$ *su* S *all'esterno ed all'interno di* S, *ed inoltre*

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_+ (z) = -\pi\mu(z) + \frac{\partial V^{(0)}(z)}{\partial \boldsymbol{n}} =$$

$$= -\pi\mu(z) + \int_S \mu(\zeta) \frac{\cos \psi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}\, dS_\zeta, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_- (z) = \pi\mu(z) + \frac{\partial V^{(0)}(z)}{\partial \boldsymbol{n}} = \pi\mu(z) + \int_S \mu(\zeta) \frac{\cos \psi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}\, dS_\zeta. \tag{12'}$$

Se ν *appartiene a* $C(S)$, *il potenziale di doppio strato* $V^{(1)}$ *è armonico all'esterno di* S *e*

$$V^{(1)}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \to \infty. \tag{13}$$

Se S *è una curva di Ljapunov, si ha*

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}\, dS_\zeta = \begin{cases} -2\pi, & x \in G, \\ -\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in G_1. \end{cases} \tag{14}$$

Il potenziale $V^{(1)}(z)$ *appartiene alle classi* $C(\overline{G})$, $C(\overline{G}_1)$ *e* $C(S)$, *ed i suoi valori limite* $V^{(1)}_+$ *e* $V^{(1)}_-$ *su* S, *all'esterno ed all'interno di* S, *sono espressi mediante le formule*

$$V^{(1)}_+(z) = \pi\nu(z) + V^{(1)}(z) = \pi\nu(z) + \int_S \nu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}\, dS_\zeta. \tag{15}$$

$$V^{(1)}_-(z) = -\pi\nu(z) + V^{(1)}(z) = -\pi\nu(z) + \int_S \nu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}\, dS_\zeta. \tag{15'}$$

La dimostrazione di queste proprietà è analoga alle corrispondenti dimostrazioni per il caso tridimensionale (si veda il § 27). Una certa differenza esiste solo nella dimostrazione delle (10) e (11).

Dimostriamo la disuguaglianza (10), visto che la (11) viene dimostrata in modo analogo. Utilizzando (7), abbiamo

$$V(z) - \int_G \rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta \ln \frac{1}{|z|} = \int_G \rho(\zeta) \ln \frac{|z|}{|z-\zeta|}\, d\xi\, d\eta. \qquad (16)$$

Supponiamo che $\bar{G}$ appartenga alla sfera U_R e che $|z| > 2R$. In questo caso per tutte le $\zeta \in \bar{G}$ sono valide le disuguaglianze

$$|z| - R \leqslant |z-\zeta| \leqslant |z| + R,$$

$$-\frac{2R}{|z|} \leqslant \ln \frac{|z|}{|z|+R} \leqslant \ln \frac{|z|}{|z-\zeta|} \leqslant \ln \frac{|z|}{|z|-R} \leqslant \frac{2R}{|z|}, \qquad (17)$$

Da queste disuguaglianze e dalla (16) segue la (10):

$$\left| V(z) - \int_G \rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta \ln \frac{1}{|z|} \right| \leqslant \int_G |\rho(\zeta)| \left| \ln \frac{|z|}{|z-\zeta|} \right| d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2R}{|z|} \int_G |\rho(\zeta)|\, d\xi\, d\eta = \frac{C}{|z|}.$$

Significato fisico della soluzione fondamentale $\mathscr{E}_2(z)$. Calcoliamo il potenziale elettrostatico $V(z, x_3)$ creato da cariche che si trovano sull'asse x_3, con densità lineare $-1/4\pi$, cioè con distribuzione $\rho(z, x_3) = -1/4\pi\, \delta(z) \times 1(x_3)$. Il metodo di discesa rispetto alla variabile x_3, esposto nel § 11.4, non è valido in questo caso. Modificando un po' questo metodo, definiamo il potenziale $V(z, x_3)$ come il limite, per $N \to \infty$, dei potenziali $V_N(z, x_3)$ creati dalle cariche che si trovano sul segmento $|x_3| \leqslant N$ dell'asse x_3, con densità lineare $-1/4\pi$, cioè con distribuzione

$$\rho_N(z, x_3) = -\frac{1}{4\pi} \delta(z) \cdot \theta(N - |x_3|). \qquad (18)$$

Questo potenziale è la convoluzione ρ_N con $-4\pi\mathscr{E}_3$ (si veda il § 27) più una costante arbitraria c_N[1]:

$$V_N(z, x_3) = -\frac{1}{\sqrt{|z|^2 + x_3^2}} * \left[\frac{\delta(z)}{4\pi} \cdot \theta(N - |x_3|) \right] + c_N =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{-N}^{N} \frac{dx_3'}{\sqrt{|z|^2 + (x_3 - x_3')^2}} + c_N =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \left[x_3 - x_3' + \sqrt{|z|^2 + (x_3 - x_3')^2} \right] \Big|_{-N}^{N} + c_N =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{x_3 - N + \sqrt{|z|^2 + (x_3 - N)^2}}{x_3 + N + \sqrt{|z|^2 + (x_3 + N)^2}} + c_N. \qquad (19)$$

[1] Nella classe di funzioni che si annullano all'infinito il potenziale $U(z, x_3)$ non esiste. Per questa ragione scegliamo i potenzliai $V_N(z, x_3)$ da una classe più vasta di funzioni (nel nostro caso, da funzioni limitate all'infinito).

Per assicurare l'esistenza di un limite finito V_N per $N \to \infty$, poniamo nella (19) $c_N = 1/2\pi \ln (2N)$. Si ottiene allora

$$V(z, x_3) = \lim_{N\to\infty} V_N(z, x_3) = \frac{1}{2\pi} \ln |z| \cdot 1(x_3).$$

Dunque, la soluzione fondamentale $\mathscr{E}_2(z) = 1/2\pi \ln |z|$ è il potenziale elettrostatico creato da cariche che si trovano sull'asse x_3, con densità lineare $-1/4\pi$ (cfr. il § 11.4).

3. Risolvibilità dei problemi al contorno. Supponiamo che la frontiera S di una regione G sia una curva sufficientemente regolare e $G_1 = R^2 \setminus \bar{G}$ sia una regione.

Come nel § 28.3, cerchiamo la soluzione del problema di Dirichlet interno sotto forma di un potenziale di doppio strato

$$V^{(1)}(z) = \int_S \nu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|} dS_\zeta, \quad \nu \in C(S); \tag{20}$$

la soluzione del problema di Dirichlet esterno va cercata nella forma di una somma del potenziale di doppio strato $V^{(1)}$ e di una costante incognita α; la soluzione del problema di Neumann (interno o esterno) va cercata come potenziale di semplice strato

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu(\zeta) \ln \frac{1}{|z-\zeta|} dS_\zeta, \quad \mu \in C(S). \tag{21}$$

Per le densità incognite ν e μ e per il numero α, in virtù delle formule (12), (12′), (15) e (15′), si ottengono le equazioni integrali

$$\nu(z) = \lambda \int_S \mathscr{K}(z, \zeta) \nu(\zeta) dS_\zeta + f(z), \qquad z \in S, \tag{22}$$

$$\mu(z) = \lambda \int_S \mathscr{K}^*(z, \zeta) \mu(\zeta) dS_\zeta + g(z), \quad z \in S, \tag{22′}$$

con nuclei polari (aggiunti l'uno all'altro)

$$\mathscr{K}(z, \zeta) = \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{\pi |z-\zeta|}, \qquad \mathscr{K}^*(z, \zeta) = \frac{\cos \psi_{z\zeta}}{\pi |z-\zeta|}. \tag{23}$$

In questo caso $\lambda = 1$, $f = -u_0^-/\pi$ corrispondono al problema di Dirichlet interno e $\lambda = -1$, $f = (u_0^+ - \alpha)/\pi$ a quello esterno; $\lambda = -1$, $g = u_1^-/\pi$ corrispondono al problema di Neumann interno e $\lambda = 1$, $g = -u_1^+/\pi$ a quello esterno.

Sia μ la soluzione continua dell'equazione (22*) per $\lambda = 1$ e $g = -u_1^+/\pi$. Integrando quest'equazione lungo S ed utilizzando

le (23) e (14), si ottiene

$$\int_S \mu(z)\,dS = \frac{1}{\pi}\int_S\int_S \frac{\cos\varphi_{\zeta z}}{|\zeta - z|}\,\mu(\zeta)\,dS_\zeta\,dS_z - \frac{1}{\pi}\int_S u_1^+(z)\,dS =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_S \mu(\zeta)\int_S \frac{\cos\varphi_{\zeta z}}{|\zeta - z|}\,dS_z\,dS_\zeta - \frac{1}{\pi}\int_S u_1^+(z)\,dS =$$

$$= -\int_S \mu(\zeta)\,dS - \frac{1}{\pi}\int_S u_1^+(z)\,dS,$$

cioè

$$\int_S \mu(z)\,dS = -\frac{1}{2\pi}\int_S u_1^+(z)\,dS. \tag{24}$$

Dimostriamo che $\lambda = 1$ non è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}^*(z, \zeta)$. Supponiamo, al contrario, che $\lambda = 1$ sia un autovalore di questo nucleo e che μ^* sia la corrispondente autofunzione,

$$\mu^*(z) = \int_S \mathscr{K}^*(z, \zeta)\,\mu^*(\zeta)\,dS_\zeta = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{\cos\psi_{z\zeta}}{|z - \zeta|}\,\mu^*(\zeta)\,dS_\zeta, \quad z \in S. \tag{25}$$

Allora μ^* appartiene a $C(S)$ e, conformemente alla (24) (per $u_1^+ = 0$),

$$\int_S \mu^*(z)\,dS = 0. \tag{26}$$

Costruiamo ora il potenziale di semplice strato $V^{(0)}$ con densità μ^*. La funzione $V^{(0)}$, che appartiene a $C(R^2)$, è armonica fuori di S e, in virtù delle (26) e (11), si annulla all'infinito. Poi, in virtù delle (12) e (25), la sua derivata normale regolare su S all'esterno è uguale a zero. Da ciò, utilizzando l'unicità della soluzione del problema di Neumann esterno e del problema di Dirichlet interno (si veda il § 31.1), come nel § 28.4, concludiamo che $V^{(0)}(z) \equiv 0$, $z \in R^2$ e, di conseguenza, $\mu^*(z) \equiv 0$, $z \in S$ il che è una contraddizione.

Conformemente ai teoremi di Fredholm le equazioni (22) e (22*) sono univocamente risolvibili in $C(S)$ per qualunque f e g continue. Con ciò, per la soluzione μ dell'equazione (22*) per $\lambda = 1$ e $g = -u_1^+/\pi$ è valida la relazione (24). Perciò, se è valida la condizione (4), allora, in virtù della (11), $V^{(0)}$ si annulla all'infinito. Dunque, abbiamo dimostrato il

Teorema 1. *Il problema di Dirichlet interno è risolvibile per qualsiasi* $u_0^- \in C(S)$. *Il problema di Neumann esterno è risolvibile per ogni* $u_1^+ \in C(S)$ *che soddisfa la condizione di risolvibilità* (4).

Dalla formula (14) segue che $\lambda = -1$ è un autovalore del nucleo $\mathscr{K}(z, \zeta)$ e $\nu \equiv 1$ è la corrispondente autofunzione. Conformemente al secondo teorema di Fredholm, $\lambda = -1$ è un autovalore del nucleo

aggiunto $\mathscr{K}^*(z, \zeta)$. Sia μ_0 la corrispondente autofunzione,

$$\mu_0(z) = -\int_S \mathscr{K}^*(z, \zeta)\,\mu_0(\zeta)\,dS_\zeta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\cos\psi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}\,\mu_0(\zeta)\,dS_\zeta, \quad z \in S. \qquad (27)$$

Sappiamo che μ_0 appartiene a $C(S)$ (si veda § 18.5). Dimostriamo che

$$\int_S \mu_0(\zeta)\,dS = C \neq 0. \qquad (28)$$

Ma supponiamo, al contrario, che $C = 0$. Costruiamo il potenziale di semplice strato con densità μ_0 (*potenziale di Robin*):

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu_0(\zeta)\,\ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,dS_\zeta. \qquad (29)$$

La funzione $V^{(0)}$ appartiene a $C(R^2)$, è armonica all'esterno di S e, in virtù della condizione $C = 0$, si annulla all'infinito (si veda il § 31.2). Poi, dalle (12′) e (27), segue che la sua derivata normale regolare su S è nulla all'interno. Visto che la soluzione del problema di Neumann interno è unica, a meno di una costante additiva, ne segue che $V^{(0)}(z) = \text{costante} = C_1$, $z \in \overline{G}$. Ma allora, in virtù dell'unicità della soluzione del problema di Dirichlet esterno (si veda il § 30.1), $V^{(0)}(z) = C_1$, $z \in \overline{G}_1$, e, di conseguenza, $\mu_0(z) = 0$, $z \in S$, il che è impossibile.

Dunque, $C \neq 0$. Da ciò, ragionando come nel § 28.4, concludiamo che $\lambda = -1$ è un autovalore semplice del nucleo $\mathscr{K}^*(z, \zeta)$ e, quindi, del nucleo $\mathscr{K}(z, \zeta)$.

Normalizziamo l'autofunzione μ_0 in modo che $C = 1$. Da quanto abbiamo dimostrato precedentemente, il corrispondente potenziale di Robin $V^{(0)}(z) = \text{costante}$, $z \in \overline{G}$.

Secondo il terzo teorema di Fredholm, le equazioni integrali (22) e (22*) per $\lambda = -1$ sono risolvibili, se e solo se i loro termini noti f e g sono ortogonali alle autofunzioni μ_0 e 1, rispettivamente. Per il problema di Dirichlet esterno questa condizione assume la forma

$$\frac{1}{\pi}\int_S [u_0^+(z) - \alpha]\,\mu_0(z)\,dS = 0,$$

cioè, in virtu della (28) (per $C = 1$) questa condizione può sempre essere verificata mediante una scelta conveniente della costante α:

$$\alpha = \int_S u_0^+(z)\,\mu_0(z)\,dS. \qquad (30)$$

Quindi, è valido il seguente

Teorema 2. *Il problema di Dirichlet esterno è risolvibile per ogni* u_0^+ *che appartiene a* $C(S)$. *Il problema di Neumann interno è risolvibile per ogni* u_1^- *che appartiene a* $C(S)$ *e soddisfa la condizione di risolvibilità* (4).

4. Soluzione dei problemi al contorno per un cerchio. Per una circonferenza S_R le equazioni integrali (22) e (22*) sono facilmente risolvibili e ciò permette di costruire le soluzioni dei problemi al contorno per il cerchio U_R in forma esplicita.

Infatti, in virtù della relazione (si veda la fig. 101)

$$|z|^2 = |z-\zeta|^2 + R^2 + 2R|z-\zeta|\cos\varphi_{z\zeta}, \quad |\zeta| = R, \tag{31}$$

si ottiene

$$\mathcal{K}(z,\zeta) = \frac{\cos\varphi_{z\zeta}}{\pi|z-\zeta|} = -\frac{1}{2\pi R} = \mathcal{K}^*(z,\zeta), \quad z,\zeta \in S_R.$$

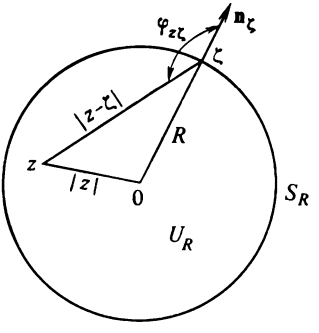


Fig. 101.

Perciò le equazioni integrali (22) e (22*) assumono la singola forma

$$\nu(z) = -\frac{\lambda}{2\pi R}\int_{|\zeta|=R} \nu(\zeta)\,dS + f(z), \quad |z| = R. \tag{32}$$

Risolvendo quest'equazione (si veda il § 18.1), si ottiene

$$\nu(z) = -\frac{1}{\pi}u_0^-(z) + \frac{1}{4\pi^2 R}\int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta)\,dS \tag{33}$$

per $\lambda = 1$, $f = -u_0^-/\pi$ (problema di Dirichlet interno);

$$\nu(z) = \frac{1}{\pi}u_0^+(z) - \frac{1}{2\pi^2 R}\int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta)\,dS, \qquad \alpha = \frac{1}{2\pi R}\int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta)\,dS \tag{34}$$

per $\lambda = -1$, $f = u_0^+/\pi - \alpha/\pi$ (problema di Dirichlet esterno);

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi}u_1^-(z), \quad \text{se} \quad \int_{|\zeta|=R} u_1^-(\zeta)\,dS = 0 \tag{35}$$

per $\lambda = -1$, $f = u_1^-/\pi$ (problema di Neumann interno);

$$\mu(z) = -\frac{1}{\pi}u_1^+(z), \quad \text{se} \quad \int_{|\zeta|=R} u_1^+(\zeta)\,dS = 0 \tag{36}$$

per $\lambda = 1$, $f = -u_1^+/\pi$ (problema di Neumann esterno).

Sostituendo l'espressione per la densità $\nu(z)$ (33) nel potenziale di doppio strato (20) ed utilizzando le formule (14) e (31), si ottiene la soluzione del problema di Dirichlet interno:

$$u(z)=\int\limits_{|\zeta|=R}\left[-\frac{1}{\pi}u_0^-(\zeta)+\frac{1}{4\pi^2R}\int\limits_{|\zeta'|=R}u_0^-(\zeta')\,dS\right]\frac{\cos\varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}\,dS_\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta|=R}u_0^-(\zeta)\left(-\frac{2R\cos\varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta'|=R}\frac{\cos\varphi_{z\zeta'}}{|z-\zeta'|}\,dS_{\zeta'}\right)dS=$$

$$=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta|=R}u_0^-(\zeta)\,\frac{-2R\,|z-\zeta|\cos\varphi_{z\zeta}-|z-\zeta|^2}{|z-\zeta|^2}\,dS_\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta|=R}u_0^-(z)\,\frac{R^2-|z|^2}{|z-\zeta|^2}\,dS_\zeta,$$

cioè questa soluzione è espressa mediante la formula (integrale) di Poisson

$$u(z)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta|=R}u_0^-(\zeta)\,\frac{R^2-|z|^2}{|z-\zeta|^2}\,dS_\zeta,\quad |z|<R. \tag{37}$$

In modo analogo, sostituendo le espressioni per la densità $\nu(z)$ (34) e per la costante α nella somma $V^{(1)}(z)+\alpha$, si ottiene la soluzione del problema di Dirichlet esterno:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta|=R}u_0^+(\zeta)\,\frac{|z|^2-R^2}{|z-\zeta|^2}\,dS_\zeta,\quad |z|>R. \tag{38}$$

Infine, sostituendo le espressioni (35) e (36) per la densità $\mu(z)$ nel potenziale di semplice strato (21), si ottengono le rispettive soluzioni dei problemi interno ed esterno:

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|=R}u_1^-(\zeta)\ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,dS_\zeta+C,\quad |z|<R, \tag{39}$$

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|=R}u_1^+(\zeta)\ln|z-\zeta|\,dS_\zeta+C,\quad |z|>R. \tag{40}$$

5. Funzione di Green del problema di Dirichlet. Si dice *funzione di Green del problema di Dirichlet* (*interno*) per una regione (limitata) G la funzione $\mathcal{G}(z,\zeta)$ che possiede le seguenti proprietà (cfr. il § 29.1): per ogni $\zeta\in G$ essa può essere rappresentata nella forma

$$\mathcal{G}(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-\zeta|}+g(z,\zeta), \tag{41}$$

dove la funzione $g(z,\zeta)$ è armonica in G, continua su $\bar{G}$ rispetto a x e soddisfa la condizione di frontiera

$$\mathcal{G}(z,\zeta)|_{z\in S}=0. \tag{42}$$

Dal principio del massimo segue che la funzione di Green soddisfa la disuguaglianza

$$0 < \mathcal{G}(z, \zeta) < \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D}{|z-\zeta|}, \quad z \in G, \quad \zeta \in G, \quad z \neq \zeta, \tag{43}$$

dove D è il diametro di G. La funzione di Green $\mathcal{G}(z, \zeta)$ possiede anche tutte le altre proprietà esposte nel § 29.1.

Supponiamo ora che G sia una regione a connessione semplice limitata da una curva S regolare a tratti e che $w = w(z)$ sia una

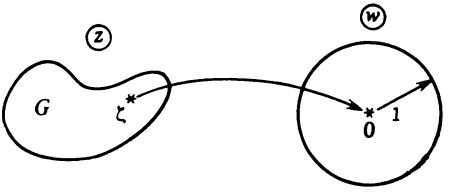


Fig. 102.

funzione che applichi in modo conforme G nel cerchio unitario $|w| < 1$ (fig. 102). Allora la funzione

$$\omega(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w}(\zeta)\, w(z)} \tag{44}$$

applica in modo conforme G nel cerchio unitario $|w| < 1$, ed inoltre il punto $\zeta \in G$ passa in 0. Perciò questa funzione, per ogni $\zeta \in G$, può essere rappresentata nella forma

$$\omega(z, \zeta) = (z - \zeta)\, \psi(z, \zeta), \tag{45}$$

dove la funzione $\psi(z, \zeta)$ è analitica in G, $\psi(z, \zeta) \neq 0$, $z \in \overline{G}$ e $\psi \in C(\overline{G})$[1].

Verifichiamo che la *funzione*

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\omega(z, \zeta)| = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \omega(z, \zeta) \tag{46}$$

è *la funzione di Green del problema di Dirichlet per la regione G.*

Infatti, dalla (45) segue che la funzione (46) può essere rappresentata nella forma di (41), ed inoltre la funzione

$$g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\psi(z, \zeta)| = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \psi(z, \zeta),$$

come la parte reale della funzione analitica $\ln \psi(z, \zeta)$, $\psi(z, \zeta) \neq 0$, è armonica in G e continua su $\overline{G}$. Poi, in virtù dell'uguaglianza $|\omega(z, \zeta)| = 1$, $z \in S$, la funzione (46) soddisfa anche la condizione (42).

---

[1] Si veda, per esempio, Evgrafov [1], capp. V e IX.

A titolo d'esempio, costruiamo la funzione di Green per il cerchio $|z| < R$. La funzione

$$\omega(z, \zeta) = \frac{R(z-\zeta)}{R^2 - z\bar{\zeta}}$$

applica il cerchio $|z| < R$ nel cerchio unitario $|\omega| < 1$, ed inoltre il punto ζ passa in 0. Perciò, in virtù della (46),

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z-\zeta)} \right| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z-\zeta)} \qquad (47)$$

è la funzione di Green per il cerchio $|z| < R$.

6. Soluzione del problema di Dirichlet per una regione a connessione semplice. Il metodo delle riflessioni conformi permette di ottenere una rappresentazione della soluzione del problema di Dirichlet per ogni regione a connessione semplice. Questa rappresentazione è una generalizzazione della formula di Poisson.

Utilizzando l'uguaglianza

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|z-\zeta|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}, \quad |\zeta| = R,$$

scriviamo la formula di Poisson (37) nella forma

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (48)$$

Sia la funzione u_0 continua sulla frontiera S di una regione a connessione semplice G. Supponiamo, inoltre, che la funzione $z = z(w)$ applichi in modo conforme il cerchio $|w| < 1$ nella regione G e sia $w = w(z)$ la riflessione inversa (fig. 102). Allora $z \in C(\overline{U}_1)$; supponiamo che $w \in C^1(G)$. Con questa riflessione la funzione $u_0(z)$ diventa la funzione $u_0[z(w)]$, che è continua sulla circonferenza $|w| = 1$. Utilizzando la formula (48), costruiamo la soluzione di Dirichlet per il cerchio $|w| < 1$ con la funzione di frontiera $u_0[z(w)]$:

$$U(w) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} u_0[z(\omega)] \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Passando, in questa formula, alle vecchie variabili z e ζ, $w = w(z)$, $\omega = \omega(\zeta)$, si ottiene la soluzione cercata del problema di Dirichlet per la regione G con la funzione di frontiera u_0:

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_S u_0(\zeta) \frac{w(\zeta) + w(z)}{w(\zeta) - w(z)} \frac{w'(\zeta)}{w(\zeta)} d\zeta, \quad z \in G. \qquad (49)$$

Osservazione. Come è noto, le parti reale ed immaginaria di una funzione analitica sono funzioni armoniche. Inversamente, se la funzione $u(z)$ è armonica, allora, dopo aver costruito la funzione

coniugata

$$v(z)=\int_{z}^{z}\left[-\frac{\partial u(\xi)}{\partial \eta}\,d\xi+\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \xi}\,d\eta\right]+C,\quad \zeta=\xi+i\eta,$$

si ottiene la funzione analitica $f(z)=u(z)+iv(z)$, la cui parte reale è la funzione $u(z)$. Ciò dà la possibilità di utilizzare gli strumenti della teoria delle funzioni analitiche in un piano (si veda Lavrentiev e Šabat [1]).

7. Esercizi. a) Utilizzando la formula (42) del § 6.5 e la soluzione fondamentale $1/\pi z$ dell'operatore di Cauchy-Riemann (si veda il § 11.10), dedurre la formula di Cauchy-Riemann: se $u\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$, è valida la rappresentazione

$$\frac{1}{\pi}\int_{G}\frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\,d\xi\,d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\frac{u(\xi)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}u(z), & z\in G;\\ 0, & z\in G_1.\end{cases}$$

b) Utilizzando a), dimostrare che se $u\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$ e soddisfa la condizione di Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial \bar{z}=0$, $z\in G$, allora $u(z)$ è la funzione analitica nella regione G ed è valida la formula di Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}u(z), & z\in G;\\ 0, & z\in G_1.\end{cases}$$

c) Dimostrare che il potenziale di semplice strato per la circonferenza $|z|=R$ con densità $\mu=1$ è uguale a

$$V^{(0)}(z)=-\int_{|\zeta|=R}\ln|z-\zeta|\,dS_\zeta=\begin{cases}-2\pi R\ln R, & |z|\leqslant R,\\ -2\pi R\ln|z|, & |z|\geqslant R.\end{cases}$$

d) Utilizzando c), dimostrare che il potenziale logaritmico di un'area per il cerchio $|z|<R$ con densità $\rho=1$ è uguale a

$$V(z)=\begin{cases}-\pi R^2\left(\ln R-\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}|z|^2, & |z|\leqslant R,\\ -\pi R^2\ln|z|, & |z|\geqslant R.\end{cases}$$

e) Dimostrare che le seguenti funzioni sono funzioni di Green del problema di Dirichlet:

$\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z-\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right|$ per il semipiano $y>0$; [1]

$\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{(z-\zeta^*)(z-\bar{\zeta})}{(z-\zeta)(z-\bar{\zeta}^*)}\right|$ per il semicerchio $|z|<R$, $y>0$;

$\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^2-\bar{\zeta}^2}{z^2-\zeta^2}\right|$ per il quarto di piano $x>0$, $y>0$; [1]

$\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{e^{z-\bar{\zeta}}-1}{e^{z-\zeta}-1}\right|$ per il nastro $0<y<\pi$[1].

[1] Si veda la nota alla pag. 372.

f) Dimostrare che le soluzioni dei problemi di Dirichlet e di Neumann per il semipiano $y > 0$ sono rispettivamente date dalle formule

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\,\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\,, \qquad -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi)\ln[(x-\xi)^2+y^2]\,d\xi + C,$$

se $u_0(\xi) = O(|\xi|^{1-\varepsilon})$, $u_1 = O(|\xi|^{-1-\varepsilon})$, $|\xi| \to \infty$ per ogni $\varepsilon > 0$.

g) Supponiamo che una funzione $\varphi(\theta)$ possa essere sviluppata in serie di Fourier uniformemente convergente in $[0, 2\pi]$

$$\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Dimostrare che

$$u(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{R}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

è la soluzione del problema di Dirichlet interno per il cerchio $|z| < R$ con $u_0^- = \varphi$:

$$u(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z|}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

la soluzione del problema di Dirichlet esterno con $u_0^+ = \varphi$;

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{kR^{k-1}} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + C$$

è la soluzione del problema di Neumann con $u_1^- = \varphi$ a condizione che $a_0 = 0$;

$$u(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{k+1}}{k|z|^k} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + C$$

è la soluzione del problema di Neumann esterno con $u_1^+ = \varphi$ a condizione che $a_0 = 0$.

VI. Problemi misti

In questo capitolo saranno considerati i problemi misti per le equazioni di tipo iperbolico e parabolico e sarà dimostrato il metodo di Fourier (metodo di separazione delle variabili)[1].

§ 32. *Metodo di Fourier*

Uno dei metodi più efficaci per la risoluzione dei problemi al contorno a più dimensioni è il metodo di Fourier (metodo di separazione delle variabili). Nel § 26 questo metodo è stato applicato ai problemi al contorno agli autovalori. In questo paragrafo il metodo di Fourier è applicato in modo formale alla risoluzione dei problemi al contorno per equazioni di tipo diverso. La dimostrazione del metodo di Fourier di risoluzione dei problemi misti per le equazioni di tipo iperbolico e parabolico sarà data nei successivi paragrafi di questo capitolo.

Supponiamo che l'operatore L sia definito mediante l'espressione differenziale

$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu, \quad x \in G,$$

e con la condizione di frontiera

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

con le funzioni $p(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ che soddisfano le condizioni (3) del § 21.1.

Supponiamo che gli autovalori $\{\lambda_k\}$ dell'operatore L siano positivi, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, mentre le corrispondenti autofunzioni $\{X_k\}$

$$LX_k = \lambda_k \rho X_k, \quad X_k \in \mathscr{M}_L, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

[1] Il metodo di separazione delle variabili era stato già applicato, nel XVIII, da L. Eulero, D. Bernoulli e J. Lagrange per la soluzione dei problemi concernenti le vibrazioni della corda elastica omogenea. All'inizio del XIX secolo questo metodo è stato dettagliatamente elaborato da J. Fourier ed applicato al problema della propagazione del calore. In seguito il metodo di separazione delle variabili fu detto *metodo di Fourier*.

siano reali e formino un sistema ortonormale completo nello spazio $\mathcal{L}_2(G;\ \rho)$ con prodotto scalare $(f,\ g)_\rho$ di peso $\rho(x) > 0$, $x \in \overline{G}$, $\rho \in C(\overline{G})$. (Le condizioni sufficienti per le quali sono realizzate queste assunzioni sono date nel § 21.1.)

1. Equazione iperbolica omogenea. Consideriamo, in un cilindro infinito $\Pi_\infty = G \times (0, \infty)$, il seguente problema misto per l'equazione omogenea del tipo iperbolico (si veda il § 4.5):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu; \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \overline{G} \tag{2}$$

$$\alpha u + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

La sostanza del metodo di Fourier consiste in quanto segue: costruiamo un numero sufficiente di soluzioni dell'equazione (1) nella forma del prodotto

$$T(t)\, X(x) \tag{4}$$

che soddisfano la condizione di frontiera (3). Costruiamo una combinazione lineare di queste soluzioni che soddisfa le condizioni iniziali (2). Con certe condizioni è naturale aspettarsi che la combinazione lineare ottenuta verificherà l'equazione (1) e la condizione di frontiera (3), cioè sarà la soluzione del problema (1)-(2)-(3).

Cerchiamo, quindi, la soluzione dell'equazione (1) nella forma del prodotto (4) e richiediamo alla funzione $X(x)$ che essa verifichi la condizione di frontiera (3). Sostituendo l'espressione (4) nell'equazione (1) e dividendo entrambi i membri per ρTX, si ottiene

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{\rho(x)\, X(x)}. \tag{5}$$

Il primo membro dell'uguaglianza (5) non dipende da x ed il secondo membro da t. Di conseguenza, ogni grandezza non dipende né da x, né da t, cioè è una costante. Denotando questa costante con $-\lambda$ (cfr. il § 26.1), dall'uguaglianza (5), per le funzioni incognite T e X e per il parametro λ, si ottengono le seguenti equazioni:

$$LX = \lambda \rho X, \tag{6}$$

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{7}$$

Quindi, l'equazione (1) si è scissa in due equazioni (6) e (7) con il numero più piccolo di variabili indipendenti, cioè, come si dice, le *variabili si sono separate.*

Le soluzioni $X(x)$ dell'equazione (6) debbono soddisfare la condizione di frontiera (3). Perciò per X e λ possono essere prese le autofunzioni X_k e gli autovalori λ_k dell'operatore L. La soluzione genera-

le dell'equazione (6) per $\lambda = \lambda_k > 0$ ha la forma

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t, \tag{8}$$

dove a_k e b_k sono costanti arbitrarie.

Dunque, in virtù delle (4) e (8), è stato costruito un numero numerabile di soluzioni particolari (linearmente indipendenti) dell'equazione (1):

$$T_k(t)\, X_k(x) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t)\, X_k(x), \tag{9}$$
$$k = 1, 2, \ldots,$$

che soddisfano la condizione di frontiera (3) e hanno le costanti arbitrarie a_k e b_k. Naturalmente, ogni somma finita di soluzioni (9) verificherà di nuovo l'equazione (1) e la condizione di frontiera (3).

Costruiamo la serie formale

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t)\, X_k(x). \tag{10}$$

Scegliamo i coefficienti a_k e b_k tali che la serie (10) soddisfi in modo formale le condizioni iniziali (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x) = u_0(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, b_k X_k(x) = u_1(x),$$

cioè, in virtù del fatto che il sistema ortonormale $\{X_k\}$ di $\mathcal{L}_2(G; \rho)$ è completo, si ha

$$a_k = (u_0, X_k)_\rho = \int_G \rho u_0 X_k\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (u_1, X_k)_\rho. \tag{11}$$

Dunque, per la soluzione $u(x, t)$ del problema misto (1)-(2)-(3) abbiamo ottenuto uno sviluppo normale in termini delle autofunzioni $\{X_k\}$ dell'operatore L:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t)\, X_k(x). \tag{12}$$

Chiameremo questa serie *soluzione formale* del problema misto (1)-(2)-(3); il termine k-esimo della serie (12) uguale a

$$T_k(t)\, X_k(x) = N_k X_k(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}\, t + \alpha_k),$$

dove

$$N_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \sin \alpha_k = \frac{a_k}{N_k}, \quad \cos \alpha_k = \frac{b_k}{N_k}$$

rappresenta la cosiddetta *vibrazione armonica* di frequenza propria $\sqrt{\lambda_k}$ e di ampiezza $N_k X_k(x)$. La successione di numeri $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots$ si dice *spettro di frequenze proprie* del sistema.

2. Equazione iperbolica non omogenea. Esponiamo un'altra versione più generale del metodo di Fourier, valida per la costru-

zione della soluzione formale del problema misto per l'equazione iperbolica non omogenea:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + F(x, t). \tag{13}$$

Per ogni $t > 0$ sviluppiamo la soluzione $u(x, t)$ del problema (13)-(2)-(3) in serie di Fourier secondo le autofunzioni $\{X_k\}$ dell'operatore L:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad T_k(t) = (u, X_k)_\rho. \tag{14}$$

In virtù delle (2), (14) e (11), le funzioni incognite $T_k(t)$ debbono soddisfare le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} T_k(0) = \int_G \rho(x) u(x, 0) X_k(x) dx = (u_0, X_k)_\rho = a_k, \\ T_k'(0) = \int_G \rho(x) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} X_k(x) dx = (u_1, X_k)_\rho = \sqrt{\lambda_k} b_k. \end{cases} \tag{15}$$

Costruiamo un'equazione differenziale per le funzioni T_k. Moltiplicando scalarmente l'equazione (13) per X_k ed eseguendo un calcolo formale, si ottiene

$$\int_G \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} X_k dx = \frac{d^2}{dt^2} \int_G \rho u X_k dx = \frac{d^2}{dt^2} (u, X_k)_\rho =$$
$$= -(Lu, X_k) + (F, X_k) = -(u, LX_k) + (F, X_k) =$$
$$= -\lambda_k (u, X_k)_\rho + (F, X_k),$$

cioè, in virtù della (14), le funzioni T_k soddisfano l'equazione

$$T_k'' + \lambda_k T_k = c_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

dove

$$c_k(t) = (F, X_k) = \int_G F(x, t) X_k(x) dx. \tag{17}$$

Risolvendo il problema di Cauchy per l'equazione (16) con le condizioni iniziali (15), abbiamo (si veda il § 13.1)

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}\, (t - \tau) d\tau. \tag{18}$$

Sostituendo l'espressione (18) nella serie (14), otteniamo la soluzione formale del problema misto (13)-(2)-(3):

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, d\tau \right] X_k(x). \quad (19)$$

Notiamo che i primi due termini della serie (19) in virtù della (12),

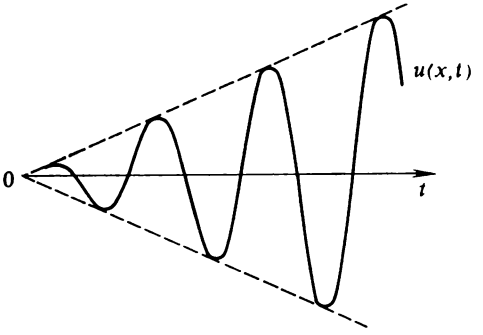


Fig. 103.

danno la soluzione formale del problema misto per $F = 0$; il terzo termine è la soluzione di questo problema per $u_0 = u_1 = 0$.

Supponiamo che $u_0 = u_1 = 0$ e

$$F(x,\ t) = C \sin(\omega t)\, \rho(x)\, X_i(x). \quad (20)$$

Si ha allora

$a_k = b_k = 0$, $c_k(t) = C \sin(\omega t)$ $(X_i,\ X_k)_\rho = C\delta_{ik} \sin \omega t$ e, di conseguenza, in virtù della (18),

$$T_k(t) = \frac{C\delta_{ik}}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin(\omega\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{C\delta_{ik}}{\omega^2 - \lambda_i} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda_i}} \sin \sqrt{\lambda_i}\, t - \sin \omega t \right).$$

Perciò la serie formale (19) è ridotta all'unico termine

$$u(x,\ t) = \frac{C}{\omega^2 - \lambda_i} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda_i}} \sin \sqrt{\lambda_i}\, t - \sin \omega t \right) X_i(x), \quad (21)$$

il quale è la soluzione reale del problema. Per $\omega \to \sqrt{\lambda_i}$ la soluzione (21) assume la forma

$$u(x,\ t) = \frac{C}{2\sqrt{\lambda_i}} \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda_i}\, t}{\sqrt{\lambda_i}} - t \cos \sqrt{\lambda_i}\, t \right) X_i(x). \quad (22)$$

Dalla formula (22) segue che, sotto l'azione della perturbazione esterna periodica (20) di frequenza uguale ad una delle frequenze

proprie $\sqrt{\lambda_i}$, l'ampiezza delle oscillazioni cresce in modo infinito per $t \to \infty$, si dice cioè che ha luogo il fenomeno della *risonanza* (si veda la fig. 103).

3. Equazione parabolica. Consideriamo nel cilindro $\mathcal{U}_\infty = G \times (0, \infty)$ il seguente problema misto per l'equazione parabolica (si veda il § 4.5):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + F(x, t); \tag{23}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \overline{G}; \tag{24}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{25}$$

Per costruire la soluzione formale del problema misto (23)-(24)-(25) utilizziamo il metodo di Fourier nella forma data nel § 32.2. Secondo questo metodo, la soluzione $u(x, t)$ si ottiene nella forma della serie (14). Per le funzioni $T_k(t)$ si ottiene il problema di Cauchy

$$T_k' + \lambda_k T = c_k(t). \; T_k(0) = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

dove $c_k(t)$ ed a_k sono definite dalle uguaglianze (17) e (15), rispettivamente. Risolvendo il problema di Cauchy (26), si ottiene (si veda il § 13.1):

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t c_k(\tau)\, e^{-\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau, \tag{27}$$

e, di conseguenza, la soluzione formale del problema misto (23)-(24)-(25) può essere espressa mediante la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t c_k(\tau)\, e^{-\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau \right] X_k(x). \tag{28}$$

4. Equazione di Schrödinger. Il problema misto per l'equazione di Schrödinger (si veda il § 2.7)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V(x)\, \psi; \tag{29}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x), \quad x \in \overline{G}; \tag{30}$$

$$\alpha \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{31}$$

è considerato nello stesso modo del problema misto (23)-(24)-(25). Per le funzioni T_k abbiamo il seguente problema di Cauchy:

$$i\hbar T_k' - \lambda_k T_k = 0, \quad T_k(0) = a_k = (\psi_0, X_k), \tag{32}$$

da cui

$$T_k(t) = a_k e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda_k t}, \tag{33}$$

e, quindi, la soluzione formale del problema misto (29)-(30)-(31) può essere espressa mediante la serie

$$\psi(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_k t} X_k(x), \tag{34}$$

dove X_k sono le autofunzioni dell'operatore L per $p = \hbar^2/2m_0$, $q = V$ e $\rho = 1$.

5. Equazione ellittica. Consideriamo nel cilindro finito $\Pi_l = G \times (0,\ l)$ il seguente problema al contorno per l'equazione del tipo ellittico:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + F(x,\ t); \tag{35}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{t=l} = u_l(x), \quad x \in \bar{G}; \tag{36}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant l. \tag{37}$$

Cerchiamo la soluzione formale di questo problema sotto forma della serie (14). Le funzioni incognite $T_k(t)$ debbono soddisfare l'equazione

$$T_k'' - \lambda_k T_k = c_k(t), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{38}$$

e le condizioni di frontiera

$$T_k(0) = (u_0,\ X_k)_\rho = a_k, \quad T_k(l) = (u_l,\ X_k)_\rho = b_k; \tag{39}$$

le funzioni $c_k(t)$ sono definite dall'uguaglianza (17).

Costruiamo la soluzione del problema al contorno (38)-(39). La funzione

$$v_k(t) = T_k(t) - a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\,(l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l} - b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l}$$

soddisfa l'equazione (38) e le condizioni di frontiera $v_k(0) = v_k(l) = 0$. Perciò questa funzione può essere espressa mediante la seguente formula (si veda il § 22.2):

$$v_k(t) = -\int_0^l \mathcal{G}_k(t,\ \tau)\, c_k(\tau)\, d\tau, \tag{40}$$

dove

$$\mathcal{G}_k(t,\ \tau) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l} \begin{cases} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, t \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\,(l-\tau), \\ \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\,(l-t) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, \tau, \\ \qquad \tau \leqslant t \leqslant l, \end{cases}$$

è la funzione di Green del problema al contorno (si veda il § 22.1)

$$-v'' + \lambda_k v = -c_k(t), \quad v(0) = v(l) = 0.$$

Di conseguenza, si ha

$$T_k(t) = a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\,(l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l} + b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l} - \int_0^l \mathcal{G}_k(t, \tau)\, c_k(\tau)\, d\tau. \quad (41)$$

Dunque, la soluzione formale del problema al contorno (35)-(36)-(37) è espressa mediante la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\,(l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l} + b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l} - \right.$$

$$\left. - \int_0^l \mathcal{G}_k(t, \tau)\, c_k(\tau)\, d\tau \right] X_k(x). \quad (42)$$

6. Esempi.

a) Vibrazioni di una corda fissa. Questo problema è ridotto alla risoluzione del seguente problema misto nella semibanda $(0, l) \times (0, \infty)$ per l'equazione d'onda unidimensionale (si veda il § 2.1):

$$\Box_a u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (43)$$

Il corrispondente problema agli autovalori è il problema di Sturm-Liouville

$$-a^2 X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Per questa ragione (si veda il § 22.4)

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

e la soluzione formale del problema (43) è espressa mediante la serie

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (44)$$

dove

$$a_k = \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad b_k = \frac{l}{k\pi a} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx.$$

Ogni oscillazione armonica

$$T_k(t)\, X_k(x) = N_k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi a}{l} t + \alpha_k \right),$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

forma *un'onda stazionaria* di frequenza propria $k\pi a/l$ e di ampiezza

$$N_k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

I punti nl/k, $n = 0, 1, \ldots, k$, in cui l'ampiezza si annulla, sono detti *nodi* ed i punti in cui essa è estremale $(n + 0{,}5)\, l/k$, $n = 0, 1, \ldots, k-1$, sono detti *antinodi* di quest'onda stazionaria (fig. 104).

La vibrazione armonica T_1X_1 della più piccola autofrequenza $\sqrt{\lambda_1} = \pi a/l$ è detta *modo fondamentale*; le altre vibrazioni armoniche T_2X_2, T_3X_3, ... di frequenze proprie

$$\sqrt{\lambda_2} = \frac{2\pi a}{l}, \quad \sqrt{\lambda_3} = \frac{3\pi a}{l}, \quad \ldots$$

formano una serie di *modi successivi*.

La soluzione (44) è formata dai singoli modi (modo fondamentale e modo successivo) e la loro azione combinata crea il *timbro del suono* emesso dalla corda.

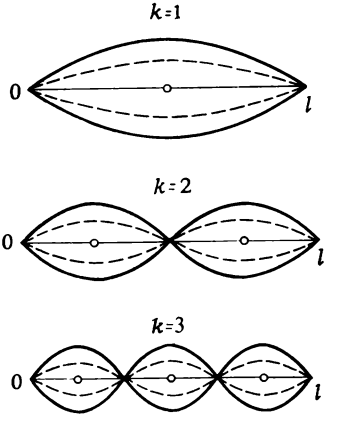


Fig. 104.

b) Propagazione del calore in una barra di lunghezza finita. Consideriamo il seguente problema misto per un'equazione di conduzione termica unidimensionale:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \qquad (45)$$

La soluzione formale del problema (45) è data dalla serie

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (46)$$

Limitandoci al primo membro della serie (46), otteniamo la soluzione approssimata del problema (45):

$$u(x, t) \approx \frac{2a_1}{l} e^{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}t} \sin\frac{\pi x}{l}.$$

c) Vibrazioni di una membrana fissa. Il problema si riduce alla risoluzione del seguente problema misto per un'equazione d'onda unidimensionale:

$$\Box_a u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u|_S = 0. \qquad (47)$$

Il corrispondente problema agli autovalori assume la seguente forma:

$$-a^2\Delta X = \lambda X, \quad X|_S = 0.$$

Per il rettangolo $(0, l) \times (0, m)$ (si veda il § 26.2)

$$\lambda_{kj} = \pi^2a^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}\right),$$

$$X_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{j\pi y}{m}, \quad k, j = 1, 2, \ldots,$$

e la soluzione formale del problema (47) è espressa mediante la serie doppia

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{4}{lm}\sum_{k,\ j=1}^{\infty}\left(a_{kj}\cos\pi a\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\,t+\right.$$

$$\left.+b_{kj}\sin\pi a\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\,t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{j\pi y}{m},\qquad(48)$$

dove

$$a_{kj}=\int_0^l\int_0^m u_0(x,\ y)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{j\pi y}{m}\,dx\,dy,$$

$$b_{kj}=\frac{lm}{\pi a\sqrt{k^2m^2+j^2l^2}}\int_0^l\int_0^m u_1(x,\ y)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{j\pi y}{m}\,dx\,dy.$$

Per un cerchio U_R (si veda il § 26.2)

$$\lambda_{kj}=\left[\mu_j^{(k)}\right]^2\frac{a^2}{R^2},\quad X_{kj}(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,R\,|J_k'(\mu_j^{(k)})|}J_k\left(\mu_j^{(k)}\frac{r}{R}\right)e^{ik\varphi},$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,$$

dove $\mu_j^{(k)}$ sono le radici positive dell'equazione $J_k(\mu)=0$. La soluzione formale del problema (47) è data dalla serie doppia

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{\pi R^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[a_{kj}\cos\frac{\mu_j^{(k)}a}{R}\,t+\right.$$

$$\left.+b_{kj}\sin\frac{\mu_j^{(k)}a}{R}\,t\right]\frac{J_k\left(\mu_j^{(k)}\frac{r}{R}\right)}{[J_k'(\mu_j^{(k)})]^2}e^{ik\varphi},\qquad(49)$$

dove

$$a_{kj}=\int_0^R\int_0^{2\pi}u_0(x,\ y)\,J_k\left(\mu_j^{(k)}\frac{r}{R}\right)e^{-ik\varphi}r\,dr\,d\varphi,$$

$$b_{kj}=\frac{R}{a\mu_j^{(k)}}\int_0^R\int_0^{2\pi}u_1(x,\ y)\,J_k\left(\mu_j^{(k)}\frac{r}{R}\right)e^{-ik\varphi}r\,dr\,d\varphi.$$

d) La soluzione formale del problema misto per l'equazione di conduzione termica bidimensionale,

$$u_t=a^2\Delta u,\quad u|_{t=0}=u_0(x),\quad u|_S=0,\qquad(50)$$

ha la seguente forma: per il rettangolo $(0,\ l)\times(0,\ m)$

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{4}{lm}\sum_{k,\ j=1}^{\infty}a_{kj}e^{-\pi^2a^2\left(\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)t}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{j\pi y}{m};\qquad(51)$$

per il cerchio U_R

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{\pi R^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}e^{-[\mu_j^{(k)}]^2a^2t/R^2}\frac{J_k(\mu_j^{(k)}r/R)}{[J_k'(\mu_j^{(k)})]^2}e^{ik\varphi}. \quad (52)$$

e) Vibrazione di un volume sferico. Consideriamo il problema misto (47) per una sfera tridimensionale U_R. I corrispondenti autovalori e le corrispondenti autofunzioni sono stati calcolati nel § 26.2, esempio c) (formule (30) e (31)).

La soluzione formale del problema è data dalla serie

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi R^2\sqrt{r}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[a_{ljm}\cos\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\frac{at}{R}+\right.$$

$$\left.+b_{ljm}\sin\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\frac{at}{R}\right]\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{(l+\delta_{0m})(l+|m|)!}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[J'_{l+\frac12}\left(\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\right)\right]^2}J_{l+\frac12}\left(\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\frac{r}{R}\right)Y_l^m(\theta,\ \varphi), \quad (53)$$

dove

$$a_{ljm}=\int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}u_0(x)J_{l+\frac12}\left(\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\frac{r}{R}\right)Y_l^m(\theta,\ \varphi)\,r^{3/2}\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

$$b_{ljm}=\frac{R}{a\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}}\int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}u_1(x)J_{l+\frac12}\left(\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\frac{r}{R}\right)\times$$

$$\times Y_l^m(\theta,\ \varphi)\,r^{3/2}\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

f) La soluzione formale del problema misto (50) per una sfera tridimensionale U_R è data dalla serie

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi R^2\sqrt{r}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{ljm}e^{-\left[\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\right]^2\frac{a^2}{R^2}t}\times$$

$$\times\frac{2l+1}{1+\delta_{0m}}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\frac{J_{l+\frac12}\left(\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\frac{r}{R}\right)Y_l^m(\theta,\ \varphi)}{\left[J'_{l+\frac12}\left(\mu_j^{\left(l+\frac12\right)}\right)\right]^2}. \quad (54)$$

g) Consideriamo nella sfera U_R il seguente problema misto per l'equazione di Schrödinger

$$\begin{aligned}&i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi+V(|x|)\,\psi,\\&\psi|_{t=0}=\psi_0(x),\quad \psi|_{S_R}=0,\end{aligned} \quad (55)$$

dove il potenziale V dipende solo da $|x|$. Il corrispondente problema agli autovalori assume la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta X + V(|x|)X = \lambda X, \quad X|_{S_R} = 0,$$

o, in coordinate sferiche,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial X}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial X}{\partial\theta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 X}{\partial\varphi^2}\right] + V(r)X = \lambda X, \quad (56)$$
$$|X(0, \theta, \varphi)| < \infty, \quad X(R, \theta, \varphi) = 0.$$

Gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno (56) vengono definiti con il metodo della separazione delle variabili. Ponendo che

$$X = \frac{\mathcal{R}(r)}{r}Y(\theta, \varphi)$$

e procedendo come nel § 25.8, si ottiene

$$\lambda_{lj},\ X_{ljm}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{\pi(1+\delta_{0m})}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\frac{\mathcal{R}_{lj}(r)}{r}Y_l^m(\theta, \varphi),$$
$$l = 0, 1, \ldots; \quad j = 1, 2, \ldots; \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l,$$

dove λ_{lj} e $\mathcal{R}_{lj}(r)$, $j = 1, 2, \ldots$ sono gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno unidimensionale

$$-\mathcal{R}'' + \frac{l(l+1)}{r}\mathcal{R} + \frac{2m_0}{\hbar^2}(V-\lambda)\mathcal{R} = 0, \quad \mathcal{R}(0) = \mathcal{R}(R) = 0.$$

La soluzione formale del problema (55) è espressa mediante la serie

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{ljm}e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_{lj}t} \times$$
$$\times \frac{2l+1}{1+\delta_{0m}}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\mathcal{R}_{lj}(r)Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (57)$$

dove

$$a_{ljm} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} u_0(x)\mathcal{R}_{lj}(r)Y_l^m(\theta, \varphi)\,r\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Gli autovalori λ_{lj} definiscono i livelli energetici della particella quantistica; gli indici l e m sono chiamati rispettivamente numeri quantici *orbitale* e *magnetico* [1].

h) La soluzione formale del problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0, \ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, \ u|_{y=0} = u_0(x), \ u|_{y=l} = u_l(x) \quad (58)$$

[1] Si veda, per esempio, Messiah [1], cap. IX.

nel rettangolo $(0, a) \times (0, l)$ è data dalla serie

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{sh} k\pi \frac{l-y}{a} + b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \right) \frac{\sin \frac{k\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi l}{a}}, \qquad (59)$$

dove

$$a_k = \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx, \quad b_k = \int_0^l u_l(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx.$$

i) Consideriamo il problema di Dirichlet nel cilindro tridimensionale $U_R \times (0, h)$:

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S_R} = u_0(z), \quad u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0. \qquad (60)$$

In coordinate cilindriche (r, φ, z) (si veda il § 3.2) la soluzione $u(x, y, z) = \tilde{u}(r, z)$ non dipende dall'angolo φ e per questa ragione il problema (60) assume la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = 0, \qquad (61)$$

$$\tilde{u}(R, z) = u_0(z), \quad \tilde{u}(r, 0) = \tilde{u}(r, h) = 0.$$

Risolvendo il problema al contorno (61) per mezzo del metodo della separazione delle variabili, $\tilde{u}(r, z) = \mathcal{R}(r) Z(z)$, per le funzioni $\mathcal{R}$ e Z si ottengono i problemi al contorno

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad Z(0) = Z(h) = 0,$$

$$\mathcal{R}'' + \frac{\mathcal{R}'}{r} - \lambda \mathcal{R} = 0, \quad |\mathcal{R}(0)| < \infty.$$

Si può facilmente trovare le soluzioni di questi problemi al contorno:

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{h^2}, \quad Z_k(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \frac{k\pi z}{h}, \quad \mathcal{R}_k(r) = c_k I_0 \left(k\pi \frac{r}{h} \right),$$

dove I_0 è la funzione di Bessel di argomento immaginario (si veda il § 23.8).

La soluzione formale del problema (61) e, quindi, del problema (60) è data dalla serie

$$u(x) = \tilde{u}(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{I_0 \left(k\pi \frac{r}{h} \right)}{I_0 \left(k\pi \frac{R}{h} \right)} \sin \frac{k\pi z}{h}, \qquad (62)$$

dove

$$a_k = \int_0^h u_0(z) \sin \frac{k\pi z}{h}\, dz.$$

7. **Esercizi.** a) Dimostrare che se $u_x''' \in \mathscr{L}_2(0, l)$, $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0$, $u_1' \in \mathscr{L}_2(0, l)$, $u_1(0) = u_1(l) = 0$, la serie (44) rappresenta la soluzione classica del problema (43).

b) Dimostrare che se $u_0' \in \mathscr{L}_2(0, l)$, $u_0(0) = u_0(l) = 0$ la serie (46) rappresenta la soluzione classica del problema (45).

c) Dimostrare che se u_0 ed $u_l \in C^2(\overline{G})$, $u_0 \mid_S = u_l \mid_S = 0$, la serie

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(u_0, X_k) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\,(l-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l} + (u_l, X_k) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\, l} \right] X_k(x)$$

dà la soluzione del seguente problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel cilindro $G \times (0, l)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Delta_x u = 0, \quad u \mid_{y=0} = u_0(x), \quad u \mid_{y=l} = u_l(x), \quad u \mid_S = 0.$$

§ 33. *Problema misto per un'equazione di tipo iperbolico*

In questo paragrafo sarà considerato il seguente problema mitso per un'equazione di tipo iperbolico (si veda il § 4.5):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \equiv -Lu + F(x, t), \tag{1}$$

$$(x, t) \in \Pi_\infty = G \times (0, \infty); \tag{2}$$

$$u \mid_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \overline{G};$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Supponiamo che le funzioni ρ, p, q, α e β soddisfino le condizioni del § 32; G è una regione limitata e la sua frontiera S è una superficie regolare a tratti e S_0 è quella parte di S dove contemporaneamente $\alpha(x) > 0$ e $\beta(x) > 0$.

1. Soluzione classica. Integrale dell'energia. La funzione $u(x, t)$ della classe $C^2(\Pi_\infty) \cap C^1(\overline{\Pi}_\infty)$ che soddisfa l'equazione (1) nel cilindro Π_∞, le condizioni iniziali (2) sulla base inferiore e la condizione di frontiera (3) sulla superficie laterale di questo cilindro è detta *soluzione classica* del problema misto (1)-(2)-(3).

Le condizioni necessarie per l'esistenza di una soluzione classica del problema (1)-(2)-(3) sono le seguenti condizioni di regolarità:

$$F \in C(\Pi_\infty), \quad u_0 \in C^1(\overline{G}), \quad u_1 \in C(\overline{G}),$$

e la condizione di concordanza

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_S = 0.$$

Nello studio dei problemi al contorno per le equazioni iperboliche risulta molto efficace il metodo dell'integrale dell'energia. Suppo-

niamo che $u(x, t)$ sia la soluzione classica del problema (1)-(2)-(3). La quantità

$$J^2(t) = \frac{1}{2}\int_G \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\,|\mathrm{grad}\ u|^2 + qu^2\right] dx + \frac{1}{2}\int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}u^2\,dS,$$

che è la somma dell'energia cinetica e potenziale di un sistema vibrazionale all'istante t, è detta *integrale dell'energia.*

Supponiamo che $u(x, t)$ *sia la soluzione classica del problema* (1)-(2)-(3) *e che* F *appartenga a* $C(\overline{\Pi}_\infty)$. *Allora è valida la relazione*

$$J^2(t) = J^2(0) + \int_0^t \int_G F(x, \tau) \times$$

$$\times \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}\,d\tau, \quad t \geqslant 0, \qquad (4)$$

dove

$$J^2(0) = \frac{1}{2}\int_G (\rho u_1^2 + p|\,\mathrm{grad}\ u_0|^2 +$$

$$+ qu_0^2)\,dx + \frac{1}{2}\int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}u_0^2\,dS.$$

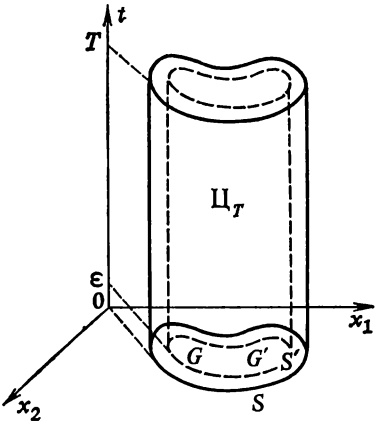


Fig. 105.

Per la dimostrazione prendiamo un numero arbitrario $\varepsilon > 0$ ed una regione arbitraria $G' \Subset G$ con una frontiera regolare a tratti S' (fig. 105). Moltiplicando l'equazione (1) per $\partial u/\partial t$, integrando sul cilindro $G' \times (\varepsilon, T)$ ed utilizzando la formula di Green (si veda il § 21.2), si ottiene

$$\int_{G'\times(\varepsilon,\,T)} F\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt = \int_{G'\times(\varepsilon,\,T)} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu\right) dx\,dt =$$

$$= \int_{G'} \rho \int_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt\,dx + \int_\varepsilon^T \int_{G'} \frac{\partial u}{\partial t} Lu\,dx\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{G'} \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\Big|_\varepsilon^T dx + \int_\varepsilon^T \left[\int_{G'} p\left(\mathrm{grad}\ u, \mathrm{grad}\ \frac{\partial u}{\partial t}\right) dx -\right.$$

$$\left. - \int_{S'} p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS' + \int_{G'} qu\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\right] dt = \frac{1}{2}\int_{G'} \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + p|\,\mathrm{grad}\ u|^2 + qu^2\right]\Big|_\varepsilon^T dx - \int_\varepsilon^T \int_{S'} p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS'\,dt.$$

Passando al limite, per $\varepsilon \to 0$ e $G' \to G$, ed utilizzando il fatto che $u \in C^1(\Pi_T)$ e $F \in C(\overline{\Pi}_T)$, si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{2}\int_G \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\,|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2\right]\Big|_0^T dx - \\ - \int_0^T \int_S p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt = \int_{\Pi_T} F\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt. \quad (5)$$

Dalla condizione di frontiera (3) seguono le relazioni su S, $\partial u/\partial n = -\alpha u/\beta$ se $\beta > 0$; $u = 0$ se $\beta = 0$. Per questa ragione si ha

$$-\int_0^T \int_S p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt = \int_0^T \int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}u\frac{\partial u}{\partial t}\,dS\,dt = \frac{1}{2}\int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}u^2\Big|_0^T dS,$$

da cui e dalla (5), sostituendo T con t, si ottiene la formula (4). Il teorema è dimostrato.

Corollario. *Per $F = 0$ l'uguaglianza (4) assume la forma*

$$J^2(t) = J^2(0), \quad t \geqslant 0. \quad (6)$$

Il significato fisico dell'uguaglianza (6) consiste nel fatto che l'energia totale di un sistema vibrazionale in assenza di perturbazioni esterne non varia nel tempo (legge di conservazione dell'energia).

2. Unicità e dipendenza continua della soluzione classica. Applichiamo il metodo dell'integrale dell'energia per dimostrare l'unicità e la dipendenza continua della soluzione classica del problema misto (1)-(2)-(3).

Derivando l'uguaglianza (4) rispetto a t, si ottiene

$$2J(t)J'(t) = \int_G F(x, t)\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\,dx, \quad t \geqslant 0. \quad (7)$$

Applicando al secondo membro dell'uguaglianza (7) la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij, deduciamo la seguente disuguaglianza:

$$2JJ' \leqslant \|F\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|. \quad (8)$$

Tenendo conto del fatto che $\rho(x) > 0$, $\rho \in C(\overline{G})$ e, quindi, $\rho(x) \geqslant \rho_0$ per un certo $\rho_0 > 0$, si ottiene una successione di disuguaglianze

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{\rho_0}\int_G \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \leqslant \frac{2}{\rho_0}J^2(t),$$

e cioè

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\,J(t). \quad (9)$$

In modo analogo ci convinciamo della validità della relazione

$$\| \, |\text{grad } u| \, \| \leqslant \sqrt{\frac{2}{p_0}} \, J(t), \tag{10}$$

dove $p_0 = \min p(x)$, $x \in G$, $p_0 > 0$.

Sostituendo la disuguaglianza (9) nella disuguaglianza (8) e riducendo per J, deduciamo la disuguaglianza

$$J'(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \|F\|, \quad t \geqslant 0.$$

Integrando la disuguaglianza differenziale, per la funzione J si ottiene la seguente relazione

$$J(t) \leqslant J(0) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \int_0^t \|F\| \, d\tau. \tag{11}$$

Dalle (9), (10) e (11) deduciamo le relazioni

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \, J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| \, d\tau, \quad t \geqslant 0; \tag{12}$$

$$\| \, |\text{grad } u| \, \| \leqslant \sqrt{\frac{2}{p_0}} \, J(0) + \frac{1}{\sqrt{\rho_0 p_0}} \int_0^t \|F\| \, d\tau, \quad t \geqslant 0. \tag{13}$$

Valutiamo ora la funzione $\|u\|$. Derivando l'uguaglianza

$$\|u\|^2 = \int_G u^2(x, t) \, dx$$

rispetto a t, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij e tenendo conto della disuguaglianza (12), si ottiene

$$2\|u\| \, \|u\|' = 2 \int_G u \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \leqslant 2 \|u\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \|u\| \left[\sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \, J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| \, d\tau \right],$$

e cioè, dopo la riduzione per $2\|u\|$, si ha

$$\|u\|' \leqslant \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \, J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| \, d\tau, \quad t \geqslant 0.$$

Integrando questa disuguaglianza, abbiamo

$$\|u\| \leqslant \|u\|_0 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \, J(0) \, t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \int_0^{t'} \|F\| \, d\tau \, dt',$$

dove $\|u\|_0$ è il valore della funzione $\|u\|$ nel punto $t=0$, e cioè

$$\|u\|_0^2 = \int_G u^2(x,\ 0)\,dx = \int_G u_0^2(x)\,dx = \|u_0\|^2.$$

Invertendo l'ordine d'integrazione nell'ultimo integrale, si ottiene la relazione cercata

$$\|u\| \leqslant \|u\|_0 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\,J(0)\,t + \frac{1}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)\|F\|\,d\tau, \quad t \geqslant 0. \tag{14}$$

Utilizzando le (12), (13) e (14), dimostriamo il seguente

Teorema. *La soluzione classica del problema* (1)-(2)-(3) *è unica e dipende con continuità da* u_0, u_1 *e* F *nel senso che se* F *appartiene a* $C(\mathcal{Q}_T)$, $\widetilde{F} \in C(\overline{\mathcal{Q}_T})$ *e*

$$\begin{cases} \|F-\widetilde{F}\| \leqslant \varepsilon,\ 0 \leqslant t \leqslant T;\ \|u_0-\widetilde{u}_0\|_C \leqslant \varepsilon_0, \\ \|\,|\operatorname{grad} u_0 - \operatorname{grad}\widetilde{u}_0|\,\| \leqslant \varepsilon_0',\ \|u_1-\widetilde{u}_1\| \leqslant \varepsilon_1, \end{cases} \tag{15}$$

le corrispondenti soluzioni (classiche) $u(x, t)$ *ed* $u(\widetilde{x}, t)$ *soddisfano, per* $0 \leqslant t \leqslant T$, *le disuguaglianze*

$$\|u-\widetilde{u}\| \leqslant C\left(\varepsilon_0 + T\varepsilon_0 + T\varepsilon_0' + T\varepsilon_1 + \frac{T^2}{2}\varepsilon\right), \tag{16}$$

$$\|\,|\operatorname{grad}_x u - \operatorname{grad}_x \widetilde{u}|\,\| \leqslant C(\varepsilon_0 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1 + T\varepsilon), \tag{17}$$

$$\|u_t - \widetilde{u}_t\| \leqslant C(\varepsilon_1 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1 + T\varepsilon) \tag{18}$$

ed inoltre il numero C *non dipende dalle quantità* u_0, u_1, F, t *e* T.

Dimostrazione. Per dimostrare l'unicità del problema, è sufficiente stabilire che la soluzione classica $u(x, t)$ del problema omogeneo (1)-(2)-(3) (per $u_0 = u_1 = 0$ e $F = 0$) è unica e cioè $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in \mathcal{Q}_\infty$ (si veda il § 1.11). Ma ciò segue dalla disuguaglianza (14), visto che $u_0 = 0$, $J(0) = 0$ e $F = 0$.

Per dimostrare la dipendenza continua costruiamo la differenza $\eta = u - \widetilde{u}$. La funzione η è la soluzione classica del problema (1)-(2)-(3) con la sostituzione di F, u_0 ed u_1 con $F - \widetilde{F}$, $u_0 - \widetilde{u}_0$ ed $u_1 - \widetilde{u}_1$, rispettivamente. Utilizzando le disuguaglianze (15), per la soluzione η calcoliamo il valore dell'integrale dell'energia $\widetilde{J}^2(0)$:

$$2\widetilde{J}^2(0) = \int_G [\rho(u_1-\widetilde{u}_1)^2 + p|\operatorname{grad} u_0 - \operatorname{grad}\widetilde{u}_0|^2 + q(u_0-\widetilde{u}_0)^2]\,dx +$$

$$+ \int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}(u_0-\widetilde{u}_0)^2\,dS \leqslant V \max_{x\in\overline{G}} \rho(x)\,\varepsilon_1^2 + V \max_{x\in\overline{G}} p(x)\,(\varepsilon_0')^2 +$$

$$+ \left[V \max_{x\in\overline{G}} q(x) + \sigma \max_{x\in S_0} p\frac{\alpha}{\beta}(x)\right]\varepsilon_0^2 \leqslant C_1^2(\varepsilon_0 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1)^2,$$

dove V è il volume della regione G, σ è l'area del tratto S_0 e C_1^2 è un numero più grande di quelli V max ρ, V max p e V max q + + σ max $p\alpha/\beta$. Quindi, abbiamo ottenuto la seguente relazione:

$$\sqrt{2}\,\tilde{J}(0) \leqslant C_1(\varepsilon_0+\varepsilon_0'+\varepsilon_1). \tag{19}$$

Applicando ora alla soluzione η la disuguaglianza (14),

$$\|\eta\| \leqslant \|u_0-\tilde{u}_0\| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\,\tilde{J}(0)\,t + \frac{1}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)\|F-\tilde{F}\|\,d\tau,$$

ed utilizzando le disuguaglianze (15) e (19), otteniamo, per tutti i $t \in [0, T]$, la relazione (16):

$$\|\eta\| \leqslant \sqrt{\mathrm{V}}\|u_0-\tilde{u}_0\|_C + \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}C_1(\varepsilon_0+\varepsilon_0'+\varepsilon_1)\,t + \\ + \frac{\varepsilon}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)\,d\tau \leqslant \varepsilon_0\sqrt{\mathrm{V}} + \frac{T}{\sqrt{\rho_0}}C_1(\varepsilon_0+\varepsilon_0'+\varepsilon_1) + \\ + \frac{\varepsilon}{2\rho_0}T^2 \leqslant C\left(\varepsilon_0+\varepsilon_0 T+\varepsilon_0' T+\varepsilon_1 T+\frac{\varepsilon}{2}T^2\right)$$

con una scelta conveniente della costante C.

In modo analogo, mendiante le disuguaglianze (12), (13) e (19), possono pure essere stabilite le disuguaglianze (17) e (18). Il teorema è dimostrato.

La dimostrazione dell'esistenza di una soluzione classica del problema (1)-(2)-(3) presenta considerevoli difficoltà. Per evitare queste difficoltà introduciamo, come per il problema di Cauchy, il concetto di soluzione generalizzata di questo problema, poiché l'esistenza di una soluzione generalizzata può essere stabilita in un modo molto più semplice. Prima di farlo, studiamo più dettagliatamente le funzioni che appartengono a $\mathcal{L}_2(G)$ in funzione di un parametro.

3. Funzioni continue in $\mathcal{L}_2(G)$. Supponiamo che per ogni $t \in [a, b]$ la funzione $u(x, t)$ appartenga a $\mathcal{L}_2(G)$. La funzione $u(x, t)$ è detta *continua in $\mathcal{L}_2(G)$ rispetto alla variabile t su $[a, b]$* se, per ogni $t \in [a, b]$, si ha

$$[u(x, t') \to u(x, t), \quad t' \to t \text{ in } \mathcal{L}_2(G).$$

Da questa definizione segue che se la funzione $u(x, t)$ è continua in $\mathcal{L}_2(G)$ rispetto a t su $[a, b]$, la norma $\|u(x, t)\|$ è continua rispetto a t su $[a, b]$; per ogni $f \in \mathcal{L}_2(G)$ il prodotto scalare $(u(x, t), f)$ è continuo rispetto a t su $[a, b]$; $u \in \mathcal{L}_2(G \times (a, b))$ se l'intervallo (a, b) è finito.

Infatti, la continuità da $\|u\|$ segue dalla disuguaglianza

$$|\|u(x, t')\| - \|u(x, t)\|| \leqslant \|u(x, t') - u(x, t)\|,$$

che segue dalla disuguaglianza di Minkowski. La continuità di (u, f) segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij

$$|(u(x, t'), f) - (u(x, t), f)| \leqslant \| u(x, t') - u(x, t) \| \| f \|.$$

Il fatto che u appartiene a $\mathscr{L}_2(G \times (a, b))$ segue dal fatto che (a, b) è finito, dalla continuità di $\| u \|$ e dall'uguaglianza

$$\int_a^b \int_G |u(x, t)|^2 dx\, dt = \int_a^b \|u(x, t)\|^2 dt.$$

La successione di funzioni $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, è detta *convergente alla funzione* $u(x, t)$ *in* $\mathscr{L}_2(G)$ *uniformemente in* t *su* $[a, b]$ se

$$\|u_k(x, t) - u(x, t)\| \xrightarrow{t \in [a,b]} 0, \quad k \to \infty;$$

scriveremo allora

$$u_k \xrightarrow{t \in [a,b]} u, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{L}_2(G),$$

Da questa definizione segue che

$$u_k \to u, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{L}_2(G \times (a, b));$$

$$\| u_k(x, t) \xrightarrow{t \in [a, b]} \| u(x, t) \|, \quad k \to \infty$$

Lemma 1. *Se la successione di funzioni* $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, *continue in* $\mathscr{L}_2(G)$ *rispetto a* t *su* $[a, b]$ *converge alla funzione* $u(x, t)$ *in* $\mathscr{L}_2(G)$ *uniformemente rispetto a* t *su* $[a, b]$, $u(x, t)$ *è continua in* $\mathscr{L}_2(G)$ *rispetto a* t *su* $[a, b]$.

Dimostrazione. Prendiamo un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Esiste un numero $m = m_\varepsilon$ tale che

$$\|u_m(x, t) - u(x, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t \in [a, b].$$

Per ipotesi, la funzione $u_m(x, t)$ è continua in $\mathscr{L}_2(G)$ rispetto a $t \in [a, b]$. Quindi, esiste un numero $\delta = \delta_\varepsilon$ tale che

$$\|u_m(x, t') - u_m(x, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |t' - t| < \delta, \; t', \; t \in [a, b].$$

Di conseguenza, utilizzando la disuguaglianza di Minkowski, si ottiene

$$\|u(x, t') - u(x, t)\| \leqslant \|u(x, t') - u_m(x, t')\| + \|u_m(x, t') - u_m(x, t)\| + \|u_m(x, t) - u(x, t)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

per tutti i $|t - t'| < \delta$, $t', t \in [a, b]$. Il lemma è dimostrato.

La successione di funzioni $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, è detta *convergente in se stessa, in* $\mathscr{L}_2(G)$, *uniformemente rispetto a t su* $[a, b]$, se

$$u_k - u_p \xrightarrow{t\in[a,b]} 0, \quad k, p \to \infty \text{ in } \mathscr{L}_2(G).$$

Lemma 2. *Se la successione di funzioni* $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, *converge in se stessa, in* $\mathscr{L}_2(G)$, *uniformemente rispetto a t su* $[a, b]$, *esiste una funzione* $u(x, t)$ *continua in* $\mathscr{L}_2(G)$ *rispetto a t su* $[a,b]$ *tale che*

$$u_k \xrightarrow{t\in a,b]} u, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{L}_2(C).$$

Dimostrazione. Secondo il teorema di Riesz-Fischer (si veda il §1.7), per ogni $t \in [a, b]$ esiste una funzione $u(x, t) \in \mathscr{L}_2(G)$ tale che

$$u_k \to u, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{L}_2(G). \tag{20}$$

Inoltre, si può scegliere una sottosuccessione $u_{k_i}(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots$, tale che

$$\|u_{k_{i+1}}(x, t) - u_{k_i}(x, t)\| < \frac{1}{2^i}, \quad t \in [a. b]. \tag{21}$$

Ma, in virtù della (20), per ogni $t \in [a, b]$ si ha

$$u = \lim_{p\to\infty} u_{k_p} = u_{k_1} + (u_{k_{i+1}} - u_{k_1}) + (u_{k_{i+2}} - u_{k_{i+1}}) + \ldots,$$

e perciò, in virtù della (21),

$$u - u_{k_i}\| \leqslant \|u_{k_{i+1}} - u_{k_i}\| + \|u_{k_{i+2}} - u_{k_{i+1}}\| + \ldots <$$
$$< \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

da cui segue che la sottosuccessione $\{u_{k_i}\}$ converge ad u in $\mathscr{L}_2(G)$ uniformemente rispetto a $t \in [a, b]$. Allora dalla disuguaglianza

$$\|u_k - u\| \leqslant \|u_k - u_{k_i}\| + \|u_{k_i} - u\|$$

concludiamo che la successione $\{u_k\}$ converge alla funzione u in $\mathscr{L}_2(G)$ uniformemente rispetto a t su $[a, b]$. In base al lemma 1, la funzione $u(x, t)$ è continua in $\mathscr{L}_2(G)$ in t su $[a, b]$. Il lemma è dimostrato.

4. Soluzione generalizzata. Supponiamo che esistano successioni di funzioni $F_k \in C(\overline{\Pi}_\infty)$, $u_{k0} \in C^1(\overline{G})$, ed $u_{k1} \in C(\overline{G})$, $k = 1, 2, \ldots$, tali che 1) per $k \to \infty$

$$\begin{cases} F_k \xrightarrow{t\in[0,T]} F \text{ in } \mathscr{L}_2(G) \text{ per ogni } T > 0, \\ u_{k0} \to u_0 \text{ in } C(\overline{G}), \text{ grad } u_{k0} \to \text{grad } u_0 \text{ in } \mathscr{L}_2(G), \\ u_{k1} \to u_1 \text{ in } \mathscr{L}_2(G); \end{cases} \tag{22}$$

2) per ogni $k = 1, 2, \ldots$ esiste una soluzione classica $u_k(x, t)$ del problema misto

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = -Lu_k + F_k(x, t), \tag{1'}$$

$$u_k|_{t=0} = u_{k0}(x), \quad \frac{\partial u_k}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_{k1}(x), \tag{2'}$$

$$\alpha u_k + \beta \frac{\partial u_k}{\partial n}\Big|_S = 0. \tag{3'}$$

Dimostriamo che *esiste una funzione* $u(x, t)$ *continua in* $\mathscr{L}_2(G)$ *in* t *su* $[0, \infty)$ *e tale che, per ogni* $T > 0$, *si ha*

$$u_k \xrightarrow{t\in[0,T]} u, \quad k \to \infty \text{ in } \mathscr{L}_2(G), \tag{23}$$

La funzione $u(x, t)$ è detta *soluzione generalizzata* del problema (1)-(2)-(3).

Infatti, applicando la disuguaglianza (16) del teorema del § 33.2 alla differenza $u_k - u_p$, per tutti i $t \in [0, T]$ e $T > 0$ si ottiene

$$\|u_k - u_p\| \leqslant$$

$$\leqslant C\Big[(1+T)\|u_{k0} - u_{p0}\|_C + T\| \,|\text{grad } u_{k0} - \text{grad } u_{p0}|\,\| + T\|u_{k1} - u_{p1}\| + \frac{T^2}{2} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|F_k - F_p\|\Big],$$

da cui, in virtù della (22), segue che la successione $\{u_k\}$ converge in se stessa in $\mathscr{L}_2(G)$ uniformemente rispetto a t su $[0, T]$. Conformemente al lemma 2 del § 33.3, esiste una funzione $u(x, t)$ continua in $\mathscr{L}_2(G)$ rispetto a t su $[0, \infty)$ tale che, per ogni $T > 0$ è valida la relazione limite (23).

Dalla definizione di una soluzione generalizzata segue che ogni soluzione classica del problema (1)-(2)-(3) è anche la sua soluzione generalizzata e, per l'esistenza di una soluzione generalizzata, debbono essere verificate le seguenti condizioni: F è continua in $\mathscr{L}_2(G)$ rispetto a t su $[0, \infty)$, $u_0 \in C(\bar{G})$, grad $u_0 \in \mathscr{L}_2(G)$ ed $u_1 \in \mathscr{L}_2(G)$.

Stabiliamo ora altre proprietà delle soluzioni generalizzate.

a) *La soluzione generalizzata* $u(x, t)$ *del problema* (1)-(2)-(3) *soddisfa l'equazione* (1) *in senso generalizzato, cioè per ogni* $\varphi \in \mathscr{D}(\Pi_\infty)$ *è verificata la seguente relazione integrale*:

$$\int u(x, t)\left(\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + L\varphi\right) dx\, dt = \int F(x, t)\,\varphi\, dx\, dt. \tag{24}$$

Infatti, supponiamo che φ appartenga a $\mathscr{D}(\Pi_\infty)$; allora supp $\varphi \subset \subset \Pi_T$ per un T positivo. Moltiplicando l'equazione (1') per la funzione φ ed integrando su Π_T, si ottiene

$$\int_{\Pi_T} \left[\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \text{div}\,(p \text{ grad } u_k) + q u_k\right] \varphi\, dx\, dt = \int_{\Pi_T} F_k \varphi\, dx\, dt.$$

Nell'integrale che figura nel primo membro di quest'uguaglianza trasferiamo, mediante l'integrazione per parti, l'operazione di derivazione alla funzione fondamentale φ (si veda la (6) del § 21.2). Visto che φ si annulla nell'intorno della frontiera del cilindro Π_T, i termini senza il segno d'integrale si annullano e si ottiene

$$\int_{\Pi_T} u_k \left[\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} \varphi) + q\varphi \right] dx\, dt = \int_{\Pi_T} F_k \varphi \, dx\, dt.$$

Tenendo ora conto del fatto che, in virtù delle (23) e (22) si ha

$$u_k \to u \text{ e } F_k \to F, \quad k \to \infty \text{ in } \mathcal{L}_2(\Pi_T),$$

e passando, nell'ultima uguaglianza, al limite per $k \to \infty$, si ottiene la relazione integrale (24).

b) *La soluzione generalizzata* $u(x, t)$ *ha derivate prime (generalizzate)* u_t, grad u, *che sono continue in* $\mathcal{L}_2(G)$ *rispetto a* t *su* $[0, \infty)$ *ed inoltre, per tutti i* T *positivi, si ha*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t} \overset{t \in [0,T]}{\longrightarrow} \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ \operatorname{grad} u_k \overset{t \in [0,T]}{\longrightarrow} \operatorname{grad} u, \quad k \to \infty \text{ in } \mathcal{L}_2(G). \end{cases} \tag{25}$$

Infatti, applicando la disuguaglianza (18) del teorema del § 33.2 alla differenza $u_k - u_p$, per tutti i $t \in [0, T]$ e $T > 0$ si ottiene

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial u_p}{\partial t} \right\| \leqslant C \left(\|u_{k0} - u_{p0}\|_C + \| \, | \operatorname{grad} u_{k0} - \operatorname{grad} u_{p0} | \, \| + \right.$$
$$\left. + \|u_{k1} - u_{p1}\| + T \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|F_k - F_p\| \right),$$

da cui, in virtù della (22), segue che la successione delle derivate $\partial u_k / \partial t$, $k = 1, 2, \ldots$, converge in se stessa in $\mathcal{L}_2(G)$ uniformemente rispetto a t su $[0, T]$ per tutti i T positivi. Secondo il lemma 2 del § 33.3, esiste una funzione $\tilde{u}(x, t)$ continua in $\mathcal{L}_2(G)$ rispetto a t su $[0, \infty]$ tale che per tutti i T positivi si ha

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \overset{t \in [0,T]}{\longrightarrow} \tilde{u}, \quad k \to \infty \text{ in } \mathcal{L}_2(G). \tag{26}$$

D'altra parte, dalla (23) segue che $u_k \to u$, $k \to \infty$ in $\mathcal{D}'$ (supponiamo che le funzioni u_k ed u siano prolungate, mediante lo zero, all'esterno del cilindro $\overline{\Pi}_\infty$). Da ciò, utilizzando il fatto che l'operazione di derivazione generalizzata è continua in $\mathcal{D}'$ (si veda la proprietà a) del § 6.2), concludiamo che

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \quad k \to \infty \text{ in } \mathcal{D}'.$$

Applicando la relazione ottenuta alle funzioni fondamentali φ appartenenti a $\mathscr{D}$ ($Ц_\infty$) e considerando la (26), deduciamo che

$$\int \tilde{u}\varphi\, dx\, dt \leftarrow \int \frac{\partial u_k}{\partial t}\varphi\, dx\, dt \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

da cui segue l'uguaglianza (si veda il § 5.5)

$$u_t = \tilde{u}, \quad (x, t) \in Ц_\infty.$$

Dunque, in virtù della (26), abbiamo dimostrato la prima relazione limite (25). La seconda relazione (25) è dimostrata in modo analogo.

c) *La relazione generalizzata* $u(x, t)$ *soddisfa le condizioni iniziali* (2) *nel seguente senso*:

$$\|u - u_0\| \rightarrow 0, \ \| \, |\operatorname{grad}_x (u - u_0)| \, \| \rightarrow 0, \ \|u_t - u_1\| \rightarrow 0, \ t \rightarrow 0. \qquad (27)$$

Per dimostrarlo, passiamo al limite per $k \rightarrow \infty$ nella disuguaglianza

$$\| u(x, 0) - u_0(x) \| \leqslant \| u(x, 0) - u_k(x, 0) \| + \| u_{k0}(x) - u_0(x) \|$$

utilizzando le relazioni limite $u_k(x, 0) \rightarrow u(x, 0)$ ed $u_{k0}(x) \rightarrow u_0(x)$ in $\mathscr{L}_2(G)$. Come risultato, si ottiene $u(x, 0) = u_0(x)$. Da ciò, in virtù del fatto che la funzione $u(x, t)$ è continua in $\mathscr{L}_2(G)$ rispetto a $t \in [0, \infty)$, ci convinciamo che è valida la prima relazione limite (27). In modo analogo, utilizzando la proprietà b), possiamo ottenere le altre relazioni limite (27).

In quale senso la soluzione generalizzata $u(x, t)$ soddisfa la condizione di frontiera (3), sarà chiarito in seguito.

5. Unicità e dipendenza continua della soluzione generalizzata. Dimostriamo che le (12), (13) *e* (14) *restano valide anche per la soluzione generalizzata* $u(x, t)$ *del problema* (1)-(2)-(3).

Infatti, supponiamo che $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, sia una successione di soluzioni classiche del problema (1′)-(2′)-(3′) che converge alla soluzione generalizzata $u(x, t)$ nel senso della (23). Applicando alle soluzioni u_k la disuguaglianza (14), si ottiene

$$\|u_k\| \leqslant \|u_{k0}\| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\, J_k(0)\, t + \frac{1}{\rho_0}\int_0^t (t - \tau)\|F_k\|\, d\tau, \quad t \geqslant 0, \qquad (28)$$

dove

$$J_k^2(0) = \frac{1}{2}\int_G (\rho u_{k1}^2 + p\,|\operatorname{grad} u_{k0}|^2 + q u_{k0}^2)\, dx + \frac{1}{2}\int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}\, u_{k0}^2\, dS. \qquad (29)$$

Utilizzando il fatto che, in virtù delle (23) e (22) (si veda il § 33.4), si ha

$$\|u_k\| \xrightarrow[t\in[0,T]]{} \|u\|, \quad \|F_k\| \xrightarrow[t\in[0,T]]{} \|F\|, \quad T \text{ arbitrario e positivo;}$$

$$\|u_{k0} - u_0\|_C \to 0, \quad \| \,|\operatorname{grad} u_{k_0}|\,\| \,\| \,|\operatorname{grad} u_0|\,\|, \quad \|u_{k_1}\| \to \|u_1\|, \quad k \to \infty,$$

e passando al limtte nelle (28) e (29), vediamo che è valida la relazione (14).

Le (12) e (13) possono essere stabilite in modo analogo se utilizziamo le relazioni limite (25).

Dalle relazioni (12), (13) e (14), come per la soluzione classica, seguono *l'unicità della soluzione generalizzata del problema* (1)-(2)-(3) *e la sua dipendenza continua da* u_0, u_1 *e* F *nel senso del teorema del* § 33.2.

6. Esistenza di una soluzione generalizzata. Nel § 32.2, abbiamo costruito la soluzione formale del problema (1)-(2)-(3) nella forma di serie di Fourier rispetto alle autofunzioni $\{X_j\}$ dell'operatore L,

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t)\, X_j(x), \tag{30}$$

dove

$$T_j(t) = a_j \cos \sqrt{\lambda_j}\, t + b_j \sin \sqrt{\lambda_j}\, t + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t c_j(\tau) \sin \sqrt{\lambda_j}\,(t-\tau)\, d\tau, \tag{31}$$

$$a_j = (u_0, X_j)_\rho, \quad b_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, X_j)_\rho, \quad c_j(t) = (F, X_j) \tag{32}$$

Sorge il problema di precisare il metodo di Fourier, cioè di stabilire le condizioni nelle quali la serie (30) converge e dà una soluzione classica o generalizzata.

Supponiamo che $u_0 \in \mathscr{M}_L$, $u_1 \in \mathscr{L}_2(G)$ e F sia continua in $\mathscr{L}_2(G)$ rispetto a t su $[0, \infty)$. Dimostriamo che in queste condizioni la serie (30), che rappresenta la soluzione formale del problema (1)-(2)-(3), converge in $\mathscr{L}_2(G)$ uniformemente rispetto a t su $[0, T]$ per tutti i T positivi e determina la soluzione generalizzata $u(x, t)$ di questo problema.

Infatti, utilizzando i teoremi di sviluppo 1, 2 e 3 del § 21.4 (si veda l'osservazione), rappresentiamo le funzioni u_0, grad u_0 e F/ρ sotto forma di serie di Fourier nelle autofunzioni $\{X_j\}$ dell'opera-

tore L:

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j(x), \tag{33}$$

$$\text{grad } u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ grad } X_j(x), \; u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\, b_j X_j(x), \tag{34}$$

$$F(x, t) = \rho(x) \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t) X_j(x), \tag{35}$$

dove a_j, b_j e $c_j(t)$ sono definiti dalle formule (32), ed inoltre le funzioni $c_j(t)$ sono continue su $[0, \infty)$ (si veda il § 33.3). In questo caso la serie (33) converge in $C(\overline{G})$ e le serie (34) convergono in $\mathcal{L}_2(G)$.

Dimostriamo che la serie (35) converge in $\mathcal{L}_2(G)$ uniformemente rispetto a t su $[0, T]$ per ogni T positivo. Infatti, per ogni $t \in [0, \infty)$ per la funzione $F(x, t)/\rho(x)$ è valida l'uguaglianza di Parseval-Steklov (si veda il § 1.8):

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(t) = \left\| \frac{F(x, t)}{\rho(x)} \right\|_{\rho}^2 = \int_G \frac{F^2(x, t)}{\rho(x)}\, dx. \tag{36}$$

Ogni termine della serie (36) rappresenta una funzione continua non negativa $c_j^2(t)$ e questa serie converge ad una funzione continua (si veda il § 33.3). In base al lemma di Dini (si veda il § 1.3) la serie (36) converge uniformemente su ogni intervallo finito $[0, T]$. Da ciò, valutando il resto della serie (35) in $\mathcal{L}_2(G)$,

$$\|\rho(x) \sum_{j=k}^{\infty} c_j(t) X_j(x)\|^2 \leqslant \max_{x \in \overline{G}} \rho(x) \|\sum_{j=k}^{\infty} c_j(t) \sqrt{\rho(x)}\, X_j(x)\|^2 =$$

$$= \widetilde{C} \sum_{j, l=k}^{\infty} c_j(t)\, c_l(t) (X_j, X_l)_{\rho} = \widetilde{C} \sum_{j=k}^{\infty} c_j^2(t),$$

concludiamo che questa serie converge in $\mathcal{L}_2(G)$ uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$ per ogni T positivo.

Denotiamo con u_k, u_{k0}, u_{k1} e F_k le somme parziali k-esime delle serie (30), (33), (34) e (35), rispettivamente, per esempio,

$$u_k(x, t) = \sum_{j=1}^{k} T_j(t) X_j(x), \; k = 1, 2, \ldots$$

Dato che

$$T_j''(t) = -\lambda_j T_j(t) + c_j(t), \; T_j \in C^2[(0, \infty)),$$

$$LX_j = \lambda_j \rho X_j, \quad \alpha X_j + \beta \frac{\partial X_j}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad X_j \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G}),$$

le funzioni u_k appartengono a $C^2(\mathcal{Q}_\infty) \cap C^1(\overline{\mathcal{Q}}_\infty)$, soddisfano l'equazione (1')

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + Lu_k = \sum_{j=1}^{k} (\rho T_j'' X_j + T_j L X_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-\lambda_j \rho T_j X_j + \rho c_j X_j + \lambda_j \rho T_j X_j) = \rho \sum_{j=1}^{k} c_j X_j = F_k(x, t),$$

la condizione di frontiera (3') e le condizioni iniziali (2')

$$u_k|_{t=0} = \sum_{j=1}^{k} a_j X_j(x) = u_{k0}(x), \quad \frac{\partial u_k}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{\lambda_j}\, b_j X_j(x) = u_{k1}(x).$$

Dunque, abbiamo costruito la successione $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$ di soluzioni classiche del problema (1')-(2')-(3') in modo che siano valide le relazioni limite (22). Nel § 33.4 abbiamo dimostrato che questa successione (e, quindi, la serie formale (30)) convergevano in $\mathcal{L}_2(G)$ uniformemente rispetto a t su $[0, T]$, per tutti i T positivi alla soluzione generalizzata $u(x, t)$ del problema (1)-(2)-(3). La soluzione generalizzata costruita $u(x, t)$ ha le proprietà a), b) e c) stabilite nel § 33.4. Dunque, abbiamo dimostrato il seguente

Teorema. *Se u_0 appartiene a $\mathcal{M}_L$, u_1 a $\mathcal{L}_2(G)$ e se F è continua in $\mathcal{L}_2(G)$ rispetto a t su $[0, \infty)$, la soluzione formale del problema* (1)-(2)-(3) *esiste ed è rappresentata dalla serie* (30) *che è la soluzione formale di questo problema.*

Osservazione. Per $n = 1$ è valido il *teorema d'inclusione, e cioè: se $f' \in \mathcal{L}_2(0, l)$, $f \in C(0, l])$ e si ha*

$$\|f\|_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{l}} \|f\| + \sqrt{l}\, \|f'\|. \qquad (*)$$

Infatti, dall'uguaglianza

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(x')\, dx', \quad x_0 \in [0, l]$$

segue che $f \in C([0, l])$. Partendo da questo fatto e scegliendo il punto $x_0 \in [0, l]$ tale che

$$|f(x_0)| = \frac{1}{l} \int_0^l |f(x')|\, dx'.$$

ed utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij, si ottiene (*):

$$|f(x)| \leqslant |f(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |f'(x')|\,dx' \leqslant \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l |f(x')|\,dx' +$$

$$+ \int_0^l |f(x')|\,dx' \leqslant \frac{1}{\sqrt{l}} \|f\| + \sqrt{l}\,\|f'\|, \quad x \in [0,\ l].$$

Utilizzando questo teorema e le disuguaglianze (13) e (14), si possono rafforzare i risultati dei §§ 33.2, 33.4 e 33.6, ed in particolare: *la successione* $u_k(x, t)$, $k \to \infty$ *converge uniformemente su qualunque* $\overline{\Pi}_T = [0, l] \times [0, T]$ *alla soluzione generalizzata* $u(x, t)$ *che è continua su* Π_∞.

7. Esistenza della soluzione classica. Sorge il problema: stabilire con quali condizioni la soluzione generalizzata (30) del problema (1)-(2)-(3) è una soluzione classica. È facile convincersi del fatto che la serie (30) rappresenta la soluzione classica di questo problema se questa serie e le serie ottenute mediante derivazione, per una sola volta rispetto a tutti gli argomenti, convergono uniformemente in ogni cilindro finito $\overline{\Pi}_T$, mentre le serie ottenute mediante la derivazione reiterata convergono uniformemente su ogni compatto appartenente a Π_∞. Al contrario, è molto difficile dimostrare la possibilità di derivare termine a termine la serie (30) nel caso generale. Ci limitiamo perciò a considerare il seguente problema misto a due variabili (x, t) nella semibanda $\Pi_\infty = (0, l) \times (0, \infty)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu, \tag{37}$$

$$u\,|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\,|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{38}$$

$$h_1 u - h_2 u_x\,|_{x=0} = H_1 u + H_2 u_x\,|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{39}$$

Supponiamo che tutti i λ_k siano positivi. Le autofunzioni $\{X_k\}$ formano un sistema ortonormale completo in $\mathfrak{L}_2(0, l)$ (si veda il § 22.3) e soddisfano l'equazione integrale (si veda il § 22.2)

$$X_k(x) = \lambda_k \int_0^l \mathcal{G}(x, y)\, X_k(y)\,dy, \tag{40}$$

dove $\mathcal{G}(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L (si veda il § 22.1). In base al teorema di Mercer (si veda il § 20.9), si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k(x)|^2}{\lambda_k} = \mathcal{G}(x, x), \tag{41}$$

ed inoltre la serie (41) converge uniformemente su $[0, l]$.

Dimostriamo la convergenza uniforme su $[0, l]$ delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k'(x)|^2}{\lambda_k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k''(x)|^2}{\lambda_k^3}. \tag{42}$$

La convergenza uniforme della prima serie (42) segue dall'equazione integrale (40)

$$\frac{X_k'(x)}{\lambda_k} = \int_0^l \mathcal{G}_x(x, y) X_k(y)\, dy = (\mathcal{G}_x, X_k),$$

dall'uguaglianza di Parseval-Steklov (si veda il § 1.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k'(x)|^2}{\lambda_k^2} = \|\mathcal{G}_x\|^2 = \int_0^l |\mathcal{G}_x(x, y)|^2\, dy$$

e dal lemma di Dini (si veda il § 1.3). (In virtù delle proprietà della funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ l'ultimo integrale è una funzione continua su $[0, l]$. La convergenza uniforme della seconda serie (42) deriva da quella della prima serie (42) e della serie (41), nonché dall'equazione differenziale

$$X_k''(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)} X_k'(x) + \frac{q(x) - \lambda_k}{p(x)} X_k(x).$$

Per il problema (37)-(38)-(39) scriviamo la serie (30) che rappresenta la soluzione generalizzata di questo problema (si veda il § 33.6):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x), \tag{43}$$

$$a_k = (u_0, X_k), \quad b_k \sqrt{\lambda_k} = (u_1, X_k). \tag{44}$$

Dimostriamo all'inizio che *se* $u_0 \in \mathcal{M}_L$ *ed* $u_1 \in \mathcal{L}_2(0, l)$, *la serie* (30) *converge uniformemente su* $\overline{\Pi}_\infty$ (*ad una funzione* $u(x, t)$ *continua su* $\overline{\Pi}_\infty$).

Infatti, visto che $u_0 \in \mathcal{M}_L$, si ha $Lu_0 \in \mathcal{L}_2(0, l)$ e

$$\lambda_k (u_0, X_k) = (u_0, LX_k) = (Lu_0, X_k).$$

Da ciò, tenendo conto delle notazioni (44), in virtù dell'uguaglianza di Parseval-Steklov (si veda il § 1.8), si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k|^2 = \|Lu_0\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k|^2 = \|u_1\|^2. \tag{45}$$

Applicando alla (43) la disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij e tenendo conto della convergenza uniforme della serie (41) e della con-

vergenza delle serie (45), stabiliamo la convergenza regolare della serie (43) su $\overline{\Pi}_\infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos \sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k}t|\, |X_k(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)\, |X_k(x)| \leqslant \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k|^2} \right] \times \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k(x)|^2}{\lambda_k} \right]^{1/2}.$$

Dimostriamo ora il teorema sull'esistenza della soluzione classica del problema (37)-(38)-(39).

Teorema. *Se* u_0, Lu_0 *ed* u_1 *appartengono a* $\mathscr{M}_L$, *la serie* (30) *rappresenta la soluzione classica del problema* (37)-(38)-(39), *ed inoltre* $u \in C^2$ $(\overline{\Pi}_\infty)$.

Dimostrazione. In virtù delle condizioni del teorema, come nella (45), si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 |a_k|^2 = \|L^2 u_0\|^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 |b_k|^2 = \|Lu_1\|^2. \tag{46}$$

Dalla convergenza delle serie (46) e dalla convergenza uniforme delle serie (41) e (42) segue la convergenza regolare su $\overline{\Pi}_\infty$ della serie (43) e di tutte le serie ottenute per derivazione, termine a termine rispetto a x e t, una e due volte. Il teorema è dimostrato.

Osservazione. La prima argomentazione rigorosa del metodo di Fourier per due variabili è stata formula da Steklov [1]; per il caso di più variabili, si veda Ladyženskaja [1].

§ 34. *Problema misto per un'equazione di tipo parabolico*

In questo paragrafo sarà considerato il seguente problema misto per un'equazione di tipo parabolico (si veda il § 4.5):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) = -Lu + F(x, t), \tag{1}$$

$$(x, t) \in \Pi_\infty = G \times (0, \infty);$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \overline{G}; \tag{2}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = v(x, t), \quad (x, t) \in S \times [0, \infty) \tag{3}$$

nelle condizioni del § 32.

1. Soluzione classica. Principio del massimo. La funzione $u(x, t)$ della classe $C^2(\Pi_\infty) \cap C(\overline{\Pi}_\infty)$, $\operatorname{grad}_x u \in C(\overline{\Pi}_\infty)$, che soddisfa l'equazione (1) nel cilindro Π_∞, la condizione iniziale (2) e la condizione di frontiera (3), è detta *soluzione classica* del problema misto (1)-(2)-(3).

Le condizioni necessarie per l'esistenza di una soluzione classica del problema (1)-(2)-(3) sono le seguenti:
la condizione di regolarità

$F \in C(\Pi_\infty)$, $u_0 \in C^1(\overline{G})$, ($v$ sono continue a tratti su $S \times [0, \infty]$
e la condizione di concordanza

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_S = v(x, 0).$$

Nello studio dei problemi al contorno per equazioni di tipo parabolico è molto utile il seguente

Principio del massimo. *Supponiamo che la funzione $u(x, t)$ della classe $C^2(x \in G, 0 < t \leqslant T) \cap C(\overline{\Pi}_T)$ soddisfi l'equazione (1) in Π_T. Allora, se $F(x, t) \leqslant 0$ nel cilindro Π_T, si ha o $u \leqslant 0$ su $\overline{\Pi}_T$ o la funzione $u(x, t)$ assume il suo massimo (positivo) su $\overline{\Pi}_T$ sulla base inferiore $\overline{G} \times \{0\}$ o sulla superficie laterale $S \times [0, T]$, e cioè:*

$$u(x, t) \leqslant \max\Big[0, \max_{x \in \overline{G},\ t=0} u(x, t), \max_{x \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant T} u(x, t)\Big], \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_T. \tag{4}$$

Dimostrazione. Supponiamo il contrario, cioè che la funzione $u(x, t)$ assuma valori positivi in certi punti del cilindro $\overline{\Pi}_T$, ma senza raggiungere il suo massimo (positivo) né sulla sua base inferiore $\overline{G} \times \{0\}$, né sulla superficie laterale $S \times [0, T]$. Ciò significa che esiste un punto (x_0, t_0), $x_0 \in G$, $0 < t_0 \leqslant T$, tale che

$$u(x_0, t_0) > \max\Big[0, \max_{x \in \overline{G},\ t=0} u(x, t), \max_{x \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant T} u(x, t) = M > 0. \tag{5}$$

Introducendo

$$\varepsilon = u(x_0, t_0) - M > 0, \tag{6}$$

costruiamo la funzione

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{T - t}{T}.$$

Si ha allora

$$v(x, t) \leqslant u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_T$$

e, in virtù della (6), per tutte le (x, t) che appartengono a $\overline{G} \times \{0\}$ o a $S \times [0, T]$ abbiamo

$$v(x_0, t_0) \geqslant u(x_0, t_0) = \varepsilon + M \geqslant \varepsilon + u(x, t) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon + v(x, t) - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + v(x, t).$$

Ne segue che la funzione v assume anch'essa il suo valore massimo (positivo) su $\overline{\Pi}_T$ ad un certo punto (x', t'), $x' \in G$, $0 < t' \leqslant T$, ed inoltre

$$v(x', t') \geqslant v(x_0, t_0) \geqslant \varepsilon + M. \tag{7}$$

Scriviamo le condizioni necessarie di un massimo di v nel punto (x', t'):

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0, \quad \operatorname{grad} v = 0, \quad \Delta v \leqslant 0.$$

Da queste condizioni nonché dalla disuguaglianza (7) segue che in questo punto si ha

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu - F =$$

$$= \rho \frac{\partial v}{\partial t} - p\Delta v - (\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} v) + qv - F + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\rho}{T} - q\frac{T-t'}{T}\right) \geqslant$$

$$\geqslant qv + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\rho}{T} - q\frac{T-t'}{T}\right) = q\varepsilon\left(1 - \frac{T-t'}{2T}\right) + \frac{\varepsilon\rho}{2T} > 0,$$

il che contraddice l'equazione (1). Ciò significa che la disuguaglianza (5) non è valida e, di conseguenza, è valida la disuguaglianza opposta (4), come volevasi dimostrare.

Sostituendo u con $-u$ e F con $-F$, dal principio del massimo si ottiene

P r i n c i p i o d e l m i n i m o: *se la funzione* $u(x, t)$ *della classe* C^2 $(x \in G, \ 0 < t \leqslant T) \cap C(\overline{\Pi}_T)$ *soddisfa l'equazione* (1) *in* Π_T *e* $F \geqslant 0$ *in* Π_T, *è valida la seguente disuguaglianza*:

$$u(x, t) \geqslant \min[0, \min_{x \in \overline{G},\ t=0} u(x, t), \min_{x \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant T} u(x, t)]. \tag{4'}$$

2. Unicità e dipendenza continua della soluzione classica. Applichiamo i principi del massimo e del minimo per stabilire l'unicità e la dipendenza continua della soluzione classica del problema misto (1)-(2)-(3) di prima specie, cioè il caso in cui, nella condizione di frontiera (3), si abbia $\alpha = 1$ e $\beta = 0$:

$$u|_S = v(x, t), \quad (x, t) \in S \times [0, \infty). \tag{3$_1$}$$

(La condizione $\operatorname{grad}_x u \in (\overline{\Pi}_\infty)$ per i problemi al contorno di prima specie è superflua; si veda l'osservazione del § 4.5).

Supponiamo che $u(x, t)$ sia una soluzione classica del problema (1)-(2)-(3$_1$) e $F \in C(\overline{\Pi}_\infty)$. Fissiamo $T > 0$ ed introduciamo le notazioni

$$M = \|F\|_{\Pi\overline{C}_{(T)}}, \quad M_1 = \|v\|_{C(S \times [0,\ T])}, \quad M_0 = \|u_0\|_{C(\overline{G})}.$$

Costruiamo la funzione

$$\chi(x, t) = u(x, t) - \frac{M}{\rho_0} t, \quad \rho_0 = \min_{x \in \overline{G}} \rho(x) > 0. \tag{8}$$

La funzione χ è la soluzione classica del problema misto (1)-(2)-(3_1) con la sostituzione di F e v con $F - \rho M/\rho_0 - qMt/\rho_0$ e $v - Mt/\rho_0$, rispettivamente. Tenendo conto del fatto che

$$F - \frac{\rho}{\rho_0} M - \frac{q}{\rho_0} Mt \leqslant 0, \quad (x,\ t) \in \overline{\Pi}_T;$$

$$v - \frac{M}{\rho_0} t \leqslant M_1, \quad (x,\ t) \in S \times [0,\ T],$$

ed utilizzando la disuguaglianza (4), si ottiene la disuguaglianza

$$\chi \leqslant \max\ (M_0,\ M_1),$$

cioè, in virtù della (8), si ha

$$u\,(x,\ t) \leqslant \frac{M}{\rho_0} T + \max\,(M_0,\ M_1),\ (x,\ t) \in \overline{\Pi}_T.$$

In modo analogo, introducendo la funzione

$$\chi_1\,(x,\ t) = u\,(x,\ t) + \frac{M}{\rho_0} t$$

ed utilizzando la disuguaglianza (4'), si ottiene la disuguaglianza opposta:

$$u\,(x,\ t) \geqslant -\frac{M}{\rho_0} T - \max\,(M_0,\ M_1),\ (x.\ t) \in \overline{\Pi}_T.$$

Dunque, *se $u\ (x,\ t)$ è la soluzione classica del problema* (1)-(2)-(3_1) *e F appartiene a $C\ (\overline{\Pi}_\infty)$, per ogni T positivo è valida la relazione*

$$\|u\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leqslant \max\,[\|u_0\|_{C(\overline{G})},\ \|v\|_{C(S\times[0,\ T])}] + \frac{T}{\rho_0} \|F\|_{C(\overline{\Pi}_T)}. \tag{9}$$

Utilizzando la relazione ottenuta, dimostriamo il seguente

Teorema. *La soluzione classica del problema* (1)-(2)-(3_1) *è unica e dipende con continuità da u_0, v e F nel senso che se*

$$\begin{cases} \|F - \widetilde{F}\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leqslant \varepsilon,\ \|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{C(\overline{G})} \leqslant \varepsilon_0 \\ \|v - \widetilde{v}\|_{C(S\times[0,\ T])} \leqslant \varepsilon_1, \end{cases} \tag{10}$$

le corrispondenti soluzioni (classiche $u\ (x,\ t)$ ed $\widetilde{u}\ (x,\ t)$ soddisfano la disuguaglianza

$$\|u - \widetilde{u}\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leqslant \max\,(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1) + \frac{T}{\rho_0} \varepsilon. \tag{11}$$

Dimostrazione. L'unicità segue dal fatto che, in virtù della (9), il problema omogeneo (1)-(2)-(3_1) (per $u_0 = 0$, $v = 0$ e $F = 0$) ha soltanto una soluzione classica nulla (si veda il § 1.11).

Per dimostrare la dipendenza continua costruiamo la differenza $\eta = u - \widetilde{u}$. La funzione η è la soluzione classica del problema (1)-(2)-(3_1) con la sostituzione di F, u_0 e v con $F - \widetilde{F}$, $u_0 - \widetilde{u}_0$ e $v - \widetilde{v}$,

rispettivamente. Applicando la disuguaglianza (9) alla funzione η ed utilizzando le (10), si ottiene la disuguaglianza (11). Il teorema è dimostrato.

3. Soluzione generalizzata. Come per l'equazione di tipo iperbolico. introduciamo il concetto di soluzione generalizzata.

Supponiamo che le funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ siano continue su S.

Supponiamo inoltre che esistano successioni composte di funzioni $F_k \in C(\overline{\Pi}_\infty)$, $v_k \in C(S \times [0, \infty))$ ed $u_{k0} \in C(\overline{G})$, $k = 1, 2, \ldots$, tali che 1) per $k \to \infty$ si abbia

$$\begin{cases} F_k \to F \text{ in } C(\overline{\Pi}_T),\ v_k \to v \text{ in } C(S \times [0, T]) \\ \text{per qualunque } T > 0;\ u_{k0} \to u_0 \text{ in } C(\overline{G}); \end{cases} \tag{12}$$

2) per ogni $k = 1, 2, \ldots$ esista una soluzione classica del problema misto

$$\rho \frac{\partial u_k}{\partial t} = -Lu_k + F_k(x, t). \tag{1'}$$

$$u_k|_{t=0} = u_{k0}(x), \tag{2'}$$

$$\alpha u_k + \beta \frac{\partial u_k}{\partial n}\Big|_S = v_k(x, t). \tag{3'}$$

Supponiamo che esista una funzione $u(x, t)$ continua sul cilindro $\overline{\Pi}_\infty$ e tale che per qualunque $T > 0$ si abbia

$$u_k \to u, \quad k \to \infty \text{ in } C(\overline{\Pi}_T). \tag{13}$$

La funzione $u(x, t)$ è detta allora *soluzione generalizzata* del problema (1)-(2)-(3).

Dalla definizione di soluzione generalizzata del problema (1)-(2)-(3) segue (cfr. il § 33.4) che ogni soluzione classica di questo problema è la sua soluzione generalizzata; per verificare l'esistenza della soluzione generalizzata sono necessarie le seguenti condizioni: $F \in C(\overline{\Pi}_\infty)$, $v \in C(S \times [0, \infty))$, $u_0 \in C(\overline{G})$; la soluzione generalizzata soddisfa la condizione iniziale (2); la soluzione generalizzata soddisfa l'equazione (1) nel senso generalizzato, cioè per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Pi_\infty)$ è verificata la relazione integrale

$$\int u(x, t) \left(-\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L\varphi \right) dx\, dt = \int F(x, t)\, \varphi\, dx\, dt. \tag{14}$$

Dimostriamo che, per il problema al contorno (1)-(2)-(3_1), la soluzione $\{u_k\}$ è uniformemente convergente su ogni $\overline{\Pi}_T$.

Infatti, applicando la disuguaglianza (9) alla differenza $u_k - u_p$, per tutti i $T > 0$, si ottiene

$$\|u_k - u_p\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \max \|u_{k0} - u_{p0}\|_{C(\overline{G})},\ \|v_k - v_p\|_{C(S \times [0, T])} + \frac{T}{\rho_0} \|F_k - F_p\|_{C(\overline{\Pi}_T)};$$

da cui, in virtù della (12), segue che la successione $\{u_k\}$ è convergente in se stessa in $C(\overline{\Pi}_T)$. Perciò esiste una funzione $u(x, t)$ continua su $\overline{\Pi}_\infty$ e tale che la successione $\{u_k\}$ converge ad u in $C(\overline{\Pi}_T)$ per ogni $T > 0$ (si veda il § 1.3).

Dimostriamo che la (9) resta valida anche per la soluzione generalizzata $u(x, t)$ del problema (1)-(2)-(3_1).

Infatti, supponiamo che $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, sia una successione di soluzioni classiche del problema (1)-(2)-(3_1) convergente in modo uniforme alla soluzione generalizzata $u(x, t)$ su ogni cilindro $\overline{\Pi}_T$. Applicando alle soluzioni u_k la (9), per tutti i T positivi otteniamo

$$\|u_k\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leqslant \max\left[\|u_{k0}\|_{C(\overline{G})}, \|v_k\|_{C(S\times[0,T])} + \frac{T}{\rho_0}\|F_k\|_{C(\Pi_T)}\right]. \tag{15}$$

Tenendo conto delle relazioni limite (12) e (13) e passando al limite nella disuguaglianza (15), per $k \to \infty$, ci convinciamo del fatto che la disuguaglianza (9) è valida.

Dalla (9) seguono *l'unicità della soluzione generalizzata del problema* (1)-(2)-(3_1) *e la sua dipendenza continua da* u_0, v *e* F *nel senso del teorema del* § 34.2.

4. Esistenza della soluzione generalizzata. Dimostriamo l'esistenza della soluzione generalizzata per il problema misto (1)-(2)-(3) per $F = 0$ e $v = 0$:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0. \tag{16}$$

Nel § 32.3 abbiamo costruito la soluzione formale del problema (16) nella forma di una serie di Fourier nel sistema di autofunzioni $\{X_j\}$ dell'operatore L:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t} X_j(x), \quad a_j = (u_0, X_j)_\rho. \tag{17}$$

Supponiamo che u_0 appartenga a $\mathscr{M}_L$. Dimostriamo che, in questo caso, la serie (17) che rappresenta la soluzione formale del problema (16) è uniformemente convergente su $\overline{\Pi}_\infty$ e determina la soluzione generalizzata $u(x, t)$ di questo problema.

Infatti, utilizzando il teorema di sviluppo 1 del § 21.4 (si veda l'osservazione), rappresentiamo la funzione u_0 nella forma di una serie di Fourier convergente in modo uniforme su $\overline{G}$ nel sistema di autofunzioni dell'operatore L:

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j(x). \tag{18}$$

Denotiamo con u_k ed u_{k0} le somme parziali delle serie (17) e (18), rispettivamente. Le funzioni u_k, $k = 1, 2, \ldots$, sono soluzioni classiche del problema (16), sostituendo u_0 con u_{k0}, ed inoltre $u_{k0} \to$

$\to u_0$, $k \to \infty$ in $C(\overline{G})$. Visto che tutti i λ_j sono positivi, la serie composta da tutti i valori assoluti dei termini della (17) è maggiorata su $\overline{\Pi}_\infty$ mediante una serie convergente in modo uniforme su $\overline{G}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j e^{-\lambda j t} X_j(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a_j x_j(x)|.$$

Per questa ragione la successione $\{u_k\}$ converge in modo uniforme su $\overline{\Pi}_\infty$ alla soluzione generalizzata $u(x, t)$ del problema (16). Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema. *Se u_0 appartiene a $\mathscr{M}_L$, la soluzione generalizzata del problema* (16) *esiste ed è rappresentata dalla serie* (17) *che è la soluzione formale di questo problema, convergente in modo uniforme su $\overline{\Pi}_\infty$.*

5. Esistenza della soluzione classica. Come nel § 33.7, ci limitiamo alla considerazione di un problema misto a due variabili (x, t) nella semibanda $\Pi_\infty = (0, l) \times (0, \infty)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu, \tag{19}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{20}$$

$$h_1 u - h_2 u_x|_{x=0} = H_1 u + H_2 u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{21}$$

Teorema. *Se u_0 appartiene a $\mathscr{M}_L$, la serie* (17) *fornisce la soluzione classica $u(x, t)$ del problema* (19)-(20)-(21) *la quale è infinitamente derivabile rispetto a t per $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$.*

Dimostrazione. Conformemente al teorema del § 34.4, u appartiene a $C(\overline{\Pi}_\infty)$. Inoltre, utilizzando la convergenza uniforme della serie (41) e (42) del § 33.7, e la convergenza della prima serie dalla (45) del § 33.7, come nel § 33.7, possiamo stabilire la convergenza regolare delle serie

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t} X_j^{(k)}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t \geqslant 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (-\lambda_j)^k e^{-\lambda_j t} X_j(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t \geqslant \varepsilon$$

(per qualunque ε positivo). In questo caso si deve tener conto del fatto che le grandezze $\lambda_j^k e^{-\lambda_j t}$ sono uniformemente limitate per $j = 1, 2, \ldots, t \geqslant \varepsilon$. Il teorema è dimostrato.

Bibliografia

Antosik I., Mikusinski J., Sikorski R.
[1] *Theory of Distributions: The Sequential Approach*, Elsevier, Amsterdam, 1973.

Arsenin V. Ja.
[1] *Metodi di fisica matematica e funzioni speciali*, Nauka, Mosca, 1974. (Trad. in inglese: Iliffe, London, 1968.)

Beklemišev D. V.
[1] *Corso di geometria analitica e di algebra lineare*, Nauka, Mosca, 1980 (in russo).

Bitsadze A. V.
[1] *Equazioni di fisica matematica*, Nauka, Mosca, 1976. (Trad. in inglese: Mir Publishers, Moscow, 1980.)

Blochintsev D. I.
[1] *Fondamenti di meccanica quantistica*, Nauka, Mosca, 1976. (Trad. in inglese: Reidel, Dordrecht, 1984).

Bogoljubov N. M., Logunov A. A. e Todorov I. T.
[1] *Fondamenti di approccio assiomatico nella teoria quantistica dei campi*, Nauka, Mosca 1969. (Trad. in inglese: Benjamin, Reading, Mass., 1975.)

Bogoljubov N. N. e Širkov D. V.
[1] *Introduzione alla teoria dei campi quantizzati*, Nauka, Mosca, 1976. (Trad. in inglese: Wiley, New York, 1979.)

Bremermann H.
[1] *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.

Bryčkov Ju. A. e Prudnikov A. P.
[1] *Trasformazioni integrali di funzioni generalizzate*, Nauka, Mosca, 1967 (in russo).

Budak B. M., Samarskij A. A. e Tichonov A. N.
[1] *Problemi della fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1982.

Courant R. e Hilbert D.
[1] *Methods of Mathematical Physics*, 2 vols., Interscience, New York (1953, 1962).

Dirac P. A. M.
[1] *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed., Clarendon Press, Oxford, 1958.

Ditkin V. A. e Prudnikov A. P.
[1] *Calcolo operatorio*, Vyšaja Škola, Mosca, 1975 (in russo).

Evgrafov M. A.
[1] *Funzioni analitiche*, Nauka, Mosca, 1968. (Trad. in inglese: Saunders, Philadelfia, 1966.)

Fichtengolts G. M.
[1] *Corso di calcolo integrale e differenziale*, 3 volumi, Nauka, Mosca, 1970 (in russo).

Gelfand I. M. Šilov G. E.
[1] *Funzioni generalizzate*, volumi 1-3, Fizmatgiz, Mosca (1959, 1958,). (Trad. in inglese: Academic Press, New York, 1964, 1968, 1967.)
Gradštein I. S. e Ryžik I. M.
[1] *Tavole di integrali, di somme, di serie e di prodotti*, Nauka, Mosca 1971. (Trad. in inglese: Academic Press, New York, 1966.)
Hadamard J.
[1] *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations*, Dover, New York, 1952.
Hörmander L.
[1] *Linear Partial Differential Operators*, Springer, West Berlin, 1963.
[2] «*On the division of distributions by polynomials*», Ark. Mat. 3, 558-568, 1958.
Il'in V. A.
[1] *Risolvibilità di problemi misti per le equazioni parabolici ed iperbolici*, Uspechi Mat. Nauk XV, n. 2, 97-154, 1960 (in russo).
Jost R.
[1] *The General Theory of Quantized Fields*, American Mathematical Society, Providens, R. J., 1965.
Kolmogorov A. N. e Fomin S. V.
[1] *Elementi di teoria delle funzioni e dell'analisi funzionale*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.
Košljakov N. S., Gliner E. B. e Smirnov M. M.
[1] *Equazioni alle derivate parziali della fisica matematica*, Vyssaja Škola, Mosca, 1970. (Trad. in inglese: North-Holland, Amsterdam, 1964).
Kudrjavtsev L. D.
[1] *Fondamenti di analisi matematica*, 2 volumi, Vyssaja Škola, Mosca, 1981 (in russo).
Ladyženskaja O. A.
[1] *Problemi al contorno della fisica matematica*, Nauka, Mosca, 1973 (in russo).
Lavrentiev M. M.
[1] *Di alcuni problemi non corretti della fisica matematica*, Casa editrice del filiale di Siberia dell'Accademia delle Scienze dell'URSS, Novosibirsk, 1962. (Trad. in inglese: Springer, West Berlin, 1967.)
Lavrentiev M. M. e Šabat B. V.
[1] *Metodi di teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Nauka, Mosca, 1973 (in russo).
Lions J.-L.
[1] «Supports dans la trasformation de Laplace», *J. Analyse Math.* 2, 369-380, 1953.
Ljapunov A. M.
[1] *Opere scelte*, Casa editrice dell'Accademia delle scienze dell'URSS, Mosca, 1954 (in russo).
Maltsev A. I.
[1] *Fondamenti di algebra lineare*, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Mosca, 1980.
Marčuk G. I.
[1] *Metodi di calcolo dei reattori nucleari*, Gosatomizdat, Mosca, 1961. (Trad. in inglese: Consultants Bureau, New York, 1959.)
Messiah A.
[1] *Quantum Mechanics*, vol. 1, Wiley, New York, 1968.
Michajlov V. P.
[1] *Equazioni differenziali alle derivate parziali*, Edizioni Mir, Mosca, 1984.
Michlin S. G.
[1] *Corso di fisica matematica*, Nauka, Mosca, 1968. (Trad. in inglese: North-Holland, Amsterdam, 1970.)
Nikiforov A. F. ed Uvarov V. B.
[1] *Funzioni speciali della fisica matematica*, Nauka, Mosca, 1978 (in russo).

Nikolskij S. M.
[1] *Corso di analisi matematica*, 2 volumi, Edizioni Mir, Mosca, 1985.
Petrovskij I. G.
[1] *Lezioni sulle equazioni alle derivate parziali*, Nauka, Mosca, 1970. (Trad. in inglese: Wiley-Interscience, New York, 1955.)
[2] *Lezioni sulla teoria delle equazioni integrali*, Nauka, Mosca, 1965. (Trad. in inglese: Mir Publishers, Moscow, 1971; ristampa 1975.)
Položij G. M.
[1] *Equazioni della fisica matematica*, Vyššaja Škola, Mosca, 1964 (in russo).
Pontrjaghin L. S.
[1] *Equazioni differenziali ordinarie*, Nauka, Mosca, 1974. (Trad. in inglese: Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.)
Riesz F. e Nagy B. Sz.
[1] *Lectures on Functional Analysis*, Ungar, New York, 1955.
Schwartz L.
[1] *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1961.
[2] *Théorie des distributions*, 2 vols., Hermann, Paris, 1966.
[3] «Trasformation de Laplace des distributions», *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.* (*Supplementband*) 196-206, 1952.
Sidorov Ju. V., Fedorjuk M. V. e Šabunin M. J.
[1] *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Nauka, Mosca, 1982. (Trad. in inglese: Mir Publishers, Moscow, 1985).
Šilov G. E.
[1] *Analisi matematica. Secondo corso speciale*, Nauka, Mosca, 1963 (in russo).
Smirnov M. M.
[1] *Problemi delle equazioni della fisica matematica*, Nauka, Mosca, 1975. (Trad. in inglese: Noordhoff, Groningen, 1966.)
Smirnov V. I.
[1] *Corso di matematica superiore*, vol. II, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Mosca, 1977.
[2] *Corso di matematica superiore*, vol. IV, 1 parte, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Mosca, 1979.
[3] *Corso di matematica superiore*, vol. III, 2 parte, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Mosca, 1978.
Sobolev S. L.
[1] *Equazioni di fisica matematica*, Nauka, Mosca, 1966. (Trad. in inglese: Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.)
[2] *Méthode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy puor les équations linéaires hyperboliques normales*, Mat. Sb. 1(43), 39-72, 1936.
Sochotskij J. W.
[1] *Sugli integrali definiti utilizzati negli sviluppi in serie*, Casa editrice Staljusevič, St. Petersburg, 1873 (in russo).
Steklov V. A.
[1] *Problemi fondamentali della fisica matematica*, 2 volumi, Petrograd, 1922-1923 (in russo).
Stepanov V. V.
[1] *Corso di equazioni differenziali*, Fizmatghiz, Mosca, 1959 (in russo).
Streater R. F. e Wightman A. S.
[1] PCT, *Spin and Statistics and All That*, Benjamin, New York, 1964.
Tichonov A. N.
[1] *Sui metodi di risoluzione dei problemi posti in modo non corretto*, in: Proc. Internat. Congr. Math. (Moscow, 1966), Mir Publishers, Moscow, 720-722, 1968.
[2] *Théoremes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Mat. Sb., 42, 199-216, 1935.
Tichonov A. N. ed Arsenin V. Ja.
[1] *Metodi di risoluzione dei problemi non corretti*, Nauka, Mosca, 1974. (Trad. in inglese: Wiley, New York, 1977.)

Tichonov A. N., Ivanov V. K. e Lavrentiev M. M.
[1] *Problemi posti in modo non corretto*, in: Equazioni differenziali alle derivate parziali, Nauka, Mosca, 1970, 224-234, (in russo).
Tichonov A. N. e Samarskij A. A.
[1] *Equazioni della fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.
Vekua I. M.
[1] *Funzioni analitiche generalizzate*, Fizmatghiz, 1959. (Trad. in inglese: Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.)
[2] *Sulle funzioni metaarmoniche*, in: Opere dell'Ist. di mat. di Tbilissi XII, 105-174, 1943 (in russo).
Vladimirov V. S.
[1] *Problemi matematici della teoria ad una velocità di trasporto di particelle*, in: Opere dell'Ist. di mat. di V. A. Steklov, **61**, 3-158, 1961 (in russo).
[2] *Metodi di teoria delle funzioni di più variabili complesse*, Nauka, Mosca, 1964. (Trad. in inglese: M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1966.)
[3] *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.
Vladimirov V. S., Michajlov V. P., Vašarin A. A., Karimova Ch. K, Sidorov Ju. V. e Šabunin M. I.
[1] *Manuale di problemi delle equazioni della fisica matematica*, Nauka, Mosca, 1982 (in russo).
Whitham G. B.
[1] *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, 1974.
Zemanian A. H.
[1] *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGrow-Hill, New York, 1965.

Indice analitico

Algebra 125
  di convoluzione $\mathscr{D}_+^1$ 125
  $\mathscr{D}'$ (a) 155
  $\mathcal{G}$ 139
  H (a) 160
Alternativa di Fredholm 258, 261
Ammettenza 165
Antinodi 411
Autofunzioni 39, 238, 287
Autovalori 39, 287

Calcolo operazionale 155
Coefficienti di Fourier 31
Condizioni
  di frontiera 44, 63
  di radiazione di Sommerfeld 48, 381
  iniziali 44, 63
Coni di futuro e di passato 56
Cono caratteristico 55
Contorno vibrazionale 164
Convergenza
  debole 80
  in C (T) 18
Convergenza
  in $\mathscr{D}$ 76
  in $\mathscr{D}'$ 80
  in $\mathscr{L}_2$ (G) 30
  in $\mathcal{G}$ 132
  in $\mathcal{G}'$ 133
  in se stessa 18
  nella media 30
  uniforme 18
Convoluzione 116, 119, 138
Curva caratteristica 55

Dati di Cauchy 64
Derivata 92
  normale regolare 316
Diffusione di onde 204, 205,
Distribuzione 87
Disuguaglianza
  di Bessel 32
  di Cauchy-Bunjakovskij 29
  di Harnack 379
  di Minkowski 30

Elemento locale 84
Equazione (i)
  caratteristica 55
  del telegrafista 50
  di Bessel 301
  di Burgers 236
  di Čaplyghin 69
  di chiusura 32
Equazione (i)
  di conduzione termica 46
  di continuità 49
  di diffusione 45, 47
  di dinamica dei fluidi 49
  di Dirac 51
  dell'elettrostatica 50
  del moto di Eulero 49
  di Helmholtz 47, 380
  di Klein-Gordon-Fock 51
  di Korteweg-de Vries 216
  di Laplace 47
  di Louville 216
  della magnetostatica 50
  di Maxwell 49
  d'onda 44-46
  di Poisson 47
  di Schrödinger 50, 408
  di sine-Gordon 216
  di stato 49
  di tipo ellitico 53, 58, 60
  di tipo iperbolico 53, 58, 61
    normale 53
  di tipo misto 54
  di tipo parabolico 53, 58, 60
    normale 53
  del trasporto (o cinetica) 48
  di Tricomi 61
  di vibrazioni 42
  di Volterra 244
  ellittica 409
  integrale
    aggiunta 237

Equazione (i)
integrale -
con nucleo degenere 251
con nucleo hermitiano 264
con nucleo polare 246
di Fredholm 237
aggiunta 237
omogenea 237
di Milne 250
di Peierls 251
di Volterra 244
lineare 38
Esempio di Hadamard 72

Formula (e)
di Cauchy 401
di Cauchy-Green 401
di D'Alembert 199, 211
di Green 221, 314
prima 287
seconda 288
di Kirchhoff 199
di Laplace 337
di Leibniz 94
di Pizzetti 108
di Poisson 150, 374
di Rodrigues 329
di Schmidt 275
di Sochozki 88
di somma per i polinomi di Legendre 337
Formula (e)
di sommatoria di Poisson 150
Frequenze proprie 405
Funzionale lineare 36
Funzione (i)
armonica 314
generalizzata 322
beta 108
cilindrica 301, 312
d'argomento immaginario 312
delta di Dirac 75, 97
di Bessel 302
completezza di 310
ortogonalità di 303
radici di 306
relazioni di ricorrenza di 305
di Green del problema di Dirichlet 368, 398
di problema di Sturm-Liouville 296, 297
di Hankel 312
d'influenza 170
di Legendre associate 333
di Neumann 312
di Riemann 222
finita 18, 84
fondamentali 76, 132
gamma 105
generalizzata 73, 79
di crescita lenta 132
finita 84
primitiva 95
regolare 85
singolare 85, 86
generatrice 332
misurabile 19
normalizzata 30
sferiche 327, 335
completezza di 333, 335
Funzione (i)
sferiche
ortogonalità di 330, 335
solide 338
sommabile 21

Immagine 157
Impedenza 165
Insieme zero 84
Integrale
di Duhamel 164
d'energia 289, 417
di Eulero 105, 108
di Gauss 347
di Fresnel 148
di Lebesgue 19
di Poisson 374
di tipo potenziale 25
Invarianza di Lorentz 89
Iterazione di funzione 240

Lemma
di Arzelà-Ascoli 265
di du Bois Reymond 85
di Dini 19
di Heine-Borel 16

Metodo
di discesa 174
di Fourier 338, 403
di Kellogg 281
di onde in propagazione 209
Metodo
di Riemann 217
di riflessioni 211, 214, 371
corda finita 214
corda semiinfinita 211
Modo (i)
fondamentale 411
successivi 411

Nodi 411
Nucleo(i)
continuo 238
debolmente polare 246

definito positivo 277
degenere 251
d'equazione integrale 237
di operatore integrale 36
di Volterra 244
hermitiano 264
coniugato 237
iterati 242
simmetrici 279
sviluppo bilineare di 272, 273
Numero
caratteristico 238
quantico magnetico 414
orbitale 414

Operatore
continuo 35
di Cauchy-Riemann 108
di D'Alambert 45
di derivazione frazionale 127
differenziale 37
d'integrazione frazionale 127
Operatore
di Laplace 45
d'onda 45
di Peierls 251
di Riemann-Liouville 127
hermitiano 40
integrale 36
integro-differenziale 37
inverso 38
limitato 36
lineare 35
positivo 40
Ordine 152
Originale 157

Parte finita 99
Polinomi di Legendre 329
formula di somma di 337
Potenziale
d'area 129, 392
d'onda 188, 190
di superficie 190
di Robin 365
di doppio strato 129, 346, 392
di semplice strato 129, 346, 392
di volume 129, 344
elettromagnetico 50
logaritmico 128, 391
newtoniano 128, 344, 348
ritardato 190
Potenziale
termico 229
di superficie 231
Primitiva 95
di ordine n 97
Principio
del massimo 319, 433
d'ampiezza limite 386
d'assorbimento limite 386
di convergenza di Cauchy 15
di Huygens 203
di minimo 434
di simmetria di Riemann-Schwartz 326
di sovrapposizione delle onde 202
Problema
al contorno 63, 64, 66
Problema
al contorno 63, 64
correttamente impostato 70
di Cauchy 64
generalizzato 197, 233
di Dirichlet 67, 358
di Goursat 68, 217
di Neumann 67, 358
di Tricomi 69
di Sturm-Liouville 294
misto 64, 67, 403
Processo d'ortogonalizzazione di Schmidt 31
Prodotto diretto 110, 137

Rappresentazione di Cauchy 92
Regolarizzazione 127
Regione d'influenza 202
Risolvente 243
Risonanza 408

Separazione delle variabili 389, 403
Serie
di Fourier 31
di Neumann 240
Soluzione
classica 73, 416
di operatore di Cauchy-Riemann 180
di convoluzione 125
di conduzione termica 175
differenziale lineare
di Dirac 182
di Helmholtz 179
di Klein-Gordon-Fock 182
di Laplace 178
d'onda 176
di Schrödinger 182
di trasporto 180
fondamentale 170
generalizzata 73, 169, 424
Spazio
delle funzioni fondamentali $\mathcal{D}$ 76
$\mathcal{S}$ 132
C, $C(G)$, $C(\overline{G})$, $C^p(G)$, $C^p(\overline{G})$, $C^0(G)$, $C^0(\overline{G})$, $C^\infty(G)$, $C^\infty(\overline{G})$ 17
$C(T)$ 18

Spazio
$\mathscr{D}'_+$ 125
$\mathscr{D}'_+(a)$ 155
delle funzioni generalizzate $\mathscr{D}'$ 80
delle funzioni generalizzate di crescita lenta $\mathscr{S}'$ 133
$\mathscr{E}'$ 131
$\mathscr{L}_2(G)$ 28
$\mathscr{S}'$ 141
θ_M 132
Spettro di frequenze proprie 405
Spostamento 89
Strato
doppio 102
semplice 87
Superficie
caratteristica (o caratteristica) 55
di Ljapunov 348
Supporto 18, 83

Teorema(i)
della media 318
di Bolzano-Weierstrass 16
di Cauchy 18
di Cauchy-Kovalevskaja 71
di Fredholm 251, 255, 256
di Fubini 24
di Funk-Hecke 388
di Hilbert-Schmidt 271, 278
di « raccordo a tratti » 84
di Jentsch 280
di Lebesgue 23
di B. Levi 23
di Liouville 324, 326, 327
di Mercer 284
di Paley-Wiener-Schwartz 154
di Perron 281
di Riesz-Fischer 30
di L. Schwartz 133
di Steklov 299
di Weierstrass 19
Tono fondamentale 411
Trasformazione (i) (trasformata, e)
di Fourier 140, 141, 143, 145, 146
di convoluzione 146
di Hankel 314
di Kelvin 325
(trasformata) di Laplace 155, 157
inversa 160

Uguaglianza di Parseval-Steklov 32

Vibrazione (i)
armonica 405
di una corda 410
di una membrana 411
di un volume sferico 413

Indice dei nomi

Antosik I. 128, 439
Arsenin V. Ja. 70, 312, 439, 441

Beklemišev D. V. 53, 254, 439
Bernoulli D. 12
Bitsadze A. V. 439
Blochintsev D. I. 51, 293, 439
Bogoljubov N. N. 14,51, 74, 182, 439
Bremermann H. 74, 92, 439
Bryčkov Ju. A. 155, 439
Budak B. M. 439

Cauchy A. 12
Čarušnikov V. D. 14
Courant R. 439

D'Alembert J. 12
Dirac P. 74, 439
Dirichlet P. 12
Ditkin V. A. 155, 439
Drožžinov Ju. N. 14

Eulero L. 12
Evgrafov M. A. 399, 439

Fedorjuk M. V. 259
Fichtengolts G. M. 85, 367, 439
Fomin S. V. 23, 85, 440
Fourier J. 12

Gauss C. 12, 347
Ghelfand I. M. 74, 440
Gliner E. B. 440
Gradštein I. S. 153, 440

Hadamard J. 72, 200, 440
Hilbert D. 12, 439
Hörmander L. 74, 171, 200, 440

Iljin V. A. 14, 440
Ivanov V. K. 70, 442

Jost R. 74, 440

Karimova Ch. Ch. 14, 442
Kiprianov I. A. 14
Kolmogorov A. N. 23, 85, 440
Košljakov A. N. 440
Kovalevskaja S. V. 12
Krivenkov Ju. P. 14
Kudriavtstev L. D. 14, 68, 140, 440

Ladyženskaja O. A. 291, 432, 440
Lagrange G. 12
Laplace P. 12
Lavrentiev M. A. 401, 440
Lavrentiev M. M. 70, 72, 440, 442
Leibniz G. 12
Lions J.-L, 155, 440
Logunov A. A. 74, 439
Ljapunov A. M. 12, 316, 348, 440

Maltsev A. I. 53, 440
Marčjuk G. I. 48, 440
Messiah A. 51, 293, 414, 440
Michailov V. P. 14, 72, 291, 440, 442
Michlin S. G. 351, 440
Mikusinski J. 128, 439

Nagy B. Sz. 23, 30, 441
Newton I. 12
Nikiforov A. F. 312, 440
Nikolskij S. M. 441

Ostrogradskij M. V. 12

Petrovskij I. G., 72, 263, 441
Poincarè H. 12

Poisson S. 12
Položij G. N. 72, 441
Pontrjaghin L. S. 59, 295, 441
Prudnikov A. P. 155, 439

Riemann G. 12
Riesz F. 23, 30, 441
Ryžik I. M. 153, 440

Samarskij A. A. 312, 388, 439, 442
Schwartz L. 74, 87, 134, 154, 441
Šabat B. V. 401, 440
Šabunin M. I. 259, 441, 442
Šilkov G. E. 74, 81, 440, 441
Širkov D. V. 51, 182, 439
Sidorov Ju. V. 259, 441, 442
Sikorski R. 128, 439
Smirnov M. M. 14, 441
Smirnov V. I. 20, 312, 383, 441
Sobolev S. L. 14, 73, 200, 357, 441
Sochozki J. W. 88, 441
Steklov V. A. 12, 300, 441
Stepanov B. M. 14
Stepanov V. V. 70, 441
Stokes G. 12
Streater R. F. 74, 441

Tichonov A. N. 14, 70, 312, 388, 439 441, 442
Todorov I. T. 74, 439

Uvarov V. B. 312, 440

Vašarin A. A. 442
Vekua I. N. 60, 381, 383, 388, 442
Vladimirov V. S. 14, 48, 74, 163, 281, 442

Whitham G. B. 217, 236, 442
Wightman A. S. 74, 442

Žarinov V. V. 14

La particolarità fondamentale di questo Corso è il vasto impiego del concetto delle soluzioni generalizzate. Perciò il libro contiene un capitolo speciale dedicato alla teoria delle funzioni generalizzate.
Si tratta di un manuale per gli studenti delle Università delle facoltà di matematica e fisica e per gli ingegneri con elevata preparazione matematica.

libreria italia-urss
srl

Distribuito da
Libreria Italia — URSS
Via E. Raggio, 1/10, Genova
Piazza della Repubblica, 47,
Roma